САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАЛИНИН Юрий Николаевич

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЦИКЛЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НАГРЕВА

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
РАЙТМАНН Фолькер

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
ПИЛЮГИН Сергей Юрьевич
(Санкт-Петербургский государственный университет, профессор)

доктор физико-математических наук, профессор
БУРКИН Игорь Михайлович
(Тульский государственный университет, заведующий кафедрой математического анализа)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Защита состоится __ ___________ 2013 г. в __ часов __ минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199048, Санкт-Петербург, 14 линия В. О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" ____________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Чурин Ю. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации изучаются вопросы существования почти периодических решений для задач микроволнового и индукционного нагрева. Для этого строится теория почти периодических интегралов для коциклов. На основе этой теории показывается существование почти периодических интегралов для микроволновой задачи нагрева. Выводится частотное условие существования почти периодических решений для эволюционных вариационных уравнений с монотонными нелинейностями. Доказывается существование почти периодических решений для эволюционных систем с нелинейностью типа Дуффинга, и, как частный случай, задачи индукционного нагрева.

Актуальность темы. В последнее время во многих прикладных задачах используется микроволновый и индукционный нагрев материалов, например, в быту, промышленности, медицине и многих других. В медицине в последнее время особый интерес проявляется к лечению злокачественных опухолей. В связи с этим возникает задача усиленного контроля температуры. Требуется локализовать нагреваемый участок, чтобы не вызвать разрушение соседних здоровых тканей и избежать неконтролируемого роста температуры за конечный промежуток времени (blow-up). Для моделирования используется парная система из уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности, которое учитывает эффект микроволн.

Существование почти периодических решений для возмущенных эволюционных систем является важной задачей. Хорошо известны результаты о существовании почти периодических решений для разных классов.

Результаты о существовании почти периодических интегралов для процессов как обобщение решений в неавтономных системах были предложены в работах Hino Y. и Murakami S. [4] и Dafermos C. M. [2]. В данной диссертации этот подход рассматривается для более общих конструкций, а именно – коциклов. В работе показано, что задача микроволнового нагрева в присутствии почти периодического по Бору возмущения порождает такой класс коциклов.

Другой подход для доказательства существования почти периодических решений развит в работах Панкова А. А. [1] для возмущенной эволюционной системы с монотонной нелинейностью. Здесь основным принципом является компактификация Бора топологической группы и использование энергетических функционалов. В настоящей работе, для построения такого энергетического функционала типа Ляпунова, используется частотный метод. На его основании получено существование почти периодических решений в задаче индукционного нагрева. В отличие от имеющейся литературы такой метод для вариационных уравнений предлагается впервые.

Актуальность темы подтверждается также тем, что она входит в число исследований, поддержанных Немецко-Российским научным центром (G-RISC). Диссертант получал поддержку от G-RISC в виде стипендии на месте в течение 6 месяцев (с 1 апреля по 30 сентября 2010 г.).

Цель работы. Целью работы является исследование вопроса существования почти периодических решений для возмущенных эволюционных систем и их применения для задач микроволнового и индукционного нагрева. Другими целями являются построение теории почти периодических интегралов, построение энергетического функционала с помощью частотного метода и проведение численных экспериментов.

Методы исследования. В диссертации используются следующие методы исследования:

- Построение почти периодических интегралов для коциклов.
- Методы априорных оценок решений для парной системы уравнений в частных производных.
- Функционалы типа Ляпунова в виде квадратичных форм в функциональном пространстве.
- Частотный метод для построения функционала типа Ляпунова для эволюционной задачи.
- Численное моделирование решений системы задачи микроволнового нагрева с использованием пакета Matlab.

Результаты, выносимые на защиту.

- Доказано существование почти периодических интегралов для определённых классов коциклов.

- Доказано существование почти периодического решения для одномерной задачи микроволнового нагрева.
- Получено частотное условие существования почти периодических решений для возмущенной эволюционной системы с монотонными нелинейностями.
- Доказано существование почти периодического решения для задачи управления температурным профилем стержня с граничным управлением.
- Численно смоделировано решение одномерной задачи микроволнового нагрева.

