САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

САНДОМИРСКАЯ Марина Сергеевна

# ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ

Специальность: 01.01.09 — Дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки **Санкт-Петербургском экономико-математическом институте РАН**.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
**Доманский Виктор Константинович,**
ведущий научный сотрудник
Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН

Официальные оппоненты: **Мазалов Владимир Викторович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт прикладных математических исследований Карельского Научного Центра РАН, директор;

**Петросян Леон Аганесович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет, декан Факультета Прикладной Математики и Процессов Управления

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки **Центральный экономико-математический институт РАН**

Защита состоится « » ___________ 2013. г. в __ час. на заседании диссертационного совета Д.212.232.29 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан « » ___________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В. М.

# Общая характеристика работы

Повторяющиеся игры с неполной информацией представляют собой естественную математическую модель для исследования информационных аспектов продолжительного взаимодействия сторон в условиях неопределенности. Они были введены Ауманом и Машлером в 60-х годах прошлого века в период их работы на Американское Агентство по Контролю над Вооружениями и Разоружению. Повторяющиеся игры с неполной информацией являются эффективным инструментом анализа процессов обмена информацией. Они позволяют ответить на вопросы, при каких условиях и с какой скоростью происходит раскрытие информации, каковы эффективные механизмы сокрытия информации, какую выгоду можно извлечь при грамотном использовании информации.

В теории повторяющихся игр с неполной информацией основное число работ посвящено играм двух лиц с нулевой суммой (антагонистическим). Наиболее полно изучены свойства повторяющихся игр с неполной информацией у одной из сторон. В таких играх два игрока $n$ раз разыгрывают матричную антагонистическую игру. Матрица выигрышей определяется так называемым состоянием природы, которое выбирается из множества возможных состояний случайным ходом перед началом игры на весь период в соответствии с известным обоим игрокам распределением $p$. Случайный выбор сообщается одному из игроков (инсайдеру), но не его оппоненту, причем это общеизвестно. После каждого шага неинформированный игрок, наблюдая за действиями информированного, байесовски обновляет свои представления о распределении вероятностей $p$. Важной особенностью анализа процесса обновления информации неинформированным игроком является то обстоятельство, что требуется рассматривать целый класс игр, параметризованных исходным распределением на множестве состояний природы.

Ввиду технических сложностей при решений конкретных игр лишь сравнительно небольшое число повторяющихся игр с неполной информацией удалось решить явно: см. работы Колберга, Хойера, Де Мейера и Салей, Доманского и Крепс.

Важной областью приложения повторяющихся игр с неполной информацией является моделирование торгов на финансовых рынках, на которых имеется асимметричное распределение информации о ликвидных ценах торгуемых рисковых активов среди рыночных агентов. Такие модели позволяют учесть стратегическое влияние инсайдера на процесс ценообразования.

В работе Де Мейера и Салей демонстрируется, что стремление инсайдера скрывать свою информацию вынуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Эта рандомизация приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен (обуславливаемых внешними шоковыми факторами) и влечет появление в их эволюции броуновской компоненты. Дискретный вариант модели Де Мейера и Салей был рассмотрен Доманским.

В модели торгов, рассматриваемой Доманским, имеются два риск-нейтральных рыночных агента, обладающих безрисковым активом (деньгами) и рисковым активом (акциями одного типа). При этом один из агентов (инсайдер) знает ликвидную цену акции к моменту окончания торгов, а другой игрок не знает. Торги проходят в $n$ этапов. На каждом шаге торгов игроки одновременно предлагают целочисленную цену за одну акцию. Назвавший более высокую цену покупает по этой цене одну акцию у оппонента. Каждый игрок стремится увеличить свой итоговый капитал (деньги плюс денежный эквивалент приобретенных/оставшихся акций).

Описанная модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией у одного из игроков. Доманский решает соответствующую игру и демонстрирует появление случайного блуждания цен сделок при оптимальном поведении игроков.

