САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАВРИЛОВ Дмитрий Николаевич

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ЗЕГЖДА Сергей Андреевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ГРЕКОВ Михаил Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела)
	кандидат физико-математических наук, доцент ЕРШОВА Зинаида Георгиевна (Тутаевский филиал «Рыбинского государственного авиационного технического университета им. П.А. Соловьева», доцент кафедры теоретической механики)
Ведущая организация:	Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова.

Защита состоится "____"____________ 2013 г. в ________ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "____"____________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук — Кустова Е.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Нахождение силы, осуществляющей перевод системы из одного заданного состояние в другое заданное состояние, является одной из важнейших задач теории управления. В частном случае, когда система переходит из состояния покоя в состояние покоя, говорят о задаче гашения колебаний. Эта задача является актуальной как для механических систем, состоящих из абсолютно твердых тел, так и из упругих тел. При этом для упругих механических систем необходимо выбирать такой метод исследования, который позволяет решить задачу гашения колебаний чрезмерно не усложняя ее.

Среди многочисленных методов, позволяющих решать такие задачи, необходимо выделить принцип максимума Понтрягина и теорию локальных экстремумов, изложенную Ф.Л. Черноусько в книге [1]. К важнейшим методам управляемых процессов можно отнести и метод динамического программирования, предложенный Р. Беллманом и развитый им в дальнейшем совместно с его учениками в целом ряде более поздних монографий.

Задача о гашении колебаний тележки с маятниками при ее перемещении за заданное время на заданное расстояние была поставлена и решена на основе принципа максимума Понтрягина в монографии [2]. Отметим, что полученное решение представляется в виде суммы гармоник по собственным частотам системы, что при длительных временах движения вызывает раскачку системы.

Гашение колебаний консоли постоянного сечения при перемещении ее основания за заданное время на заданное расстояние при использовании интегродифференциальных соотношений рассмотрено в работе [3]. Оптимальное управление, которым в данной задаче является ускорение основания консоли, искалось в виде ряда по времени, а определялось из условия минимальности полной энергии упругого стержня в момент остановки основания. Эти идеи были глубоко проанализированы в статье [4] и в монографии [5], где эта же задача была решена с использованием уравнения Лагранжа второго рода. В них показывается, что выбор управления на основании принципа максимума Понтрягина соответствует наложению на движение системы неголономной связи высокого порядка. Используя это, удалось показать, что представление решения в виде ряда по времени вытекает из обобщенного принципа Гаусса. Оказалось, что такое представление управления приводит к более плавному движению, чем управление, построенное на основании принципа максимума Понтрягина. Этот подход к выбору оптимального управления был проанализирован и развит в статье [6].

В работах [4, 5, 6] показывается, что задача нахождения оптимального управления при гашении n первых форм колебаний консоли постоянного сечения сводится к системе линейных алгебраических уравнений порядка $2n+2$.

В данной диссертации предлагается другой способ определения оптимального управления. Этот способ основан на использовании специальной системы функций и позволяет найти решение задачи из системы линейных алгебраических уравнений порядка n в аналитической форме.

Цель работы. Исследовать задачу гашения колебаний для различных механических систем с использованием обобщенного принципа Гаусса.

Методы исследования. В работе использованы современные аналитические методы, разработанные на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ. Численные эксперименты осуществлялись с помощью математического пакета Mathematica.

Научная новизна. Задача о гашении колебаний консоли поставлена при учете переменности поперечного сечения. Построена аналогия с задачей о гашении колебаний соосных маятников. Предложен новый метод, основанный на введении базисных функций. Он позволил обнаружить существование особых точек и построить решение, не имеющее таких точек, в аналитической форме.

Теоретическая и практическая ценность. В работе предлагается новый метод отыскания управления для задачи гашения колебаний механических систем. Это позволило исследовать данную задачу для любых значений ее параметров и обнаружить их особые значения, соответствующие особым точкам задачи, для которых управление неограниченно возрастает. Предлагается способ построения оптимального управления для любых значений параметров. Предложенный метод может быть использован для решения реальных прикладных задач управления колебаниями механических систем.

Основные результаты выносимые на защиту.

1. Показано, что математическая модель задачи о гашении конечного числа собственных форм колебаний упругой консоли переменного сечения при кинематическом перемещении ее основания эквивалентна модели гашения колебаний конечного числа соосных математических маятников, ось которых перемещается так же как основание консоли.

2. Введены в рассмотрение базисные функции порядка $m, m = \overline{0, \infty}$. Они построены на основании обобщенного принципа Гаусса порядка $2m + 2$.

3. Показано, что управление, обеспечивающее гашение n форм колебаний упругого тела в конечный момент времени, может быть представлено в виде ряда по базисным функциям, число членов которого равно $n + 1$. Коэффициенты этого ряда являются аналитическими функциями параметра λ, равного отношению времени перемещения к периоду первой формы колебаний.

4. Выяснилось, что управление, обеспечивающее гашение колебаний консоли для любого числа гасимых форм n, имеет счетное множество особых

значений λ, при приближении к которым это управление неограниченно возрастает.

