САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЕРМАКОВ Илья Валерьевич

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ЗАДАЧИ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор РАЙТМАНН Фолькер
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ПИЛЮГИН Сергей Юрьевич (Санкт-Петербургский государственный университет) доктор физико-математических наук, профессор БУРКИН Игорь Михайлович (Тульский государственный университет)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Защита состоится “___” ___________ 2013 г. в __ часов __ минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “____” ___________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Чурин Ю. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации изучаются некоторые свойства определяющих функционалов для задачи микроволнового нагрева материала с одной пространственной переменной. Эта задача описывается системой уравнений гиперболического и параболического типов и имеет неавтономное управляющее воздействие на границе. Разрабатываются элементы теории определяющих функционалов для коциклов и проводится развитие этой теории для коциклов парной структуры специального вида. Доказывается существование конечной системы определяющих функционалов для коцикла, порожденного одномерной задачей микроволнового нагрева.

Актуальность темы. Знание асимптотических свойств задачи микроволнового нагрева полезно для наблюдения за процессом этого нагрева и управления им для обеспечения требуемой температуры. Микроволновый нагрев широко применяется для приготовления пищи, в промышленности, в медицине и в других областях. Он имеет преимущества перед другими видами нагрева, одно из которых – нагрев непосредственно внутренности материала. Важным применением микроволнового нагрева является нагрев керамики в промышленности.

Существование конечного набора определяющих функционалов для задачи – важное свойство, характеризующее ее асимптотику. Определяющими функционалами эволюционного уравнения называются линейные функционалы на пространстве решений, однозначно определяющие асимптотику решений. Частный случай определяющих функционалов – определяющие моды – были введены в работе О. А. Ладыженской [1]. Результаты о существованию определяющих функционалов были получены для многих задач, в том числе двумерной системы Навье-Стокса (C. Foias, [4]) и других.

Определяющие функционалы ранее не изучались в применении к коциклам. Известны результаты построения определяющих функционалов для процессов – частного случая коциклов (J. A. Langa, [6]). Понятие коцикла можно рассматривать как обобщение понятия динамической системы. Для коциклов, в отличие от динамических систем, возможны два вида асимптотики относительно аттрактора – при вытягивании назад (pullback-асимптотика) и вперед (forward-асимптотика). Асимптотика при вытягивании назад в некоторых ситуациях бывает полезна, в частности, при исследовании численных алгоритмов, когда нет сходимости при вытягивании вперед. Возникает необходимость изучать определяющие функционалы для коциклов, учитывая эти виды асимптотики.

Актуальность темы подтверждается также тем, что она входит в число исследований, поддержанных Немецко-Российским научным центром (G-RISC). Диссертант получал поддержку от G-RISC в виде стипендии на месте в течение 6 месяцев (с 1 июля по 31 декабря 2010 г.) и проходил стажировку в Германии в течение месяца (Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Dresden, апрель 2012 г.)

Цель работы. Основной целью работы является исследование вопроса о существовании конечной системы определяющих функционалов для задачи микроволнового нагрева. Другими задачами являются построение теории определяющих функционалов для коциклов, развитие этой теории для коциклов парной структуры, проведение численных экспериментов с такими функционалами.

Методы исследования. В диссертации используются следующие методы исследования:

- Метод расщепления парной задачи с априорными оценками для ее частей.
- Функционалы Ляпунова в виде квадратичных форм с учетом свойств функциональных пространств.
- Операторная интерпретация системы с использованием шкалы соболевских пространств.
- Рассмотрение системы как системы управления и применение частотной теоремы для доказательства диссипативности и существования определяющих функционалов.
- Численное моделирование задачи конечно-разностным методом в Matlab.

Результаты, выносимые на защиту.

