Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

БЕГУН Никита Андреевич

ВОЗМУЩЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные
уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор *Плисс Виктор Александрович.*

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор *Леонов Геннадий Алексеевич*
(Санкт-Петербургский государственный университет);

кандидат физико-математических наук,
доцент *Иванов Борис Филиппович* (Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров).

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ".

Защита состоится "16" мая 2013 г. в 14 час. 00 мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.
Математико-механический факультет СПбГУ. Ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "12" апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49, доктор
физико-математических наук Ю. В. Чурин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вопросы, связанные с устойчивостью слабо гиперболических инвариантных множеств, являются одними из основных в современной теории дифференциальных уравнений. Интерес к ним возник еще в начале второй половины XX века.

Основная задача подобных исследований — отыскание условий, достаточных для того, чтобы в окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы существовало слабо гиперболическое инвариантное множество возмущенной системы.

Важный вклад в изучение этих вопросов внесли В. А. Плисс, G. R. Sell, S. Smale, В. И. Арнольд, N. Fenichel, R. J. Sacker, M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub.

В большинстве работ, посвященных данной проблематике, делалось предположение о том, что устойчивое и нейтральное линейные подпространства соответствующих линеаризованных систем удовлетворяют условию Липшица.

В частности, это предположение делалось в работах В. А. Плисса и G. R. Sell'a (1990,1997), которые являются главными корнями данной диссертации.

В то же время известно, что подобное ограничение представляется весьма существенным.

Таким образом, сама собой назрела необходимость рассмотрения нелипшицева случая.

Цель работы

Целью работы является формулировка условий, достаточных для того, чтобы в окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы существовало слабо гиперболическое инвариантное множество возмущенной системы.

Методы исследований

В работе применяются современные методы исследования слабо гиперболических инвариантных множеств. Однако, эти методы существенным образом видоизменяются. Это происходит в связи с тем, что на устойчивое и нейтральное линейные подпространства соответствующих линеаризованных систем не накладывается условие Липшица.

Основные результаты работы

Сформулированы условия, достаточные для того, чтобы в окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы существовало слабо гиперболическое инвариантное множество возмущенной системы.

Научная новизна

Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Теоретическая и практическая ценность состоит в том, что с помощью полученных результатов можно делать вывод о наличии слабо гиперболического инвариантного множества возмущенной системы в окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы даже в том случае, когда на устойчивое и нейтральное линейные подпространства соответствующих линеаризованных систем не накладывается условие Липшица.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на заседаниях Городского семинара по дифференциальным уравнениям (г. Санкт-Петербург) и на семинаре по динамическим системам во Free University of Berlin (г. Берлин, Германия).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [3,4]. Работа [3] опубликована в издании, входящем в перечень рецензируемых научных журналов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 19 наименований. Объем диссертации — 70 страниц. Работа содержит 14 рисунков.

Содержание диссертации

Во введении приводится краткий исторический обзор исследования слабо гиперболических инвариантных множеств. Указываются основные литературные источники по теме работы.

В первой главе рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1}$$

и

$$\dot{y} = X(t, y) + Y(t, y), \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, а X, Y — это C^1-функции, действующие из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$.

Предполагается, что существует число $\omega > 0$ такое, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$X(t + \omega, x) = X(t, x), \ Y(t + \omega, y) = Y(t, y).$$

Далее рассматривается линейная система

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x}\, x. \tag{3}$$

Обозначим через $\Phi(t, t_0, x_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ фундаментальную матрицу линейной системы (3), удовлетворяющую условию $\Phi(t_0, t_0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что система (3) слабо гиперболична на интервале $J \subset \mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2, если $\lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$, $a \geq 1$ и существуют дополняющие друг друга линейные подпространства $U^n(t, t_0, x_0)$ и $U^s(t, t_0, x_0)$, $\dim U^i(t, t_0, x_0) = 1$, $i = s, n$, такие, что

$$\Phi(t, t_0, x_0)U^i(t_0, t_0, x_0) = U^i(t, t_0, x_0),\ i = s, n,$$

для любого $t \in J$ и, если $\bar{x} \in U^s(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_1(t-\tau)},$$

для $t \geq \tau,\ t, \tau \in J$, и если $\bar{x} \in U^n(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_2(t-\tau)},$$

для $t \leq \tau,\ t, \tau \in J$.