5. Показано, что управление представленное в виде

$$u(t,\lambda) = u_1(t,\lambda) + \mu(u_2(t,\lambda) - u_1(t,\lambda)),$$

где $u_1(t,\lambda)$ и $u_2(t,\lambda)$ — управления построенные в виде рядов, обеспечивающих гашение n первых форм собственных колебаний и начинающихся соответственно с первой и второй базисных функций, не будет иметь особых точек, если параметр μ выбран из условия минимальности функционала $\int\limits_0^\tau u^2(t,\lambda)dt$. Здесь τ — время перемещения.

Апробация работы. Полученные результаты были представлены автором на следующих конференциях: Международная научная конференция по механике «Пятые Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 года, 10. Magdeburger Maschinenbau-Tage, Magdeburg, Germany, 27–29 September 2011, Седьмой международный симпозиум по классической и небесной механике (CCMECH7), Москва (Россия) – Седльце (Польша), 17–28 октября 2011 года, Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 31.01–3.02.2012, Международная конференция «Восьмые Окуневские чтения», Санкт-Петербург, 25–28 июня 2013 года.

Результаты докладывались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механике СПбГУ (2011-2012 гг.), а также на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС «Компьютерные методы в механике сплошной среды» (Computer Methods in Continuum Mechanics) (2010 г.).

Публикации. По теме диссертации имеется 7 публикаций, в том числе 1 статья в журнале рекомендованном ВАК и 1 статья в сборнике международной конференции. В совместных работах соавтору принадлежит постановка задачи и метод решения, автору принадлежит реализация предложенного метода и результаты расчетов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух частей, заключения и списка литературы, насчитывающего 43 наименования. Работа изложена на 86 страницах, иллюстрирована 24 рисунками и содержит 14 таблиц.

Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, кратко изложена история изучения вопроса о гашении колебаний механических систем, сформулированы цель и задачи исследования, показана научная новизна, практическая значимость и сформулированы основные положения вы-

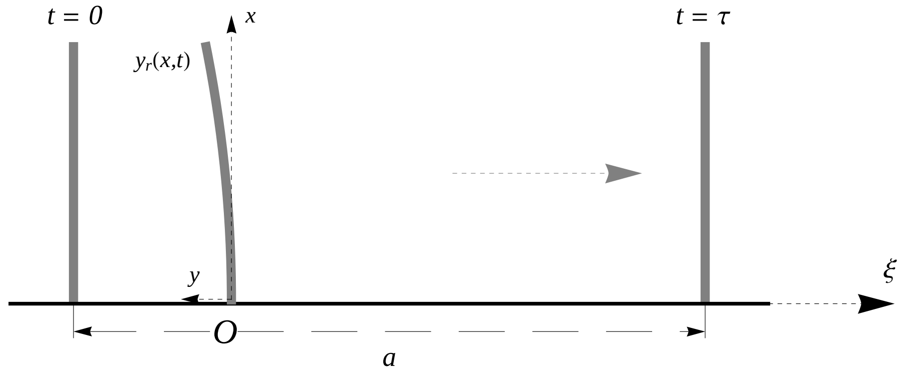

Рис. 1: Перемещение консоли на расстояние a

носимые на защиту. В конце введения приводится краткое содержание диссертации по главам.

Первая часть работы посвящена задаче гашения колебаний механических систем. В ней рассматривается задача гашения колебаний однородной консоли переменного сечения при прямолинейном перемещении ее основания по направлению перпендикулярному ее оси. Требуется определить по какому закону должно изменяться ускорение основания консоли, неподвижной в начальный момент, для того, чтобы за заданное время основание консоли переместилось прямолинейно на заданное расстояние, и в момент остановки основания поперечные колебания консоли отсутствовали бы. При решении данной задачи использовалось несколько подходов. Каждому из них посвящена отдельная глава.

В первой главе рассматривается классическая постановка задачи о гашении колебаний, состоящая в построении системы уравнений, описывающей движение системы, и записи начальных и конечных условий, соответствующих состоянию покоя. Для построения этой математической модели однородной консоли при ее прямолинейном перемещении на заданное расстояние a за заданное время τ предлагается использовать обобщенные лагранжевы координаты. Это позволяет, как было показано в работах [4, 5], получить для консоли постоянного сечения явное представление уравнений движения в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка, число которых на единицу больше, чем число учитываемых собственных форм колебаний. В диссертации предложенный подход обобщается на случай консоли переменного поперечного сечения.

Для описания движения консоли вводятся две декартовы системы координат: неподвижная, центр которой совпадает с начальным положением основания консоли, одна ее ось совпадает со срединной линией консоли, а вторая с направлением ее перемещения; и система координат жестко связанная с консолью (см. рис. 1).

Прогиб консоли в обобщенных лагранжевых координатах может быть представлен в следующем виде:

$$y_r(x,t)=\sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma(t)X_\sigma(x),$$

здесь q_σ — обобщенные лагранжевы координаты, X_σ — собственные формы консоли.

Переменное сечение вводится через непрерывные безразмерные функции $A(\zeta), B(\zeta)$:

$$S(x)=A(\zeta)S(l)\,,\quad J(x)=B(\zeta)J(l)\,,\quad \zeta=\frac{x}{l}\,,\quad 0\leqslant\zeta\leqslant 1\,. \tag{1}$$

Здесь l — длина консоли, $S(l), J(l)$ — соответственно площадь и момент инерции характерного сечения консоли. В данной работы было рассмотрено три формы консоли: постоянного сечения, сечения в форме клина и сечения в форме конуса.