- Введены элементы теории определяющих функционалов для коциклов и доказаны достаточные условия существования конечной системы таких функционалов для коциклов в общем гильбертовом пространстве и для коциклов парной структуры на произведении гильбертова и банахова пространств.
- Доказано существование конечной системы определяющих функционалов для коцикла, порожденного одномерной задачей микроволнового нагрева.
- Проведены численные эксперименты с одномерной задачей микроволнового нагрева, иллюстрирующие некоторые свойства определяющих функционалов.

Достоверность результатов. Все полученные аналитические результаты математически строго доказаны. В случае динамических систем результаты сводятся к известным результатам для динамических систем. В случае процессов (частного случая коциклов) результаты совпадают с аналогичными результатами для процессов ([6]). Численное моделирование подтверждает правильность теоретических выводов.

Научная новизна. Понятие определяющих функционалов распространено на теорию коциклов. Впервые рассмотрена и решена проблема построения таких функционалов в задаче микроволнового нагрева.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Введенные элементы теории определяющих функционалов могут быть использованы для исследования различных систем, описывающих неавтономные прикладные задачи.

Полученные результаты для задачи микроволнового нагрева представляют теоретический интерес как пример задачи, коцикл которой имеет конечный набор определяющих функционалов. Ценность полученных результатов для этой задачи усиливается связью данной темы с практикой. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в практическом наблюдении за процессом микроволнового нагрева керамики с целью предсказания температурного профиля и управления процессом нагрева.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "First German-Russian Interdisciplinary Workshop on the Structure and Dynamics of Matter" (Helmholtz Center Berlin, Germany, 2010), "Science and Progress" в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, 2010), Equadiff 2011 (Loughborough, UK, 2011), на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (2009 – 2012). Кроме того, диссертантом был сделад доклад в рамках стажировки в Институте физики сложных систем имени Макса Планка (Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems) на семинаре группы проф. Х. Кантца (Германия, Дрезден, 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 печатных работах, в том числе в 3 статьях. Статьи [1*, 2*] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий.

В работе [1*] соавторам принадлежат исследование почти периодических коциклов и постановка задачи. В работах [2*, 4*] соавтору принадлежит постановка задачи, все результаты получены диссертантом самостоятельно. В работе [1*] диссертанту принадлежат теоретические результаты о существовании глобального B-аттрактора при вытягивании назад для коцикла, порожденного задачей микроволнового нагрева, и результаты в рамках теории определяющих функционалов для коциклов.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы (всего 16 разделов), заключения, списка литературы, включающего 48 наименований. Работа изложена на 105 страницах машинописного текста и содержит 19 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приводятся некоторые сведения о процессе микроволнового нагрева. Описываются применения микроволнового нагрева материала, особенности микроволнового нагрева керамики, конструкция реальных устройств микроволнового нагрева керамики. Делается обзор литературы по микроволновому нагреву керамики. Выводится математическая модель (начально-краевая задача), описывающая микроволновый нагрев материала. Эта модель сводится к одномерной модели по пространственной переменной при определенных предположениях. Демонстрируется применимость одномерной модели к реальному процессу микроволнового нагрева керамики.

Во второй главе исследуются свойства определяющих функционалов задачи микроволнового нагрева. В разделе 2.1 приводятся известные элементы теории коциклов ([5]) и строится коцикл для задачи микроволнового нагрева.

Пусть (Q,d) – метрическое пространство, называемое *базисным пространством*. Пара $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q,d))$, где $\tau^t : Q \to Q$, для любого $t \in \mathbb{R}$, называется *базисным потоком*, если

$$\begin{aligned} &\tau^0 = \mathrm{id}_Q, \\ &\tau^t \circ \tau^s = \tau^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть (M,ρ) – другое метрическое пространство, которое назовем *фазовым пространством.*

Определение 1. *Пара* $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}, (M,\rho))$, *где* $\varphi^t(q,\cdot) : M \to M$ *является отображением для любых* $t \in \mathbb{R}_+, q \in Q$, *называется коциклом над базисным потоком* $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q,d))$, *если*

$$\begin{aligned} &\varphi^0(q,\cdot) = \mathrm{id}_M \quad \forall q \in Q, \\ &\varphi^{t+s}(q,\cdot) = \varphi^t(\tau^s(q), \varphi^s(q,\cdot)) \quad \forall q \in Q,\ \forall t, s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2}$$

Для краткости коцикл $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}, (M,\rho))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q,d))$ будем обозначать (φ,τ).