Достоверность результатов. Все полученные результаты математически строго доказаны. Результат для почти периодических интегралов коциклов содержит как частный случай результат работы Hino Y. и Murakami S. Результат для эволюционных вариационных уравнений расширяет результат, полученный в работах Панкова А. А. относительно конструктивного построения энергетических функционалов с помощью частотного метода.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Введены элементы теории почти периодических интегралов для коциклов. Получены впервые частотные условия существования почти периодического решения для эволюционной системы управления типа Лурье с нелинейностью типа Дуффинга.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты для задач микроволнового и индукционного нагрева могут быть использованы для контроля за температурой на практике. Разработанные методы позволяют исследовать широкий класс возмущённых эволюционных систем, показать существование почти периодических решений для некоторых классов систем, что представляет теоретическую ценность работы.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications"(Германия, Дрезден, 2010), "First Interdisciplinary Workshop of the German-Russian Interdisciplinary Science Center on the Structure and Dynamics of Matter"(Германия, Берлин, 2010), "Science and Progress"в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, 2010), на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (2009 – 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 печатных работах, в том числе в трёх статьях. Статьи [1*,2*] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работе [1*] соавторам принадлежат теоретические результаты по определяющим функционалам для коциклов, свойствам задачи микроволнового нагрева и постановка задачи. В работе [2*] соавторам принадлежат результаты по устойчивости задачи нагрева и постановка задачи. В работах [4*-5*] соавторам принадлежит постановка задачи, диссертанту принадлежат все основные теоретические результаты.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, разбитых на 10 разделов, списка литературы, включающего 47 наименований, изложена на 93 страницах машинописного текста и содержит 6 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе даётся описание двух задач нагрева. Во-первых, рассматривается задача микроволнового нагрева. Приводятся некоторые физические законы, которые описывают генерацию микроволн, возникновение и распространение тепла в материале. Микроволновое излучение описывают уравнения Максвелла, а распространение тепла в материале описывает уравнение теплопроводности. На основании этих законов формулируется начально-краевая задача. Далее эта задача сводится к одномерной по пространственной переменной. Дополнительно предполагается, что возмущения, которые входят в систему в виде граничных условий, почти периодические.

Вторая задача, которая рассматривается в первой главе, описывает проблему индукционного нагрева материалов. В отличие от предыдущей задачи, источником нагрева является приток тепла через часть границы материала. Предполагается, что источник тепла зависит от почти периодической функции.

Во второй главе вводятся понятия почти периодических функций, которые будут использованы в работе.

Множество $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует такой компактный интервал $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, что $(s + \mathcal{K}) \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Функция $f \in C_b(\mathbb{R}\,; E)$ называется *почти периодической по Бору*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{\tau \in \mathbb{R} \mid \sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s+\tau) - f(s)\|_E \leq \varepsilon\}$$

ε – почти периодов относительно плотно в $\mathbb{R}$. Здесь E – заданное банахово пространство. Почти периодические по Бору функции образуют подмножество $CAP(\mathbb{R}\,; E) \subset C_b(\mathbb{R}\,; E)$

Кроме почти периодических по Бору функций в работе рассматриваются *почти периодические функции по Степанову с показателем 2* (коротко S^2 – п.п.), которые вводятся в работе в стандартной форме. Пространство S^2 – п.п. функций со значениями в E обозначим как $S^2(\mathbb{R}; E)$. Заметим, что $CAP(\mathbb{R}; E) \subset S^2(\mathbb{R}; E)$.

Далее даётся введение в теорию коциклов в банаховом пространстве. Вводится для таких коциклов понятие почти периодического интеграла.

Пусть (Q, d) – метрическое пространство, называемое базисным пространством. Пара $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}\,, (Q, d))$, где $\tau^t : Q \to Q$, для любого $t \in \mathbb{R}$, называется *базисным потоком*, если

$$\begin{aligned}&\tau^0 = id_Q,\\ &\tau^t \circ \tau^s = \tau^{t+s}\ \forall t, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Пусть (M, ρ) – линейное метрическое пространство, которое назовем фазовым пространством.