Отметим, что дискретная модель более реалистична, чем модель с вещественным ставками Де Мейера и Салей, поскольку отражает наличие на рынке минимальной денежной единицы, в которой проводятся торги.

**Предметом** этого диссертационного исследования являются повторяющиеся игры с неполной информации, моделирующие биржевые торги различной продолжительности с усложненным торговым механизмом, позволяющим игрокам назначать различные цены покупки и продажи с фиксированным бид-аск спредом. Механизм пошагового обмена между игроками, при котором цены покупки и продажи совпадают, не соответствует условиям, в которых на рынке функционируют так называемые маркетмейкеры.

**Актуальность** темы диссертации на основе вышесказанного заключается в разработке дискретных моделей биржевых торгов, в которых игроки назначают различные цены покупки и продажи. Анализ этих моделей позволяет исследовать влияние бид-аск спреда на ожидаемые выигрыши инсайдера и на активность совершения сделок.

**Целью** этой работы является исследование повторяющихся игр торгов с неполной информацией с усложненным торговым механизмом и различной продолжительностью торгов. Результаты анализа таких игр торгов позволяют более обосновано говорить о стратегическом влиянии асимметричности информации на финансовом рынке на процесс ценообразования.

Для достижения этой цели мы решаем ряд задач:

- Исследуем модель биржевых торгов с заранее неограниченной продолжительностью, в которой игроки могут назначать различные цены покупки и продажи, и определяем, какое влияние оказывает ненулевой бид-аск спред на поведение участников торгов и на выигрыш информированных агентов.

- Анализируем модель торгов с большим, но конечным числом повторений для случая как нулевого, так и ненулевого бид-аск спреда. Разрабатываем механизм, позволяющий переходить от игры с бесконечным числом шагов к конечношаговым играм, и вычисляем, какие потери несет инсайдер при остановке торгов раньше ожидаемого момента.

- Изучаем модель однократных торгов, в которых вся приватная информация, имеющаяся у инсайдера, должна быть использована сразу. Определяем, при каких условиях инсайдер может ожидать наибольший выигрыш от использования информации.

Основными **методами** решения поставленных задач являются методы анализа повторяющихся игр с неполной информацией и динамических игр, методы теории матричных игр, а также методы теории вероятностей и теории управляемых случайных процессов. Для анализа одношагового случая также используются методы теории статических игр с неполной информацией.

**Научная новизна.**

Дискретные модели биржевых торгов с ненулевым бид-аск спредом на основе повторяющихся игр с неполной информацией исследуются впервые. Оригинален разработанный в главе 3 подход к анализу конечношаговых игр с неполной информацией на базе решения бесконечных игр.

**Теоретическая значимость** работы состоит в исследовании оригинальных повторяющихся игр с неполной информацией. В играх торгов вводится новый параметр — бид-аск спред, оказывающий существенное влияние на технику исследования и полученные результаты. Также исследованы игры торгов с большим конечным числом шагов. Предположительно, данную методику исследования можно перенести на более широкий класс динамических игр, имеющих сходную вероятностную структуру решения (стратегия инсайдера генерирует простое случайное блуждание апостериорных вероятностей).

**Практическая значимость** данной работы заключается в оценке влияния величины бид-аск спреда на стратегические возможности инсайдера извлекать выгоду из приватной информации. Также результаты могут быть использованы для оценки рисков маркетмейкеров на финансовых рынках.

Остановимся кратко на описании **структуры работы** и ее **основных положений**. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В работе 90 страниц, список литературы содержит 40 источников. В работе использована двойная нумерация теорем, определений и формул: первая цифра означает номер главы, вторая — внутренний номер внутри главы. В автореферате нумерация соответствующих теорем такая же, как в полном тексте диссертации. Формулировки некоторых утверждений в автореферате приводятся в упрощенном виде, чтобы избежать введения специальных обозначений и терминологии. Полные формулировки можно увидеть в тексте диссертации.