Коцикл (φ,τ) будем называть *непрерывным*, если отображение $\varphi^t(q,\cdot) : M \to M$ непрерывно для любых $t \in \mathbb{R}_+, q \in Q$.

Неавтономным множеством для коцикла (φ,τ) будем называть семейство $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$, где $Z(q) \subset M$ для любого $q \in Q$. Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *ограниченным (замкнутым, компактным)*, если для любого $q \in Q$ множество $Z(q)$ ограничено (замкнуто, компактно) в M.

Ограниченное неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *глобально B-поглощающим при вытягивании назад* или *глобально B-pullback поглощающим* множеством для коцикла (φ, τ), если для любого $q \in M$ и любого ограниченного множества $B \subset M$ существует $T = T(q, B)$ такое, что $\varphi^t(\tau^{-t}(q), B) \subset Z(q)$ для всех $t \geq T$.

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *глобально B-притягивающим при вытягивании назад* или *глобально B-pullback притягивающим*, если для любого ограниченного множества $B \subset M$ и любого $q \in Q$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(\tau^{-t}(q), B), Z(q)) = 0,$$

где dist -полурасстояние по Хаусдорфу в (M, ρ).

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *глобально B-притягивающим при вытягивании вперед* или *глобально B-forward притягивающим*, если для любого ограниченного множества $B \subset M$ и любого $q \in Q$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(q, B), Z(\tau^t(q))) = 0.$$

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *инвариантным*, если для любых $q \in Q$ и $t \geq 0$ выполняется равенство $\varphi^t(q, Z(q)) = Z(\tau^t(q))$.

Определение 2. *Неавтономное множество называется* глобальным B-аттрактором при вытягивании назад *или* глобальным B-pullback аттрактором *для коцикла (φ, τ), если оно компактно, инвариантно и является глобально B-притягивающим при вытягивании назад.*

Похожим образом определяется и глобальный аттрактор при вытягивании вперед или глобальный B-forward аттрактор, отличие состоит в свойстве глобального B-притяжения при вытягивании вперед.

Для доказательства существования B-аттрактора при вытягивании назад мы будем использовать следующий результат (теорему Клоедена-Шмальфуза).

Теорема 1 ([5]). *Пусть коцикл (φ, τ) имеет компактное глобально B-поглощающее множество при вытягивании назад $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q \in Q}$. Тогда*

(φ, τ) имеет единственный глобальный B-аттрактор при вытягивании назад $\hat{A} = \{A(q)\}_{q \in Q}$, где для любого $q \in Q$

$$A(q) = \cap_{t \in \mathbb{R}_+} \overline{\cup_{s \geq t, s \in \mathbb{R}_+} \varphi^s(\tau^{-s}(q), Z(\tau^{-s}(q))}.$$

Здесь черта обозначает замыкание в M.

Далее в разделе 2.1 приводятся известные факты существования и единственности решения одномерной начально-краевой задачи микроволнового нагрева. Эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\psi_{tt} - \psi_{xx} + \sigma(\theta)\psi_t = 0, && 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ &\theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta)\psi_t^2, && 0 < x < 1, \ \ t > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\psi(0,t) = f_1(t), \psi(1,t) = f_2(t), && t > 0, \\ &\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, && t > 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), && 0 < x < 1, \\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), && 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Физический смысл величин такой: θ – температура, ψ – интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ – электропроводность, f_1, f_2 – внешнее управляющее воздействие на границе.

Далее будут использоваться стандартные соболевские пространства $H^1(0,1), H_0^1(0,1), W_3^2(0,1)$, $W_3^{2,1}((0,1) \times (0,T))$.