Определение 1. *Пара* $(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}\,, (M, \rho))$, *где* $\varphi^t(q, \cdot) : M \to M$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+, q \in Q$ *называется коциклом над базисным потоком* $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}\,, (Q, d))$, *если*

$$\begin{aligned}&\varphi^0(q, \cdot) = id_M\ \forall q \in Q,\\ &\varphi^{t+s}(q, \cdot) = \varphi^t(\tau^s(q), \varphi^s(q, \cdot))\ \forall q \in Q,\ \forall t, s \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Для краткости коцикл $(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}\,, (M, \rho))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}\,, (Q, d))$ будем обозначать (φ, τ).

Неавтономным множеством будем называть $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ – отображение $Q \to 2^M$. Неавтономное множество называется *ограниченным (замкнутым, компактным)*, если для любого $q \in Q$ множество $Z(q)$ ограничено (замкнуто, компактно) в M.

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *инвариантным*, если для любых $q \in Q$ и $t \geq 0$ выполняется равенство $\varphi^t(q, Z(q)) = Z(\tau^t(q))$.

Введём понятие интеграла для коцикла.

Определение 2. *Неавтономное множество $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ называется почти периодическим интегралом для коцикла (φ, τ), если оно инвариантно относительно коцикла (φ, τ) и является непрерывным почти периодическим отображением $Z : Q \to M$.*

Вводим множество $\mathcal{O}_\varepsilon(u_0) = \{u \in M : \|u - u_0\| < \varepsilon\}$, для любых $u_0 \in M$ и $\varepsilon > 0$.

Определение 3. *Интеграл $Z : Q \to M$ коцикла (φ, τ) называется*

1) равномерно устойчивым относительно $q \in Q$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\varphi^t(q, \mathcal{O}_\delta(Z(q))) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^t(q))),\ t \in \mathbb{R}_+, q \in Q.$$

2) равномерно асимптотически устойчивым относительно $q \in Q$, если он равномерно устойчив и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что

$$\varphi^t(q, \mathcal{O}_{\delta_0}(Z(q))) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^t(q))),\ t \geq t_0, q \in Q.$$

Определим понятие почти периодического коцикла.

Определение 4. *Коцикл $\varphi : \mathbb{R}_+ \times Q \times M \to M$, будем называть почти периодическим, если $\varphi^t(q, u)$ почти периодический по q, где (t, u) из произвольного ограниченного множества.*

Определение 5. *Интеграл Z на Q называется асимптотически почти периодическим, если он является суммой непрерывной почти периодической функции $Z_1(q)$ и непрерывной функции $Z_2(q)$, определённой на Q, которая стремится к нулю $Z(q) = Z_1(q) + Z_2(q)$.*

Основной результат второй главы представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что* (φ, τ) *– почти периодический коцикл на* M*, и пусть* Z *– интеграл на* Q *такой, что множество* $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ *относительно компактно в* M*. Если интеграл* Z *равномерно асимптотически устойчивый, тогда он асимптотически почти периодический.*

Далее в работе для парных уравнений, полученных из уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности, при почти периодическом возмущении показано существование почти периодических решений.

Рассматриваем начально-краевую задачу, которая была получена в рамках моделирования микроволнового нагрева материалов в первой главе

$$w_{tt} = w_{xx} - \sigma(\theta)w_t, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\theta_t = \theta_{xx} + \sigma(\theta)w_t^2, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{2}$$

$$w(0,t) = f_1(t),\ w(1,t) = f_2(t), \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1). \tag{6}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:
(H1) 1) $\sigma(z)$ удовлетворяет условию Липшица на $(0,\infty)$.

2) Существуют константы $0 < \sigma_0 \le \sigma_1$ такие, что $\sigma_0 \le \sigma(z) \le \sigma_1$ для любого $z \ge 0$.
(H2) Функция $\theta_0(x)$ неотрицательна и принадлежит классу $C^2(0,1)$. Выполнены условия согласования второго порядка начальных и краевых данных в точках $(0,0)$ и $(1,0)$. Функции $w_0(x)$, $w_1(x)$ принадлежат классу $C^4(0,1)$ и $f_1(t)$, $f_2(t)$ из класса C^2. Выполнены условия согласования начальных и краевых данных в точках $(0,0)$ и $(1,0)$.

В работе [3] при предположениях **(H1) – (H2)**, система (1) – (6) имеет классическое единственное глобальное решение (w, w_t, θ) на $Q_T = (0,1)\times(0,T)$ для любого $T < \infty$. Более того, $w(x,t) \in C^{3,3}(\bar{Q}_T), \theta(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$.