Глава 1 включает в себя описание основных понятий и соотношений теории повторяющихся игр с неполной информацией, разработанных Ауманом и Машлером . Также в этой главе дается обзор базовых моделей биржевых торгов с нулевым бид-аск спредом (непрерывная модель Де Мейера и Салей и дискретная модель Доманского). Описаны решения соответствующих повторяющихся игр, необходимые для построения более точных моделей торгов.

В главе 2 вводится модель биржевых торгов с ненулевым бид-аск спредом, исследуются биржевые торги с неограниченным числом шагов. Строится стратегия неинформированного игрока в бесконечной игре, гарантирующая ему ограниченный сверху проигрыш при любом количестве повторений. В этой главе найдена также наилучшая стратегия инсайдера, порождающая простое случайное блуждание апостерионых вероятностей, и выигрыш инсайдера, гарантируемый этой стратегией. Показано, что верхняя и нижняя границы выигрыша инсайдера уменьшаются с ростом бид-аск спреда. В главе 2 рассмотрены модели как с двумя возможными ликвидными ценами акции, так и со счетным числом возможных цен.

В главе 3 рассматриваются модели биржевых торгов с нулевым и ненулевым спредом и конечным числом повторений. Определена величина, которую может гарантировать инсайдер, применяя стратегию, оптимальную при бесконечношаговом взаимодействии. Показано, что при бесконечном увеличении числа повторений значение конечной игры стремится к значению бесконечношаговой игры как минимум экспоненциально.

Глава 4 посвящена исследованию статических моделей биржевых торгов с нулевым и ненулевым спредом. Определяется возможная структура ставок, используемых игроками в оптимальных смешанных стратегиях. Строятся рекуррентные соотношения на веса ставок в оптимальных смешанных стратегиях, позволяющие связывать стратегии, использующие большее число ставок, со стратегиями с меньшим набором активных ставок.

**Апробация работы.**

Результаты диссертационной работы были представлены на 5-й, 6-й, 7-й Международных конференциях "Теория Игр и Менеджмент" (Санкт-Петербург, 2011, 2012, 2013), на 16-й Международной конференции Общества Прикладной Теории Вероятностей APS 2011 (Стокгольм, 2011), на 7-й Международной Испано-Итало-Нидерландской конференции по Теории Игр SING7 (Париж, 2011), на Всероссийской конференции "Моделирование в задачах городской и региональной экономики" (Санкт-Петербург, 2011), на Международной конференции "Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича" (Санкт-Петербург, 2012), на 8-й Международной петрозаводской конференции "Вероятностные методы в дискретной математике" и 13-м Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Петрозаводск, 2012), на 5-й Израильской конференции по Теории Игр (Тель-Авив, 2013), на Международном семинаре "Сетевые игры и менеджмент" NGM2013 (Петрозаводск, 2013), на 2-й Международной научной конференции "Теория рыночных структур и пространственная экономика" (Санкт-Петербург, 2013), на научных семинарах Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, Центрального экономико-математического института РАН и Факультета Прикладной Математики и Процессов Управления СПбГУ.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в печатных работах автора [1-13], приведенных в конце автореферата. Работа [5] опубликована в журнале, входящем в перечень рецензируемых научных журналов и изданий.

В работах [5, 7-10] автору принадлежат основные результаты и теоремы, а соавтору диссертанта (научному руководителю) принадлежит постановка задачи и идея рекурсивного анализа выравнивающих стратегий. В работе [6] диссертантом написаны разделы 3, 5 и 8.

# Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируется основная цель исследования, ставятся задачи и характеризуются используемые для их решения методы, описывается структура диссертации.