Предполагаем, что

(A1.1) σ локально липшицева на $(0, +\infty)$;

(A1.2) Существуют константы $0 < \sigma_0 \leq \sigma_1$ такие, что $\sigma_0 \leq \sigma(z) \leq \sigma_1$ для любого $z > 0$;

(A1.3) σ монотонно убывает на $(0, +\infty)$;

(A2) $\psi_0 \in H^1(0,1), \psi_1 \in L^2(0,1), \theta_0 \in W_3^2(0,1), \theta_0 \geq 0$ почти везде на $(0,1)$;

(A3) $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ и существует константа c такая, что функции $|f_1'|, |f_2'|, |f_1''|, |f_2''|$ ограничены на $\mathbb{R}$ этой константой.

В следующем определении понятие слабого решения, используемое в [7], переносится на одномерный случай задачи микроволнового нагрева.

Определение 3. *Пара функций* $(\psi(x,t),\theta(x,t))$ *называется слабым решением задачи (3)-(5) на* $(0,T)$*, если*

$$\int_0^T\int_0^1 \psi_t\zeta_t+\psi_x\zeta_x dxdt=\int_0^T\int_0^1\sigma(\theta)\psi_t\zeta dxdt+\int_0^1\psi_1(x)\zeta(x,0)dx,$$

$$\int_0^T\int_0^1 -\theta\xi_t+\psi_x\xi_x dxdt=\int_0^T\int_0^1\sigma(\theta)\psi_t^2\xi dxdt+\int_0^1\theta_0(x)\xi(x,0)dx$$

для любых $\zeta,\xi\in H^1(0,T;H^1(0,1))$.

Здесь мы приводим теорему существования глобального слабого решения из [7], модифицированную для одномерного случая.

Теорема 2. *Для любого* $T>0$ *существует единственное слабое решение* $(\psi(x,t),\theta(x,t))$ *для* $t\in(0,T)$ *задачи (3)-(5) , причем* $\psi\in L^\infty(0,T;H^1(0,1))$, $\theta\in W_3^{2,1}((0,1)\times(0,T))$.

Далее задача (3)-(5) сводится к задаче с однородными краевыми условиями. Обозначим $f(x,t)=f_1(t)(1-x)+f_2(t)x$, где $t\geq 0$, $x\in[0,1]$, и сделаем замену $\Psi(x,t)=\psi(x,t)-f(x,t)$.

Получим систему

$$\begin{aligned}&\Psi_{tt}-\Psi_{xx}+\sigma(\theta)\Psi_t=f_{tt}(x,t)-f_t(x,t)\sigma(\theta), && 0<x<1,\ \ t>0,\\ &\theta_t-\theta_{xx}=\sigma(\theta)(\Psi_t+f_t)^2, && 0<x<1,\ \ t>0,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\Psi(0,t)=\Psi(1,t)=0,\quad \theta\left(0,t\right)=\theta\left(1,t\right)=0,\quad t>0,\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\Psi(x,0)=\Psi_0(x)=\psi_0(x)-f(x,0), && 0<x<1,\\ &\Psi_t(x,0)=\Psi_1(x)=\psi_1(x)-f_t(x,0), && 0<x<1,\\ &\theta\left(x,0\right)=\theta_0\left(x\right), && 0<x<1.\end{aligned}\tag{8}$$

С данной заменой предположение (A2) примет вид

(A2') $\Psi_0\in H_0^1(0,1),\Psi_1\in L^2(0,1),\theta_0\in W_3^2(0,1),\theta_0\geq 0$ п.в. на $(0,1)$.