Введём дополнительные предположения:
(H3) f_1 и f_2 почти периодические по Бору C^2 – гладкие скалярные функции.

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x,t) = (1-x)f_1(t) + xf_2(t)$, $x \in (0,1), t \geq 0$.

(H4) Существует константа $C_1 > 0$ такая, что

$$\sup_{x\in(0,1),t\in\mathbb{R}_+} \{|f_{xt}|, |f_t|, |f_{tt}|\} \leq C_1.$$

(H5) Существует константа $C_2 > 0$ такая, что $|\sigma(z) - \sigma(z^{'})| \leq C_2|z - z^{'}|$, для всех $z, z^{'} \in \mathbb{R}_+$.

На основании предположений (H1)–(H5) доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Система (1) – (6) имеет почти периодическое решение, которое является равномерно асимптотически устойчивым.*

В заключение приводятся численные эксперименты, полученные с использованием пакета Matlab, которые иллюстрируют полученный результат. Рассмотрим систему (1) – (6) со следующими начально-граничными условиями:

$$w(x,0) = p\sin(\pi x),\ x \in (0,1), \tag{7}$$

$$\theta(x,0) = 0,\ x \in (0,1), \tag{8}$$

$$w(0,t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t),\ w(1,t) = 0, t > 0, \tag{9}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0,\ t > 0, \tag{10}$$

где p – параметр из отрезка $[-0.5, 0.5]$.

Тогда, для новых функций, полученных путём замены $W(x,t) = w(x,t) - f(x,t)$, мы получим следующие иллюстрации решений компонентов $\theta^p(x,t)$ и $W^p(x,t)$, которые показаны на рисунках (1) – (2) на странице 11.

В третьей главе мы получаем частотное условие существования почти периодических решений для эволюционных вариационных систем с монотонными нелинейностями.

Пусть $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$ – оснащение вещественного гильбертова пространства $\mathcal{V}_0$, то есть тройка гильбертовых пространств с компактным и непрерывным вложением. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_j}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_j}, j = 1, 0, -1$, скалярное произведение и норму в $\mathcal{V}_j (j = 1, 0, -1)$ соответственно, и через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}$ скобку двойственности между $\mathcal{V}_{-1}$ и $\mathcal{V}_1$. Пусть $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1})$ – линейный

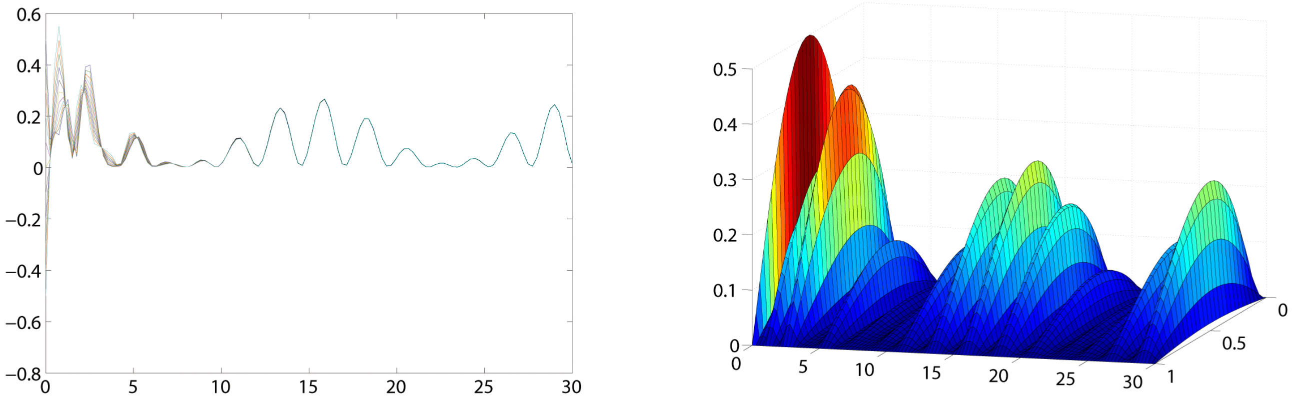

Рис. 1. Температурный профиль $\theta^p(x,t)$ для системы (1)–(10). Слева – проекция при $x = 0.5, t \in (0, 30)$. Справа – одно решение при $p = 0.5, t \in (0, 30)$.