**Первая глава** посвящена введению необходимых понятий теории повторяющихся игр с неполной информацией и описанию упрощенных моделей биржевых торгов с нулевым бид-аск спредом в случае континуального (модель Де Мейра и Салей) и целочисленного (модель Доманского) допустимых множеств ставок игроков. В непрерывной модели значение соответствующей повторяющейся игры неограниченно возрастает с ростом числа шагов $n$ со скоростью порядка $\sqrt{n}$.

Опишем подробно дискретную модель. Два риск-нейтральных агента с противоположными интересами вступают в $n$-шаговые торги за рисковый актив (акции одного типа). Ликвидная цена акции определяется случайным ходом (шоковым внешним воздействием) перед началом торгов и может принимать два различных целочисленных значения: низкое 0 с вероятностью $1-p$ (состояние природы $L$) и высокое $m \in \mathbb{N}$ с вероятностью $p$ (состояние природы $H$). Игрок 1 информирован о результате случайного хода, Игрок 2 не информирован. Оба игрока знают вероятность $p$. То, что Игрок 1 — инсайдер, является общим знанием. Риск-нейтральность игроков заключается в том, что полезность случайного выигрыша для них равна его математическому ожиданию.

На каждом шаге торгов игроки одновременно предлагают свою целочисленную цену за одну акцию. Назвавший более высокую цену покупает по этой цене одну акцию у оппонента. Если игроки назвали одинаковые цены, то транзакции не происходит. После каждого шага ставки игроков публично оглашаются. Каждый игрок стремится увеличить свой итоговый капитал (деньги плюс акции по ликвидной цене).

В этой модели значение игры ограниченно сверху, поэтому Доманский рассматривает бесконечношаговую игру $G_{\infty}^{m}(p)$ и находит ее значение — кусочно-линейную выпуклую функцию с точками излома $p_k = k/m,\ k = 0, \ldots, m$, и значениями в этих точках $V_{\infty}^{m}(p_k) = k(m-k)/2$.

Во **второй главе** вводится дискретная модель биржевых торгов акциями между двумя игроками, которые на каждом шаге торгов делают две ставки — назначают цену продажи и цену покупки одной акции с фиксированной разницей $s$ (бид-аск спредом). На каждом шаге сделка происходит по цене покупки, если цена продажи акции, названная одним из игроков, не превосходит цены покупки, названной его оппонентом на данном шаге. Число шагов заранее не ограничено. Модель является уточнением модели Доманского без бид-аск спреда. При $s = 1$ она в точности соответствует модели без спреда ввиду дискретности ставок. Рассмотрен случай $m \bmod s = 0$.

Модель сводится к повторяющейся игре $G_n^{m,s}(p)$ с неполной информацией у Игрока 2.

Рассмотрим стратегию неинформированного игрока, являющуюся естественным обобщением стратегии, оптимальной в модели с нулевым спредом. Для априорной вероятности $p \in \left[\frac{sk}{m}, \frac{s(k+1)}{m}\right)$ первым ходом стратегии $\tau^{k,m,s}$ Игрока 2 является ставка (цена покупки) $sk$. Далее на шаге $t = 2, 3, \ldots$ Игрок 2 сдвигает свою цену покупки на $s$ в большую или меньшую сторону в зависимости от действий инсайдера на предыдущем шаге. Эта стратегия дает следующую оценку сверху на значение игры.

**Теорема 2.1.** *Значение $V_n^{m,s}$ игры $G_n^{m,s}(p)$, как функция от $p$, для любого $n$ ограничено сверху функцией $H^{m,s}$ — непрерывной, выпуклой вверх, кусочно линейной функцией с $m/s$ областями линейности $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k = 0, 1, \ldots, m/s - 1$. Эта функция однозначно определена своими значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$:*

$$H^{m,s}(p_k) = \frac{m^2}{2s} p_k(1 - p_k).$$

Обобщая конструкцию для модели без спреда, мы строим стратегию инсайдера $\sigma^{k,m,s}$.