Введем коцикл, соответствующий задаче (6)-(8). Определим пространство $M=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times(W_3^2(0,1)\cap\{\theta:\theta\geq 0 \text{ п.в.}\})$ с нормой

$$\|(\psi,v,\theta)\|_M^2=\|\psi_x\|_{L^2(0,1)}^2+\|v\|_{L^2(0,1)}^2+\|\theta\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Введем $Q = \mathbb{R}$, $\tau^t(s) = t + s$, $\varphi^t(s, u_0) = u(t + s, s, u_0)$, где $u(t, s, u_0) = (\Psi(\cdot, t), \Psi_t(\cdot, t), \theta(\cdot, t))$- решение задачи (6)-(8) такое, что $u(s, s, u_0) = u_0 = (\Psi_0, \Psi_1, \theta_0)$.

Показано, что решение задачи (6)-(8) непрерывно зависит от начальных данных в норме пространства M.

Существование, единственность слабого решения задачи (6)-(8) и непрерывная зависимость решения от начальных данных позволяют нам ввести непрерывный коцикл этой задачи.

Теорема 3. *Система (6)-(8) порождает непрерывный коцикл* $(\{\varphi^t(s, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, s\in\mathbb{R}}, (M, \|\cdot\|_M))$ *над базисным потоком* $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, \mathbb{R})$.

В разделе 2.2 доказывается существование глобального B-аттрактора при вытягивании назад для задачи микроволнового нагрева.

Теорема 4. *Коцикл* (φ, τ)*, порожденный задачей (6)-(8), имеет глобальный B-аттрактор при вытягивании назад.*

Это делается с помощью доказательства существования глобального B-поглощающего множества при вытягивании назад и применения теоремы 1. Для получения такого множества применяются метод расщепления задачи с учетом ее парной структуры и априорные оценки компонент ее решения. Аналогично получено существование глобального B-аттрактора при вытягивании вперед.

Раздел 2.3 посвящен изучению свойств определяющих функционалов для задачи микроволнового нагрева. Сначала строятся элементы общей теории определяющих функционалов для коциклов.

Определение 4. *Множество* $\{l_j\}_{j=1}^N$ *линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве* $(M, \|\cdot\|)$ *называется множеством асимптотически определяющих функционалов при вытягивании назад (pullback-асимптотически определяющих функционалов) для коцикла* $(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{q\in Q, t\in\mathbb{R}_+}, (M, \|\cdot\|))$ *над базисным потоком* $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q, d))$*, если из условия*

$$\lim_{t\to+\infty} \left| l_j(\varphi^t(\tau^{-t}(q), u_1)) - l_j(\varphi^t(\tau^{-t}(q), u_2)) \right| = 0$$

для любых $q \in Q$, $u_1, u_2 \in M$, $j = 1, .., N$ следует

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), u_1) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), u_2) \right\| = 0.$$

Вводится частный случай определяющих функционалов – определяющие моды.

Определение 5. *Определяющими модами для коцикла $(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{q \in Q, t \in \mathbb{R}_+}, (H, \|\cdot\|))$ на гильбертовом пространстве $(H, (\cdot, \cdot))$ называются определяющие функционалы $l_j(\cdot) = (\cdot, e_j)$, где $\{e_j\}_1^N$ – некоторые элементы H.*

Доказывается теорема о достаточных условиях существования определяющих функционалов (в форме определяющих мод) для коциклов в гильбертовом пространстве.

С помощью этой теоремы получен следующий основной результат главы:

Теорема 5. *Коцикл (φ, τ), порожденный задачей (6)-(8), имеет конечное число определяющих мод при вытягивании назад.*

Аналогичные результаты получены и для определяющих функционалов при вытягивании вперед.

Третья глава посвящена применению частотного метода для получения свойств диссипативности и определяющих функционалов задачи микроволнового нагрева.

В разделе 3.1 вводится система управления, понятие решения этой системы, достаточные условия существования решения, определения, необходимые для частотного метода.