Кинетическая энергия, потенциальная энергия и полная энергия колебаний консоли, согласно [5], могут быть представлены в виде:

$$\begin{gathered} T_r=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{M_\sigma\dot{q}_\sigma^2}{2},\quad \Pi=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{M_\sigma\omega_\sigma^2}{2}q_\sigma^2, \\ E=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{mA_\sigma^2}{2}\left(\dot{q}_\sigma^2+\omega_\sigma^2 q_\sigma^2\right), \end{gathered} \tag{2}$$

здесь M_σ — приведенные массы, которые могут быть найдены по следующим формулам:

$$M_\sigma=\int\limits_0^l \rho S(x)X_\sigma^2\,dx=mA_\sigma^2,\quad A_\sigma^2=\frac{\int\limits_0^l A(\zeta)X_\sigma^2(x)\,dx}{\int\limits_0^l A(\zeta)\,dx},$$

где m — это масса консоли.

Абсолютное перемещение заданного поперечного сечения x консоли таково

$$y_a(x,t)=\xi(t)+y_r(x,t).$$

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_\sigma+\omega_\sigma^2 q_\sigma=-\frac{a_\sigma}{A_\sigma^2}\ddot{\xi},\quad \sigma=\overline{1,\infty},\quad a_\sigma=\frac{\int\limits_0^l A(\zeta)X_\sigma(x)\,dx}{\int\limits_0^l A(\zeta)\,dx}. \tag{3}$$

В монографии [5] показывается, что ряды для кинетической и потенциальной энергий (2) быстро сходятся, поэтому при построении математической модели можно ограничиться рассмотрением задачи о гашении n первых собственных форм колебаний. Результаты полученные в данной диссертации также демонстрируют, что такой подход позволяет решить задачу о гашении колебаний консоли с достаточной точностью.

В этой задаче удобно перейти к безразмерным уравнениям движения. Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$x_0 = \frac{\xi}{l}, \quad x_\sigma = -\frac{A_\sigma^2}{a_\sigma}\frac{q_\sigma}{l}, \quad t_1 = \omega_1 t. \tag{4}$$

Здесь и далее безразмерное время t_1 для простоты будет обозначать просто буквой t, а производную по нему точкой.

Дифференциальные уравнения (3) с начальными и конечными условиями, соответствующими отсутствую колебаний консоли, при перемещении ее основания за безразмерное время $\overline{\tau} = \omega_1\tau$ на заданную безразмерную величину $\overline{a} = a/l$, с учетом замены переменных (4), запишутся в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = u, \\ \ddot{x}_\sigma + \overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \overline{\omega}_\sigma = \left(\dfrac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right), \quad \sigma = \overline{1,n}, \\ x_0(0) = \dot{x}_0(0) = \dot{x}_0(\overline{\tau}) = 0, \quad x_0(\overline{\tau}) = \overline{a}, \\ x_\sigma(0) = \dot{x}_\sigma(0) = x_\sigma(\overline{\tau}) = \dot{x}_\sigma(\overline{\tau}) = 0, \quad \sigma = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Функцию $u(t)$, связанную с ускорением основания консоли $\ddot{\xi}$ соотношением

$$u(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{l}\right) = \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\ddot{\xi}}{l}$$

будем называть искомым управлением.

В данной диссертации система уравнений (5) строиться для случая кинематического перемещения консоли. В статье [7] показывается, что задача о перемещении упругого тела под действием силы может быть сведена к аналогичной системе дифференциальных уравнений.

Система (5) состоит из $n+1$ дифференциального уравнения второго порядка и подчинена $4n+4$ условиям. Эта система будет замкнута, в частности тогда, когда управление $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\overset{(2n+2)}{u} = 0$. Это дифференциальное уравнение, как показано в работах [4, 5], соответствует применению обобщенного принципа Гаусса порядка $2n+2$ к системе (5) и приводит к представлению управления $u(t)$ в виде ряда по времени:

$$u(t) = \sum_{\rho=1}^{2n+2} C_\rho t^{\rho-1}. \tag{6}$$

В статье [4] показывается, что представление управления в виде (6) обеспечивает более плавное движение консоли по сравнению с управлением, получаемым при использовании принципа максимума Понтрягина.

Заметим, что параметр $\overline{a}$ линейно входит в условия для начального и конечного момента времени системы (5). Поэтому и полученное решение будет линейно зависеть от него. Следовательно, без ограничения общности можно считать $\overline{a} = 1$ (то есть $a = l$).

Отметим еще одну особенность системы (5), для этого рассмотрим задачу гашения первой собственной частоты. В этом случае $n = 1$ и $\overline{\omega}_1 = 1$. То есть безразмерный закон управления $u(t)$ для задачи гашения первой собственной частоты ($n = 1$) одинаков для консоли любого поперечного сечения. Если $n > 1$, то для получения управления необходимо задать отношения частот $\overline{\omega}_\sigma = \omega_\sigma/\omega_1, \sigma = \overline{1,n}$. То есть переменность поперечного сечения учитывается только заданием соответствующего спектра собственных частот.

Единственным параметром задачи от которого решение зависит не линейно при заданном числе n и спектре собственных частот $\omega_\sigma, \sigma = \overline{1,n}$, является время движения $\overline{\tau}$. Удобно ввести безразмерный параметр $\lambda = \tau/T_1$, где T_1 — период первой формы колебания. Отсюда следует, что $\overline{\tau} = 2\pi\lambda$. Именно параметр λ является ключевым в задачи исследования колебаний консоли.