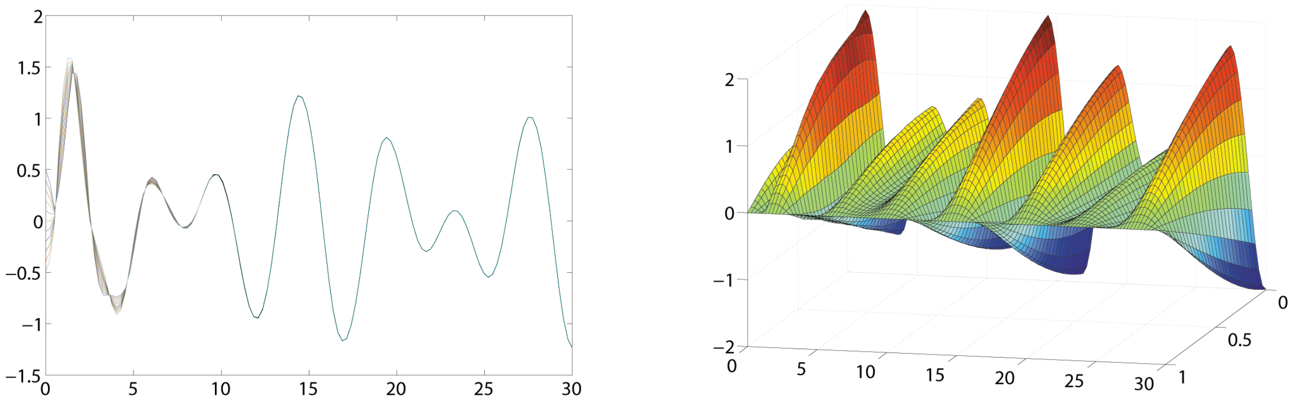

Рис. 2. Компонента $W^p(x,t)$ для системы (1)–(10). Слева – проекция при $x = 0.5, t \in (0, 30)$. Справа – одно решение при $p = 0.5, t \in (0, 30)$.

оператор, $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ – обобщённый вектор, $c_0 \in \mathcal{V}_0$ – вектор и $d_0 < 0$ – число. Мы вводим линейные операторы $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_0, \mathbb{R})$ и $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{-1})$, соответствующие векторам c_0 и b_0 следующим образом: $C_0\nu = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0}$, $\forall\ \nu \in \mathcal{V}_0$, и $B_0\xi := \xi b_0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – две скалярные функции. Наша цель – изучить эволюционную систему управления типа Лурье, которая формально записывается как

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= A_0\nu + b_0[\phi(t, w) + g(t)]\,, \\ \dot{w} &= (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0} + d_0[\phi(t, w) + g(t)]\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем (11) как систему управления в стандартном виде. Для этого рассмотрим гильбертову тройку пространств $Z_1 \subset Z_0 \subset Z_{-1}$, в котором $Z_j := \mathcal{V}_j \times \mathbb{R}$, $j = 1, 0, -1$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{Z_j}$ в Z_j вводится как $\big((\nu_1, w_1), (\nu_2, w_2)\big)_{Z_j} := (\nu_1, \nu_2)_{\mathcal{V}_j} + w_1 w_2$, где $(\nu_1, w_1), (\nu_2, w_2) \in Z_j$ произвольные. Скобка двойственности между Z_{-1} и Z_1, определённая для $(h, \xi) \times \mathcal{V}_{-1} \times \mathbb{R} = Z_{-1}$ и $(\nu, \varsigma) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} = Z_1$, записывается следующим образом: $((h, \xi), (\nu, \varsigma))_{Z_{-1}, Z_1} := (h, \nu)_{\mathcal{V}_{-1}, \mathcal{V}_1} + \xi\, \varsigma$.