**Теорема 2.2.** *Стратегия $\sigma^{k,m,s}$ порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $\left\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, ..m/s\right\}$ с поглощением в крайних точках и на каждом шаге до поглощения гарантирует инсайдеру положительный выигрыш $V_1(s)$, зависящий только от величины спреда.*

Стратегия $\sigma^{k,m,s}$ является лучшей в классе стратегий, порождающих простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по указанной решетке. Тем не менее, она не является оптимальной (может быть улучшена для $s = 2$).

**Теорема 2.3.** *Функции $V_n^{m,s}$ при $n \to \infty$ ограничены снизу функцией $L^{m,s}$ — непрерывной, выпуклой вверх, кусочно линейной функцией со значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$:*

$$L^{m,s}(p_k) = V_1(s) \frac{m^2}{s^2} p_k(1 - p_k).$$

Эти результаты обобщены на случай счетного множества возможных ликвидных цен акции. Рассматривается модель торгов, в которой ликвидная цена принимает значения на решетке $sk$, $k \in \mathbb{Z}$. Идея заключается в том, чтобы представить распределения на целочисленной решетке с фиксированным первым моментом в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями с тем же первым моментом. Показано, что для распределений со средним значением $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = sk$, $k \in \mathbb{Z}$, верхняя и нижняя границы сохраняют свою форму с заменой множителя $m^2 p_k(1-p_k)$ на дисперсию $\mathbf{D}(\mathbf{p})$. Мы строим стратегию инсайдера как комбинацию его стратегий для двухточечных игр, требующую проведения дополнительной лотереи для выбора соответствующего двухточечного распределения.

В **третьей главе** найден выигрыш инсайдера в игре $G_n^m(k/m)$, моделирующей биржевые торги с нулевым (единичным) спредом, при использовании стратегии $\sigma^m$, оптимальной для игры $G_\infty^m(k/m)$.

Пусть $K_n^m(p,\sigma,\tau)$ — функция выигрыша инсайдера в игре $G_n^m(p)$.

Назовем ценой внезапного раскрытия инсайдерской информации на шаге $n$ в бесконечной игре $G_\infty^m(k/m)$ величину:

$$\varepsilon_n^m(k) = V_\infty^m(k/m) - \inf_\tau K_n^m(k/m, \sigma^m, \tau).$$

Этот термин мотивирован возможной интерпретацией $n$-шаговой игры как внезапной, неожиданной для инсайдера, остановки бесконечношаговой игры на шаге $n$.

**Теорема 3.1.** *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации экспоненциально убывает с течением времени $n$ и вычисляется согласно формуле*

$$\varepsilon_n^m(k) = \frac{1}{2m} \sum_{l=1}^{[m/2]} \cos^n \frac{\pi(2l-1)}{m} \sin \frac{\pi k(2l-1)}{m} \mathrm{ctg} \frac{\pi(2l-1)}{2m} \left(1 + \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi(2l-1)}{2m}\right),$$

*где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$.*

**Теорема 3.2.** *Значение $V_n^m(k/m)$ конечношаговой игры $G_n^m(k/m)$ ограничено снизу функцией $L_n^m(k/m)$ — выигрышем, гарантированным стратегией $\sigma^m$ Игрока 1 :*

$$L_n^m(k/m) = \frac{(m-k)k}{2} - \varepsilon_n^m(k), \quad k = 1, \dots m-1.$$

**Следствие 3.1.** *Стратегия $\sigma^m$ является $\varepsilon_n^m$-оптимальной стратегией Игрока 1 в $n$-шаговой повторяющейся игре $G_n^m(k/m)$, где $\varepsilon_n^m = O(\cos^n \frac{\pi}{m})$.*

**Следствие 3.2.** *Последовательность значений $n$-шаговых игр сходится к значению бесконечношаговой игры по меньшей мере с экспоненциальной скоростью.*

Показываем, что для случая $m = 3$ порядок скорости сходимости выигрыша в $n$-шаговой игре при оптимальном поведении также экспоненциальный (т.е. не наблюдается гиперэкспоненциальной скорости).