Система дифференциальных уравнений (5) эквивалентна системе дифференциальных уравнений описывающей колебания соосных математических маятников при перемещении их общей оси.

Действительно для механической системы, состоящей из n математических маятников, подвешенных на одной горизонтальной оси и колеблющихся в параллельных плоскостях, при малых углах поворота $\varphi_\sigma, \sigma = \overline{1,n}$, получим следующее выражение для полной энергии

$$E = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{m_\sigma l_\sigma^2}{2} \left(\dot{\varphi}_\sigma^2 + \frac{g}{l_\sigma} \varphi_\sigma^2 \right). \tag{7}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, m_σ и l_σ, $\sigma = \overline{1,n}$, — соответственно массы и длины маятников. При горизонтальном перемещении $\xi(t)$ оси маятников они будут колебаться по закону

$$l_\sigma(\ddot{\varphi}_\sigma + \frac{g}{l_\sigma}\varphi_\sigma) = -\ddot{\xi}, \quad \sigma = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) приведутся соответственно к виду (2) и (3), если малые углы поворота маятников, их массы и длины таковы:

$$\varphi_\sigma = \frac{A_\sigma^2}{a_\sigma l_\sigma} q_\sigma, \quad m_\sigma = \frac{m a_\sigma^2}{A_\sigma^2}, \quad l_\sigma = \frac{g}{\omega_\sigma^2}, \quad \sigma = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Таким образом, математическое описание тех колебаний упругого тела, которые возникают при его кинематическом перемещении, сводится к описанию колебаний системы соосных маятников при горизонтальном перемещении их общей оси. Число маятников равно числу учитываемых собственных форм колебаний упругого тела.

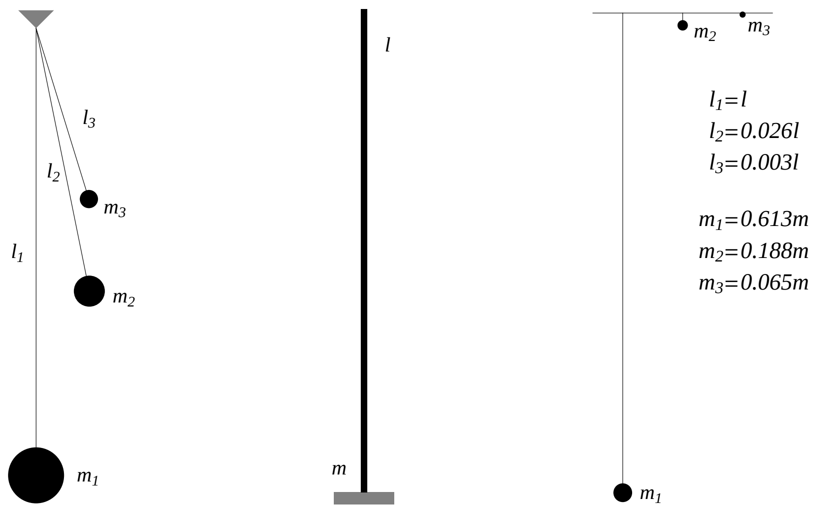

Рис. 2: Система соосных маятников и ее аналогия с гашением поперечных колебаний консоли постоянного поперечного сечения

Существо изучаемой проблемы о гашении колебаний упругого тела при его кинематическом перемещении наглядно выражено в модели с маятниками. Обе задачи приводят к эквивалентным системам дифференциальных уравнений, что позволяет рассматривать их в рамках одной математической модели. Из формулы (9) следует, что длины маятников убывают так, как убывают квадраты периодов собственных колебаний упругого тела, то есть достаточно быстро. Массы также убывают и степень их убывания определяется степенью убывания величины a_σ^2, так как постоянные A_σ^2 при $\sigma \to \infty$ стремятся к постоянному значению. При изгибных и при продольных колебаниях стержней как постоянного, так и переменного сечений асимптотика убывания квадрата периода собственных колебаний характеризуется убыванием соответственно величин $(2\sigma - 1)^{-4}$ и $(2\sigma - 1)^{-2}$. Различие в степени убывания, как видим, большое. Поэтому в качестве примера и были определены постоянные, входящие в формулы (9) для двух характерных задач: при перемещении заделанного конца стержня постоянного поперечного сечения соответственно перпендикулярно и вдоль его оси. При этом были получены следующие законы убывания масс и длин маятников:

— в случае поперечных колебаний (см. рис. 2)

$$l_2 = \frac{l_1}{39}, \quad l_3 = \frac{l_1}{308}, \quad \ldots$$
$$m_1 = 0.613m, \quad m_2 = 0.188m, \quad m_3 = 0.065m, \quad \ldots \quad ,$$

— в случае продольных колебаний

$$l_\sigma = \frac{l}{(2\sigma - 1)^2}, \quad m_\sigma = \frac{8m}{\pi^2(2\sigma - 1)^2}.$$

Быстрое убывание длин маятников и их масс, показанное на примере двух характерных задач, говорит о том, что при вычислении по формуле (2) той энергии, которая возбуждается в упругом теле при его кинематическом перемещении, можно ограничиться малым числом n. Отметим, что ортогональность собственных форм колебаний упругого тела в модели проявляется в том, что маятники соосны и каждый из них при неподвижной оси колеблется независимо от всех остальных. Когда же ось маятников начнет горизонтально перемещаться, тогда и все маятники придут в движение.