Пусть $\hat{b} := \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \in Z_{-1}$ и $\hat{c} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in Z_0$. Предположим, что операторы $\hat{C} \in \mathcal{L}(Z_0, \mathbb{R})$ и $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Z_{-1})$ представлены как

$$\hat{C}z = (\hat{c}, z)_{Z_0}\,, \quad \forall\, z \in Z_0\,, \qquad \hat{B}\xi = \xi\hat{b}\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,$$

и оператор $\hat{A} \in \mathcal{L}(Z_1, Z_{-1})$ определён как

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}\left[\phi(t, w) + g(t)\right],\; w = \hat{C}z\,, \tag{12}$$

эквивалентную (11) при $z = (\nu, w)$. Если выбрать $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$ произвольными, то мы определим норму для измеримых по Бохнеру функций в $L^2(T_1, T_2; Z_j)$, $j = 1, 0, -1$, как

$$\|z\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2} \|z(t)\|^2_{Z_j} dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{W}(T_1, T_2; Z_1, Z_{-1})$ – пространство функций z таких, что $z \in L^2(T_1, T_2; Z_1)$ и $\dot{z} \in L^2(T_1, T_2; Z_{-1})$, с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})} := \left(\|z\|^2_{2,-1} + \|\dot{z}\|^2_{2,-1}\right)^{1/2}.$$

Введём предположения **(A1)** – **(A9)**.

(A1) Для любого $T > 0$ и любой $f = (f_1, f_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{-1} \times \mathbb{R})$ задача

$$\begin{aligned} &\dot{\nu} = A_0\nu + f_1(t)\,, \\ &\dot{w} = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0} + f_2(t)\,, \quad (\nu(0), w(0)) = (\nu_0, w_0) \end{aligned} \tag{13}$$

корректно поставлена, то есть, для произвольных $(\nu_0, w_0) \in Z_0$, $(f_1, f_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{-1} \times \mathbb{R})$ существует единственное решение $(\nu, w) \in \mathcal{W}(0, T; Z_1, Z_{-1})$, удовлетворяющее (13) в вариационном смысле, и которое непрерывно зависит от начальных данных, то есть,

$$\|(\nu,w)\|^2_{\mathcal{W}(0,T;Z_1,Z_{-1})} \le k_{13}\|(\nu_0,w_0)\|^2_{\mathcal{V}_0\times\mathbb{R}} + k_{14}\|(f_1,f_2)\|^2_{2,-1} \,,$$

где $k_{13}>0$ и $k_{14}>0$ некоторые константы.

(A2) Существует $\lambda>0$, такая, что $A_0+\lambda I$ – гурвицев оператор.

(A3) Для любых $T>0, (\nu_0,w_0)\in Z_1\times\mathbb{R}, (\tilde\nu_0,\tilde w_0)\in Z_1\times\mathbb{R}$ и $(f_1,f_2)\in L^2(0,T;\mathcal{V}_1\times\mathbb{R})$ решение прямой задачи (13) и решение смежной задачи

$$\begin{aligned}\dot{\tilde\nu} &= -(A_0^+ + \lambda\, I)\tilde\nu + f_1(t),\\ \dot{\tilde w} &= -C_0^+\tilde w - \lambda\,\tilde w + f_2(t),\end{aligned} \qquad (14)$$

непрерывно по t в сильном смысле по норме пространства $\mathcal{V}_1\times\mathbb{R}$.

(A4) Пара (A_0,b_0) – L^2-управляема, то есть, для произвольного $\nu_0\in\mathcal{V}_0$ существует управление $\alpha(\cdot)\in L^2(0,\infty;\mathbb{R})$ такое, что задача $\dot\nu = A_0\nu + b_0\alpha$, $\nu(0)=\nu_0$ корректно поставлена в вариационном смысле на $(0,\infty)$.

Введём передаточную функцию для тройки $\left(A_0^c,b_0^c,c_0^c\right)$ как

$$\chi(p) = \left(c_0^c, (A_0^c - pI^c)^{-1}\, b_0^c\right)_{Z_0}, \quad p\in\rho(A_0^c).$$

(A5) Предположим, что $\lambda>0$ и $\kappa_1>0$ – параметры, где λ из предположения **(A2)**. Тогда:

$$\lambda d_0 + \operatorname{Re}(-i\omega-\lambda)\chi(i\omega-\lambda) + \kappa_1\,|\,\chi(i\omega-\lambda)-d_0\,|^2 \le 0\,, \quad \forall\,\omega\ge 0.$$