Пусть задана тройка оснащенных вещественных гильбертовых пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$, где Y_1 непрерывно и плотно вложено в Y_0, а Y_{-1} двойственно к Y_1. Пусть также заданы гильбертовы пространства W, Ξ. Рассматривается система

$$\dot{y} = Ay + B\phi(Cy) + f. \tag{9}$$

Здесь $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$, $B \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$, $C \in \mathcal{L}(Y_{-1}, W)$, f и ϕ – некоторые функции, причем $f : \mathbb{R}_+ \to Y_{-1}$, $\phi : W \to \Xi$, ϕ измерима.

В разделе 3.2 вводятся понятия определяющих операторов для диссипативности и определяющих операторов для сходимости решений задачи (9), доказываются частотные условия существования таких операторов.

Сделаем предположение:

(H1) Система (9) имеет решение y на $(0, T)$ для любого $T > 0$ в вариационном смысле, причем $y \in \mathcal{W}_T = \big\{y \in L^2(0, T; Y_1), \dot{y} \in L^2(0, T; Y_{-1})\big\}$.

Пусть задана квадратичная форма F вида

$$F(y, \xi) = (F_1 y, y)_{-1,1} + 2(F_2 y, \xi)_\Xi + (F_3\, \xi, \xi)_\Xi,$$

где $F_1 = F_1^* \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$, $F_2 \in \mathcal{L}(Y_1, \Xi)$, $F_3 = F_3^* \in \mathcal{L}(\Xi, \Xi)$. Здесь $(\cdot, \cdot)_{-1,1}$ – скобка двойственности между Y_1 и Y_{-1}.

Определим класс $\tilde{\mathcal{N}}(F)$ функций ϕ таких, что для любых двух решений $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ задачи (9) выполняется неравенство

$$F(y_1(t) - y_2(t), \phi(Cy_1(t)) - \phi(Cy_2(t))) \geq 0.$$

Пусть S – вещественное гильбертово пространство, $M : Y_1 \to S$ – линейный ограниченный оператор.

Определение 6. *Оператор M называется определяющим для сходимости решений системы (9), если из условия*

$$\int_t^{t+1} \|M(y_1(\tau) - y_2(\tau))\|^2\, d\tau \to 0, \quad t \to +\infty$$

следует существование таких чисел $\alpha > 0$ и $c_1 > 0$, что для почти всех $t > 0$ выполняется оценка $\|y_1(t) - y_2(t)\|_0^2 \leq c_1 e^{-\alpha t} \|(y_1(0) - y_2(0))\|_0^2$.

Пусть сущесвует оператор $P \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$, $P = P^*$ в Y_0, такой что функционал $V(y) = (y, Py)_0$, $y \in Y_0$ положительно определен на Y_0. Для произвольных решений y_1, y_2 системы (9) обозначим $m(t) = V(y_1(t) - y_2(t))$. Если выполнено для почти всех $t > 0$ с некоторыми положительными константами ν, δ, β, μ неравенство

$$\dot{m}(t) + 2\nu m(t) + \delta \left\|e^{-\beta t}(y_1(t) - y_2(t))\right\|_0^2 \leq \mu \|M(y_1(t) - y_2(t))\|_S^2, \qquad (10)$$

то оператор M является определяющим для сходимости решений.

Определяющие функционалы, введенные в предыдущей главе, являются частным случаем определяющих операторов.

Сделаем следующие дополнительные предположения (H2)-(H5).

Предположения (H2), (H3), которые мы здесь опускаем, касаются существования числа $\lambda > 0$ такого, что задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T]$$

имеет требуемые свойства регулярности ([2]).