Наряду с обычной постановкой задачи о гашении колебаний предлагается рассматривать расширенную постановку, в которой на управление накладываются дополнительные условия. Будем говорить, что поставлена расширенная задача m-го порядка, если система уравнений (5) дополнена m условиями

$$\overset{(k+1)}{x_0}(0) = \overset{(k+1)}{x_0}(\overline{\tau}) = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Нулевой порядок соответствует системе (5). Заметим, что решение расширенной задачи для любого $m > 0$ будет удовлетворять системе (5).

Показывается, что рассматриваемая задача обладает свойством обратимости:

$$\begin{aligned} &u(t) = -u(\overline{\tau} - t), \\ &x_0(t) = \overline{a} - x_0(\overline{\tau} - t), \\ &x_\sigma(t) = -x_\sigma(\overline{\tau} - t), \quad \sigma = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Это позволяет предложить специальную форму полинома (6) для $u(t)$

$$u(t) = \sum_{\rho=1}^{n+1} C_\rho \left(t - \frac{\overline{\tau}}{2}\right)^{2\rho-1},$$

где как и раньше число n равно количеству гасимых собственных форм. Коэффициенты C_ρ находятся из $n+1$ условия в момент $t = \overline{\tau}/2$:

$$x_0\left(\frac{\overline{\tau}}{2}\right) = \frac{\overline{a}}{2}, \quad x_\sigma\left(\frac{\overline{\tau}}{2}\right) = 0, \quad \sigma = \overline{1,n}.$$

Таким образом, удается снизить порядок системы линейных алгебраических уравнений в 2 раза.

Во второй главе задача гашения колебаний однородной консоли переменного сечения, сформулированная в первой главе, рассматривается с энергетической точки зрения. В ней используется подход, предложенный в статье [3], в которой задача гашения решалась как задача минимизации полной энергии колебаний в конечный момент времени методом интегродифференциальных соотношений. В данной диссертации предлагается использовать метод минимизации полной энергии колебаний с использование обобщенных лагранжевых координат. Для этого необходимо ввести удобные энергетические характеристики движения.

Полная энергия колебаний консоли приведена в выражении (2). Однако удобнее рассматривать относительную величину энергии колебаний, сравни-

Таблица 1: Энергия колебаний $E_n(\tau)$ при гашении первой формы колебаний и при минимизации по двум параметрам

$n=1$	Расширенные условия $m=1$		Обычные условия $m=0$	
λ	Гашение	Минимизация	Гашение	Минимизация
0.6	$0.706 \cdot 10^{-2}$	$0.706 \cdot 10^{-2}$	1.758	2.527
1.0	$0.969 \cdot 10^{-2}$	$0.977 \cdot 10^{-2}$	$0.163 \cdot 10^{-1}$	$0.168 \cdot 10^{-1}$
1.5	$0.267 \cdot 10^{-3}$	$0.272 \cdot 10^{-3}$	$0.256 \cdot 10^{-3}$	$0.256 \cdot 10^{-3}$
2.0	$0.724 \cdot 10^{-5}$	$0.724 \cdot 10^{-5}$	$0.185 \cdot 10^{-3}$	$0.184 \cdot 10^{-3}$

вая ее значение с максимальной величиной кинетической энергии T_* абсолютно твердой консоли. Эта относительная величина с учетом замены переменных (4) имеет следующий вид:

$$E_n(t) = \frac{T_r + \Pi}{T_*} = \frac{1}{v_m^2} \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2), \quad T_* = \frac{m v_{\max}}{2}. \tag{11}$$

Здесь v_m — безразмерная величина максимальной скорости $v_{\max}$ консоли как абсолютно твердого тела. Во всех расчетах полагалось, что $N = 10$, а количество параметров минимизации $s \leqslant N$. Численный эксперимент по решению задачи (5) с заменой условий в момент $t = \overline{\tau}$ на условия минимальности функционала $E_n(\overline{\tau})$ показал, что если количество параметров минимизации s — четное число, то минимизация по s параметрам будет эквивалентна минимизации по $s+1$ параметру. При этом дополнительный параметр обратиться нуль. Таким образом, минимизировать нечетное число параметров s не имеет смысла.

Введение в рассмотрение энергетической характеристики движения $E_n(t)$ (11) позволило не только решить задачу на основании метода предложенного в работе [3], но и исследовать качество управлений $u(t)$ получаемых в рамках классической модели гашения колебаний. Оказалось, что управления $u(t)$, получаемые при минимизации по $2n$ параметрам, совпадают с управлениями, получаемыми при гашении первых n форм колебаний, практически для любых $\lambda = \tau/T_1 > 0.8$. Таким образом, численный эксперимент подтвердил предположения о малом вкладе высших форм колебаний, наглядно демонстрируемый моделью с соосными маятниками. Полученные результаты приводятся в таблице 1.

Численное исследование влияния дополнительных условий (10) подтвердило гипотезу о улучшении управления $u(t)$ за счет уменьшения вклада высших частот (см. таблицу 1).

В третьей главе предлагается новый подход к решению задачи гашения колебаний. В ней задача решается с помощью базисных функций.