(A6) Функция $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна и $\phi(t,0)=0,\ \forall\, t\in\mathbb{R}$. Функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. Существуют числа $\kappa_1>0$ (из **(A5)**), $0\le\kappa_2<\kappa_3<+\infty, q_1<q_2$ и $\zeta_2<\zeta_1$ такие, что

a) $\quad q_1 < g(t) < q_2\,,$

для почти всех t из произвольного компактного временного интервала;

b) $\quad (\phi(t,w)+q_i)(w-\zeta_i) \le \kappa_1(w-\zeta_i)^2, i=1,2\,,$

для всех $t\in\mathbb{R}$ и $w\in[\zeta_2,\zeta_1]$;

c) $\quad \kappa_2(w_1-w_2)^2 \le (\phi(t,w_1)-\phi(t,w_2))(w_1-w_2) \le \kappa_3(w_1-w_2)^2\,,$

для всех $t\in\mathbb{R}$ и $w_1,w_2\in[\zeta_2,\zeta_1]$.

Функция со свойствами *b)* и *c)* является нелинейностью типа Дуффинга.

(A7) Пространство Z_0 можно разложить $Z_0 = Z_0^+\oplus Z_0^-$ так, что верно следующее:

a) Для каждого $z_0 \in Z_0^+$ мы имеем $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,z_0) = 0$, и для каждого $z_0 \in Z_0^-$ существует единственное решение $z_-(t) = z(t,z_0)$ системы $\dot{z} = \tilde{A}z\,, \quad w = \tilde{C}z\,$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ определены в системе (12), определённое на $(-\infty, 0)$ такое, что $\lim\limits_{t\to-\infty} z_-(t) = 0$ и $\tilde{C}z = 0, \forall\, t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$.

b) Для каждого $z_0 \in Z_0^+$ равенство выполняется тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$, и для каждого $z_0 \in Z_0^-$ равенство $\tilde{C}z = 0, \ \forall\, t \leq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$.

(A8) Вложение $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$ компактно.

(A9) Семейство операторов $\{\hat{\mathcal{A}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}, \hat{\mathcal{A}}(t) : Z_1 \to Z_{-1}$, определённое как $\hat{\mathcal{A}}(t)z := -\hat{A}z - \hat{B}\phi(t, \hat{C}z), \forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in Z_1$, монотонно на участке $\{z \in Z_1 \,|\, \hat{C}z \in [\zeta_2, \zeta_1]\}$, то есть, для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\hat{\mathcal{A}}(t)\eta - \hat{\mathcal{A}}(t)\vartheta, \eta - \vartheta)_{Z_1, Z_{-1}} \geq 0\,, \quad \forall\, \eta, \vartheta \in Z_1$$

таких, что $\hat{C}\eta, \hat{C}\vartheta \in [\zeta_2, \zeta_1]$.

В следующей теореме доказано существование почти периодического решения для эволюционной системы Лурье с нелинейностью типа Дуффинга.

Теорема 3. *Предположим, что для системы (11) выполнены предположения* **(A1)** – **(A9)** *и дополнительные условия:*

(i) Оператор $\begin{bmatrix} A_0 & \kappa_2 B_0 \\ C_0 & \kappa_2 d_0 \end{bmatrix}$ *из* $\mathcal{L}(Z_1, Z_{-1})$ *гурвицев ;*

(ii)

$$\frac{1}{\kappa_3 - \kappa_2} + \operatorname{Re} \frac{\chi(i\omega) - d_0}{i\omega + \kappa_2(\chi(i\omega) - d_0)} > 0, \ \forall\, \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Тогда верно:

a) Для любого $g \in BS^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ система (11) имеет единственное решение (ν_*, w_*) внутри $\mathcal{G}$, которое удовлетворяет $(\nu_*, w_*) \in C_b(\mathbb{R}\,; \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}) \cap BS^2(\mathbb{R}; \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R})$, и это решение экспоненциально устойчиво внутри $\mathcal{G}$.

b) Пусть семейства функций $\{\phi(\cdot, w) \,|\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\}$ и $\{\tilde{\phi}(\cdot, w) \,|\, w \in \mathcal{S}\}$, где $\tilde{\phi}$ из предположения **(A9)** *и $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ – произвольный ограниченный интервал, равномерно почти периодические по Бору. Тогда для любого S^2 – п.п.*

возмущения g существует единственное в $\mathcal{G}$ ограниченное и экспоненциально устойчивое решение (ν_*, w_*), которое является почти периодическим по Бору.