Результат удается распространить на случай ненулевого бид-аск спреда, но в этом случае все сравнения проводятся не со значением игры, а с гарантированной инсайдером нижней оценкой $L^{m,s}$ значения.

Ценой внезапного раскрытия инсайдерской информации в этом случае называем величину

$$\varepsilon_n^{m,s}(k) = L^{m,s}(sk/m) - \inf_{\tau} K_n^{m,s}(sk/m, \sigma^{k,m,s}, \tau).$$

**Теорема 3.4.** *При внезапной остановке торгов на шаге $n$ инсайдер относительно своего гарантированного уровня $L^{m,s}$ теряет следующую величину*

$$\varepsilon_n^{m,s}(k) = 2V_1(s)\varepsilon_n^{m/s}(k).$$

**Четвертая глава** посвящена анализу одношаговой дискретной модели биржевых торгов как в случае простейшего торгового механизма (без бид-аск спреда), так и с фиксированным ненулевым бид-аск спредом. Специфика одношаговой модели состоит в том, что Игроку 1 больше не нужно скрывать свою приватную информацию, а требуется получить из нее максимальную единовременную выгоду. Мы исследуем случай двух возможных ликвидных цен акции: в состоянии природы $H$ акция имеет высокую цену, равную целому положительному числу $m$, в состоянии $L$ цена акции равна нулю.

Приведем здесь результаты для произвольного спреда $s$. Модель без спреда соответствует случаю $s = 1$. Опишем возможную структуру (спектры) множества ставок, используемых в оптимальных смешанных стратегиях, и изменение спектров при росте $p$.

При ликвидной цене, равной 0, оптимальная стратегия инсайдера при любом $p$ — назначать цену продажи 0 (цену покупки $-s$).

**Утверждение 4.4.** *Пусть максимальная ставка (цена покупки) инсайдера, используемая с положительной вероятностью, равна* $k$*. Тогда максимальная ставка, которую использует Игрок 2, отстоит от* $k$ *не более, чем на величину спреда, то есть находится в промежутке*

$$[k-s, k+s-1].$$

Получены нижняя и верхняя оценки (как функция от вероятности $p$) величины максимальных активных ставок $k_x$ и $k_y$ в оптимальных стратегиях инсайдера и неинформированного игрока, соответственно.

**Теорема 4.3.** *Если все активные ставки в оптимальной стратегии Игрока 2 не сосредоточены в промежутке* $[m-s, m]$*, то выполняется*

$$k_x \geq \frac{2mp-s}{1+p}.$$

**Теорема 4.4.** *Выполняется следующее неравенство*

$$k_y \leq \min\left\{n \in \mathbb{N} | n > m - \frac{1}{p}\right\}.$$

Назовем лакунами наборы ставок, которые игроки не используют, при этом используя с некоторой вероятностью и большие и меньшие ставки.

**Утверждение 4.8.** *Если максимальные ставки в оптимальных стратегиях Игроков 1 и 2 меньше* $m-1-s(4s-1)$*, то в этих спектрах отсутствуют лакуны длиной больше или равной* $2s$*.*

Мы разрабатываем рекурсивный подход, позволяющий найти соотношение между выравнивающей стратегией Игрока 2 и его стратегией, выравнивающей меньшее число ставок инсайдера.

Покажем, как работает этот механизм в случае, когда Игрок 1 использует все ставки от $s$ до $k$ без пропусков. В оптимальной стратегии Игрока 2 при этом не может быть пропусков в промежутке ставок от $4s-1$ до $k+s-1$ — наибольшей ставки, используемой Игроком 2. Обозначим пару таких оптимальных стратегий через $(x_k^*, y_{k+s-1}^*)$. Припишем индекс $k$ соответствующему значению игры: $v_k = v_k^L(1-p) + v_k^H p$.