При построении базисных функций и при их применении целесообразно использовать другие безразмерные переменные, которые связаны с безразмерными переменными (4) следующим образом:

$$t_2 = \frac{t_1}{\tau\omega_1} = \frac{t}{\tau}, \quad y_0 = \frac{x_0}{\overline{a}} = \frac{q_0}{a}, \quad y_\sigma = \frac{x_\sigma}{\overline{a}} = \frac{q_\sigma}{a}, \quad \sigma = \overline{1, n}, \quad u_1 = \frac{\tau^2\omega_1^2}{\overline{a}} u.$$

Для простоты новое безразмерное время t_2 будем обозначать буквой t, а у нового безразмерного управления $u_1(t)$ нижний индекс будем опускать и называть его искомым управлением.

Система уравнений (5) запишется при этом в виде

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = u, \\ \ddot{y}_\sigma + k_\sigma^2 y_\sigma = u, \quad k_\sigma = \omega_\sigma \tau, \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ y_0(0) = 0, y_0(1) = 1, \dot{y}_0(0) = \dot{y}_0(1) = 0, \\ y_\sigma(0) = \dot{y}_\sigma(0) = y_\sigma(1) = \dot{y}_\sigma(1) = 0, \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда консоль является абсолютно твердой ($n = 0$), и рассматривается перемещение ее основания. И пусть наряду с условиями для y_0 из системы (12) ставятся дополнительные граничные условия (10), то есть формулируется следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \ddot{z}_m = w_m, \quad z_m(0) = \dot{z}_m(0) = ... = \overset{(m+1)}{z_m}(0) = 0, \\ z_m(1) = 1, \dot{z}_m(1) = ... = \overset{(m+1)}{z_m}(1) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Единственное решение для искомого управления w_m получим, потребовав, чтобы функционал

$$I_m = \int\limits_0^1 \left(\overset{(2m+2)}{z_m} \right)^2 dt \tag{14}$$

был минимален.

В силу нулевых начальных условий для функций $z_m(t)$ имеет

$$z_m(t) = \int\limits_0^t w_m(t_*)(t - t_*)dt_*. \tag{15}$$

При $m = 0$, когда $I_0 = \int\limits_0^1 (\ddot{z}_0)^2 dt = \int\limits_0^1 w_0^2 dt$, придем к уравнению

$$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{z_0} = \ddot{w}_0 = 0,$$

которое, как показывается в работах [4, 5], соответствует применению обобщенного принципа Гаусса второго порядка. Отсюда следует, что управление $w_0(t)$ является полиномом первой степени. Используя выражения (13) и (15), получаем

$$w_0(t) = 12 \left(\frac{1}{2} - t \right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

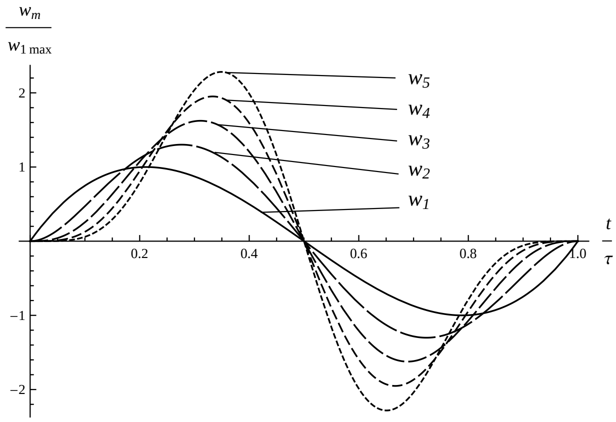

Рис. 3: Базисные функции

Аналогично записывая функционал (14) в виде $I_m = \int\limits_0^1 (\ddot{\eta})^2\,dt$, $\ddot{\eta} = \overset{(2m)}{w_m}$, будем иметь

$$\overset{(2m+2)}{w_m} = 0.$$

Управление $w_m(t)$ является, таким образом, полиномом степени $2m+1$. Функция $w_m(t)$, как и функция $w_0(t)$, являются функциями, заданными в интервале $[0,1]$. Они антисимметричны относительно момента времени $t = 1/2$. Из выражений (13) следует, что производные по времени от функции $w_m(t)$ до порядка $(m-1)$ при $t=0$ и $t=1$ равны нулю. Эти условия будут выполнены, если положить

$$w_m(t) = \alpha_m \left(\frac{1}{2} - t\right) t^m (1-t)^m, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad m = 1, 2, ... \tag{16}$$

Постоянную α_m определим из условия $z_m(1) = 1$. Используя выражение (15) и учитывая, что

$$\int\limits_0^1 x^j (1-x)^k dx = \frac{j!k!}{(j+k+1)!},$$

будем иметь

$$\alpha_m = \frac{2(2m+3)!}{m!(m+1)!}.$$

Функции $w_m(t)$, заданные в виде (16), являются искомыми базисными функциями. Их графики приведены на рис. 3.

Заметим, что при умножении функции $w_m(t)$ на некоторую постоянную, этой же постоянной становится равным и безразмерное перемещение оси.