(H4) Существует число $\mu > 0$ такое, что с числом λ из предположения (H2) и введенным выше оператором M выполняются условия:

a)

$$F^c(y, \xi) - \mu \left\| M^c y \right\|_{S^c}^2 \leq 0$$

для любых $y \in Y_1^c$, $\xi \in \Xi^c$, $\omega \in \mathbb{R}$ таких, что $i\omega y = (A^c + \lambda I^c)y + B^c\xi$,

b) функционал

$$J(y(\cdot), \xi(\cdot)) = \int_0^\infty (F^c(y(\tau), \xi(\tau)) - \mu \left\| M^c y(\tau) \right\|_{S^c}^2) d\tau$$

ограничен сверху на множестве

$$\mathcal{M}_{y_0} = \{y(\cdot), \xi(\cdot)) : \dot{y} = (A^c + \lambda I^c)y + B^c\xi, y(0) = y_0, y(\cdot) \in \mathcal{W}_\infty^c,$$
$$\xi(\cdot) \in L^2(0, \infty; \Xi^c)\big\}$$

для любого $y_0 \in Y_0^c$. Здесь знак c означает комплексификацию операторов или пространств, а также расширение квадратичной формы до эрмитовой. Решение понимается в том же смысле, что в предположении (H1).

(H5) Существует оператор $K \in \mathcal{L}(Y_1, \Xi)$ такой, что оператор $A + \lambda I + BK$ устойчив и $F(y, Ky) \geq 0$ для любых $y \in Y_1$, где λ из предположения (H2).

Теорема 6. *Пусть $\phi \in \tilde{\mathcal{N}}(F)$ и выполняются предположения (H1)-(H5) с некоторым оператором M в предположении (H4). Тогда оператор M является определяющим для сходимости решений задачи (9).*

Для доказательства этой теоремы применяется частотная теорема для эволюционных систем из [2]. Идея доказательства состоит в получении описанного выше оператора P, для которого выполняется оценка (10), где $m(t)$ определяется с помощью P.

В разделе 3.3 приводится вспомогательный материал, связанный с применением частотной теоремы.

Далее в разделе 3.4 теоретические результаты раздела 3.2 применяются к задаче микроволнового нагрева. При некоторых дополнительных предположениях получены результаты о существовании глобального B-аттрактора коцикла, порожденного этой задачей, при вытягивании назад и вперед, а также о существовании определяющих функционалов этого коцикла при вытягивании вперед. Эти результаты частично повторяют результаты второй главы, однако требуют несколько иных предположений.

В четвертой главе приведены результаты численных экспериментов в задаче микроволнового нагрева, иллюстрирующие часть теоретических результатов второй и третьей глав. Показаны разные виды численного решения задачи микроволнового нагрева при различных граничных условиях и результаты аппроксимации определяющих функционалов для этой задачи при вытягивании вперед. Для проведения данных экспериментов использовался пакет Matlab.

Список цитируемой литературы

[1] Ладыженская О.А. Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 72-85.

[2] Лихтарников А.Л., Якубович В.А. Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. Вып. 5. С. 1069-1085.

[3] Чуешов И.Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 4 (322). С. 77–124.

[4] Foias C., Temam R. Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 43. P. 117-133.

[5] Kloeden P., Schmalfuss B. Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization // Numerical Algorithms. 1997. Vol. 14. P. 141-152.

[6] Langa J.A. Asymptotically finite dimensional pullback behaviour of non-autonomous PDEs // Archiv der Mathematik. 2003. Vol. 80. P. 525-535.

[7] Yin H.-M. Existence and regularity of a weak solution to Maxwell's equations with a thermal effect // Math. Meth. Appl. Sci. 2006. N 29. P. 1199–1213.

Публикации автора по теме диссертации

[1*] Ermakov I. V., Kalinin Yu. N., Reitmann V. Determining modes and almost periodic integrals for cocycles // Differential Equations. 2011. Vol. 47. N 13. P. 1837-1852.

[2*] Ермаков И. В., Райтманн Ф. Определяющие функционалы для системы микроволнового нагрева // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 13-17.

[3*] Ermakov I. Existence of the global attractor for the one-dimensional microwave heating problem / Proceedings of the International Student Conference "Science and Progress". 2010. Saint-Petersburg, Russia. P. 77-81.

[4*] Ermakov I., Reitmann V. Determining functionals for cocycles and application to the microwave heating problem / Abstracts of the International Conference "Equadiff". 2011. Loughborough, UK. P. 135.