Анализируя матрицу игры, замечаем, что если вычеркнуть $k$-ю строку, то столбцы инсайдера с нулевого по $k+s-2$-ой, взятые в том же соотношении, что и в оптимальной стратегии $y^*_{k+s-1}$, выравнивают оставшиеся строки инсайдера. Это приводит нас к рассмотрению выравнивающих стратегий в случае, когда максимальная ставка инсайдера $k-1$.

Для $s=1$ эти формулы принимают такой вид

$$v_k^H = \frac{(m-k)^2}{v_{k-1}^H}, \quad v_k^L = (v_{k-1}^L - k)\frac{m-k}{v_{k-1}^H} + k.$$

# Список публикаций автора по теме диссертации


1. Сандомирская М.С. Теоретико-игровая модель биржевых торгов: общий торговый механизм // Сборник тезисов Всероссийской Конференции “Моделирование в задачах городской и региональной экономики”. Санкт-Петербург. 2011. С.179-180.

2. Сандомирская М.С. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с фиксированной маржой // Материалы международной конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича» / Под ред. И.В. Романовского. Санкт-Петербург. 2012. С.169.

3. Сандомирская М.С. Теоретико-игровая модель одношаговых инсайдерских торгов с ненулевой маржой // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т.19. Вып.2. С.219-220.

4. Сандомирская М.С. Оценки значения повторяющейся игры, моделирующей биржевые торги с маржой // Материалы III Всероссийской конференции “Экономический рост, ресурсозависимость и социально-экономическое неравенство”. Санкт-Петербург. 2012. С.173-176.

5. **Сандомирская М.С., Доманский В.К. Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т.4. Вып.1. С.32-54.**

6. Domansky V., Kreps V., Sandomirskaia M. A survey on discrete bidding games with asymmetric information // Contributions to game theory and management. Vol. VI. Collected papers presented on the Sixth Int. Conf. Game Theory and Management / Eds. by L. Petrosjan and N. Zenkevich. St.Petersburg. 2013. P.89-114.

7. Domansky V., Sandomirskaya M. Solutions for one-stage bidding game with incomplete information // The Fifth Int. Conference Game Theory and Management GTM2011. Abstracts / Eds. by L. Petrosjan and N. Zenkevich. St.Petersburg. 2011. P.68-71.

8. Sandomirskaya M., Domansky V. Solutions for one-stage bidding game with incomplete information // Abstracts of The 16th applied probability society conference. Royal institute of technology (KTH). Stockholm. 2011. P.171-172.

9. Sandomirskaya M., Domansky V. Solutions for one-stage bidding game with incomplete information // Abstracts of The 7th Int. Conference Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory SING7. Telecom Paris Tech. Paris. 2011. P.68.

10. Sandomirskaia M., Domansky V. Solution for one-stage bidding game with incomplete information // Contributions to game theory and management. Vol. V. Collected papers presented on the Fifth Int. Conf. Game Theory and Management / Eds. by L. Petrosjan and N. Zenkevich. St.Petersburg. 2012. P.268-285.

11. Sandomirskaia M. Game-theoretic approach to insider trading modeling: one-stage bidding with non-zero bid-ask spread // The Sixth Int. Conf. Game Theory and Management GTM2012. Abstracts / Eds. by L. Petrosjan and N. Zenkevich. St.Petersburg. 2012. P.232-233.

12. Sandomirskaia M. On the bidding with asymmetric information and the finite number of repetition // The Seventh Int. Conf. Game Theory and Management GTM2013. Abstracts / Eds. by L. Petrosjan and N. Zenkevich. St.Petersburg. 2013. P.203-206.

13. Sandomirskaia M. On multistage bidding games with positive bid-ask spread // Extended Abstracts of Int. Workshop Networking Games and Management. Petrozavodsk. 2013. P.84-89.