Управление $u(t)$, обеспечивающее решение краевой задачи (12) с дополнительными условиями (10), может быть представлено в виде ряда

$$u_m^{(n)} = w_m(t) + \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho \left(w_{\rho+m}(t) - w_{\rho+m-1}(t)\right), \tag{17}$$

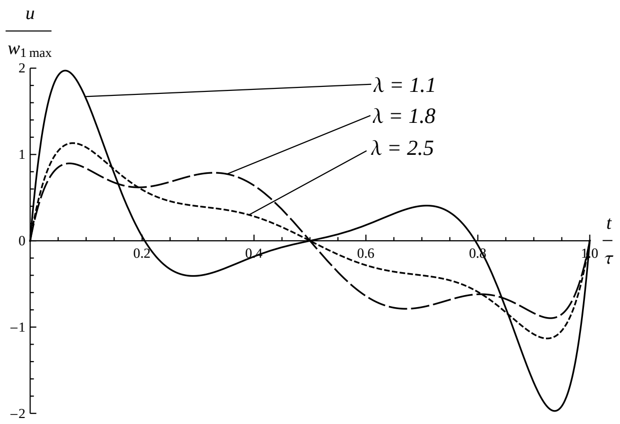

Рис. 4: Управления без особых точек для гашения первой формы колебаний

где постоянные $C_\rho, \rho = \overline{1, n}$ находятся из следующей системы алгебраических уравнений

$$a_{m,\sigma}(\lambda) + \sum_{\rho=1}^{n} \left(a_{\rho+m+1,\sigma}(\lambda) - a_{\rho+m,\sigma}(\lambda)\right) C_\rho = 0, \quad \sigma = \overline{1, n}. \qquad (18)$$

Здесь

$$a_{\rho,\sigma}(\lambda) = \int_0^1 w_\rho(t) \sin\left(2\pi \frac{\omega_\sigma}{\omega_1} \lambda t\right) dt, \quad \lambda = \frac{\tau}{T_1}.$$

Таким образом, решение задачи о гашении n форм колебаний (12) с дополнительными условиями (10) удалось свести к системе линейных алгебраических уравнений порядка n. Единственным параметром от которого зависит решение этой алгебраической системы при заданном n является параметр $\lambda = \tau/T_1$. Оказалось, что система алгебраических уравнений (18) имеет решения не для всех значений λ, так как существует счетное множество таких значений λ, при которых ее определитель обращается в ноль, а постоянные C_ρ стремятся к бесконечности. Эти значения параметра λ являются особыми.

Рассмотрим решения задачи (18) при $m = 1$ и $m = 2$:

$$u_1(t, \lambda) = w_1(t) + \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho(\lambda)(w_{\rho+1}(t) - w_\rho(t)).$$

$$u_2(t, \lambda) = w_2(t) + \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho(\lambda)(w_{\rho+2}(t) - w_{\rho+1}(t)).$$

Существенно то, что особые точки у этих двух решений будут различны, поэтому в качестве управления для задачи гашения n форм колебаний при $m = 1$ вблизи ее особых точек вместо $u_1(t, \lambda)$ можно использовать решение $u_2(t, \lambda)$.

Рассмотрим суперпозицию этих управлений

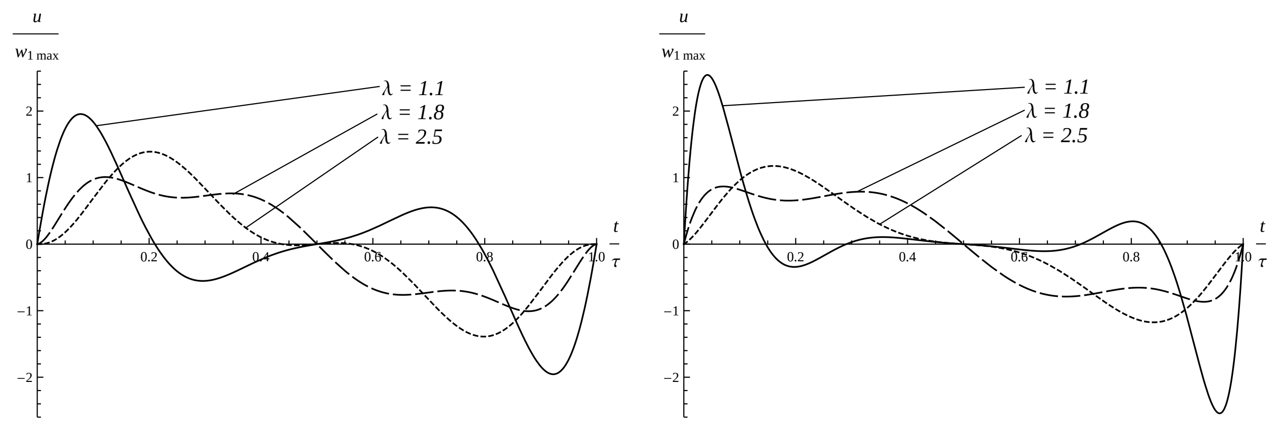

Рис. 5: Управления для гашения первых двух форм колебаний при $\omega_2/\omega_1 = 6.27$ (слева) и при $\omega_2/\omega_1 = 2$ (справа)

$$u(t,\lambda) = u_1(t,\lambda) + \mu(u_2(t,\lambda) - u_1(t,\lambda).$$

Она также является решением краевой задачи (12) с дополнительными условиями $\ddot{y}_0(0) = \ddot{y}_0(1) = 0$ $(m = 1)$ при любом значении параметра μ. Простейшим функционалом, минимизация которого по параметру μ позволяет определить функцию $u(t,\lambda)$, не имеющую особых точек, является функционал

$$J = \int\limits_0^1 u^2(t)dt. \tag{19}$$

Управления, соответствующие его минимизации при гашении только первой формы колебаний $(n = 1)$ для различных значений $\lambda = \tau/T_1$, приведены на рис. 4.