В конце третьей главы мы приводим условия существования почти периодических решений для задачи индукционного нагрева в одномерном случае. Рассматриваем систему, полученную в первой главе. Данную систему можно рассматривать как простейшую одномерную модель ядерного реактора [5].

$$\theta_t = \delta_1\theta_{xx} - \delta_2\theta, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{15}$$

$$\theta_{x_{|x=1}} = 0, \theta_{x_{|x=1}} = \delta_3[\phi(t,w) + g(t)], \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{16}$$

$$\dot{w} = \int_0^1 \theta(x,t)k(x)dx + \delta_4[\phi(t,w) + g(t)], \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{17}$$

$$\phi(t,w) = w - \delta_5 w^3, \qquad t > 0, \tag{18}$$

где $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 \in \mathbb{R}, \delta_4 < 0, \delta_5 \geq 0$, $k(x)$ – некоторая непрерывная скалярная неотрицательная функция, $g(t)$ – почти периодическая скалярная функция, $\phi(t,w)$ – гладкая почти периодическая по t функция, которая для любого $t \in \mathbb{R}$ и любого $w \in [\zeta_2, \zeta_1]$ удовлетворяет неравенствам

$$(\phi(t,w) + q_i)(w - \zeta_i) \leq \kappa_1(w - \zeta_i)^2, i = 1, 2$$

и

$$\kappa_2(w_1 - w_2)^2 \leq (\phi(t,w_1) - \phi(t,w_2))(w_1 - w_2) \leq \kappa_3(w_1 - w_2)^2,$$

где $\kappa_1 > 0$, $0 \leq \kappa_2 < \kappa_3 < +\infty$, $q_1 < q_2$ и $\zeta_2 < \zeta_1$.

Пусть для простоты $k(x) \equiv 1, \delta_3 = 1, \delta_4 = -1$,

$$|g(t)| < \frac{2}{3\sqrt{3\delta_5}},\ t \in \mathbb{R}, \qquad \kappa_2 = \phi^{'}(\zeta_1) \text{ и } \kappa_3 = 1, \delta_2^2 \geq 4\kappa_1.$$

Тогда из теоремы 3 вытекает, что система (15) – (17) имеет ровно одно экспоненциально устойчивое почти периодическое по Бору решение.

Список цитируемой литературы

1. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально операторных уравнений // Известия АН СССР. Серия Математическая. Киев Наукова думка. 1985. С. 180.

2. Dafermos C. M. Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations // Defense Technical Information Center. 1976. P. 43-57

3. Morgan J., Yin H.-M. On Maxwell's system with a thermal effect // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2001. Vol. 1. P. 485-494.

4. Hino Y., Murakami S. Almost periodic processes and the existence of almost periodic solutions // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 1998. № 3. P. 1-19.

5. Wexler D. Frequency domain stability for a class of equations arising in reactor dynamics // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10. № 1. P. 118–138.

Публикации автора по теме диссертации

1*. Ermakov I. V., Kalinin Yu. N., Reitmann V. Determining modes and almost periodic integrals for cocycles // Differential Equations. 2011. Vol. 47. № 13. P. 1837-1852.

2*. Kalinin Y., Reitmann V., Yumaguzin, N. Asymptotic behaviour of Maxwell's equation in one-space dimension with thermal effect // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Supplement 2011. 2011. Vol. 2. P. 754-762.

3*. Kalinin Y. Almost-periodic temperature fields in the microwave heating problem / Book of abstracts of G-RISC International Student's Conference "Science and Progress 2011". Saint-Petersburg, Russia. 2011. P. 136.

4*. Kalinin Yu. N., Reitmann V. Frequency domain conditions for the existence of almost-periodic solutions in coupled PDEs / Abstracts of "The 8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications". 2010. Dresden, Germany. P. 323.

5*. Kalinin Yu. N., Reitmann V. Almost periodic solutions in control systems with monotone nonlinearities // Differential equations and control processes. 2012. № 4. P. 40-68.