Гашение двух форм $(n = 2)$ также рассматривалось при минимизации функционала (19). Управление в этом случае зависит от отношения ω_2/ω_1. На рис. 5 показано, как с ростом величины $\lambda = \tau/T_1$ изменяется форма управления при гашении двух форм колебаний для отношений $\omega_2/\omega_1 = 6.27$ (соответствует изгибным колебаниям консоли постоянного сечения) и $\omega_2/\omega_1 = 2$ (продольные колебания стержня).

Вторая часть работы посвящена вопросу определения собственных частот и форм для механических систем. В первой части показывается, что использование обобщенных лагранжевых координат, позволяет построить для задачи колебания механических систем математическую модель, которая может приближено описывать реальные системы даже с учетом нескольких первых форм колебаний. Однако данный подход требует априорного знания достаточно точного значения собственных частот и форм колебаний, что для механических систем, состоящих из нескольких упругих тел, само по себе, является сложной задачей. В этой части работы рассматриваются два метода, позволяющие достаточно точно определять низшие частоты колебаний.

Первый метод применяется для определения собственных частот и собственных форм колебаний упругих систем, состоящих из элементов, для которых известны их собственные частоты и формы. В данном методе условия соединения упругих тел рассматриваются как голономные связи. Их реакции, равные множителя Лагранжа, являются силами взаимодействия между телами системы. Также рассматривается приближенный алгоритм определения собственных частот и форм, основанный на квазистатическом учете высших форм элементов системы.

Второй метод основан на рассмотрении реакции как обобщенных лагранжевых координат. Поэтому число степеней свободы оказывается равным количеству связей. Этот квазистатический подход позволяет с высокой точностью определить первую собственную частоту механической системы и при этом не требует знания собственных частот и форм ее элементов.

Данные методы рассматриваются на примере двух механических систем, состоящих из сочлененных между собой упругих стержней. Каждой из этих систем посвящена отдельная глава второй части работы.

В четвертой главе решается задача о нахождении собственных частот для T-образной консоли, которая рассматривается как два упругих стержня, скрепленных между собой. Собственные частоты находятся двумя методами и для разных конфигураций механической системы. Полученные результаты сравниваются.

В пятой главе решается задача о нахождении собственных частот для системы из двух одинаковых стержней переменного сечения, скрепленных под заданным углом. Рассматриваются сечение в форме клина и сечение в форме конуса. Предлагается рассматривать две модели задачи полную, учитывающую поворот системы стержней, и упрощенную за счет свойств симметрии, в которой поворот не учитывается. Для данных моделей строится два решения точное, на основе аналитического решения уравнения колебаний, и приближенное на основании квазистатического метода рассмотрения сил реакций в качестве обобщенных лагранжевых координат. Показывается, что приближенный метод позволяет получить первую собственную частоту для различных конфигурации рассматриваемой системы с высокой точностью.

В заключении перечислены основные результаты диссертации.

Список опубликованных статей автора по теме диссертации

В журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Гаврилов Д.Н., Зегжда С.А.* Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 73–83.

В других изданиях:

2. *Gavrilov D.N.* Problem of oscillation suppression of the cantilever // 10. Magdeburger Maschinenbau-Tage 2011, 27 – 29 September 2011, CD, B5-1. P. 1-8.

3. *Гаврилов Д.Н.* Применение обобщенного принципа Гаусса к задаче га-

шения колебаний // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». Издательство С.-Петербургского университета. 2011. С. 3–14.

4. *Гаврилов Д.Н., Зегжда С.А.* Изгибные колебания свободной системы из двух сопряженных под углом стержней // Международная научная конференция по механике «Пятые Поляховские чтения». 3–6 февраля 2009 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов — СПб, 2009. С. 159.

5. *Gavrilov D.N.* Modeling of forced oscillations of the cantilever by a system of mathematical pendulums // 7-th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH'2011). Book of Abstract, Wydawnietwo Collegium Mazovia, Siedlce, 2011, 29 p.

6. *Гаврилов Д.Н.* Безударное гашение колебаний // Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения». 31 января–3 февраля 2012 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов — М.: Издатель И.В. Балабанов, 2012. С. 219.

7. *Гаврилов Д.Н.* Гашение колебаний консоли переменного поперечного сечения // Международная конференция «Восьмые Окуневские Чтения». 25–28 июня 2013 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов / Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2013. С. 107–108.

Список цитируемой литературы

[1] *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.

[2] *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980, — 384 с.

[3] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений. Доклады академии наук. 2006. Т. 408. №6. С. 750–753.

[4] *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х.* Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. №2. С. 20–25.

[5] *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 344 с.

[6] *Солтаханов Ш.Х.* Гашение колебаний консоли // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. №4. С. 105–112.

[7] *Зегжда С.А., Товстик П.Е., Юшков М.П.* Обобщенный приципп Гамильтона-Остроградского и его применение для гашения колебаний // ДАН, 2012, том 447, №3, с. 1–4.