Заметим, что в силу периодичности систем (1) и (2), мы можем провести факторизацию $t \sim t + k\omega$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, и в дальнейшем рассматривать нашу систему в пространстве $\Xi = S \times \mathbb{R}^2$, где S — это окружность длины ω.

Множество $W \subset \Xi$ называется инвариантным множеством системы (1), если из того, что $(t_0, x_0) \in W$, следует, что $(t, x(t, t_0, x_0)) \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, что существует $K \subset \Xi$ — компактное инвариантное множество системы (1). Введем обозначение

$$K_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (t_0, x) \in K\}.$$

Множество K будем называть слабо гиперболическим, если выполнены следующие два условия:

(1) линейная система (3) слабо гиперболична на $\mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2 для любой точки $(t_0, x_0) \in K$;
(2) существует $r > 0$ такое, что для любой точки $(t_0, x_0) \in K$, существует 1-мерный диск

$$\widehat{D}(t_0, x_0) \subset K_{t_0}$$

радиуса r, такой, что
(i) x_0 - центральная точка $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(ii) если $x \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, то в точке (t_0, x) линейное подпространство $U^n(t_0, x)$ касается диска $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(iii) множество

$$D(t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| < r, x \in \widehat{D}(t, x(t, t_0, x_0))\}$$

является локально инвариантным;
(iv) если $\widehat{D}_1(t_0, x_0)$ и $\widehat{D}_2(t_0, x_0)$ — это два диска в точке (t_0, x_0) со свойствами (i),(ii),(iii), то $\widehat{D}_1(t_0, x_0) = \widehat{D}_2(t_0, x_0)$.

Для $(t_0, x_0) \in K$ мы определим множества

$$\Upsilon_1(t_0, x_0), \Upsilon_2(t_0, x_0), \Upsilon_3(t_0, x_0), ..., \Upsilon(t_0, x_0)$$

следующим образом:

$$\Upsilon_1(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in D(t_0, x_0)} D(t, x),$$

$$\Upsilon_{i+1}(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in \Upsilon_i(t_0, x_0)} D(t, x) \text{ для } i \geq 1,$$

и

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(t_0, x_0).$$

Множество $\Upsilon(t_0, x_0)$ будем называть листом, проходящим через точку (t_0, x_0). В том случае, когда нам не важна точка (t_0, x_0), мы будем обозначать лист просто Υ.

Теорема. Пусть K — компактное слабо гиперболическое инвариантное множество системы (1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если

$$\|Y\|_{C^1} \le \delta,$$

а Υ — это лист, проходящий через $(t', x') \in K$, то существует непрерывное отображение

$$h : \Upsilon \longrightarrow \Xi,$$

удовлетворяющее условиям
(0) если $h(t_0, x_0) = (t_1, y_1)$, то $t_1 = t_0$;
(1) $|h(t, x) - (t, x)| \le \varepsilon$;
(2) $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ — это инвариантное множество системы (2);
(3) линейная система

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(X(t, y(t, t_0, y_0)) + Y(t, y(t, t_0, y_0)))}{\partial y} y \qquad (4)$$

слабо гиперболична для любой точки $(t_0, y_0) \in \Upsilon^Y$;
(4) нейтральное подпространство $U_Y^n(t_0, y_0)$ системы (4) касается множества $h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0))$ в точке (t_0, y_0), где $(t_0, y_0) = h(t_0, x_0)$;
(5) множество

$$K^Y = \bigcup_{\Upsilon \in K} \Upsilon^Y$$

является замкнутым.

Во второй главе доказываются утверждения (1) и (2) основной теоремы. Для этого проводится построение липшицевых координат в окрестности листа Υ.

В третьей главе доказываются утверждения (3) и (4) основной теоремы.

В четвертой главе доказывается утверждение (5) основной теоремы.

Список литературы

1. V. A. Pliss and G. R. Sell. Perturbations of attractors of differential equations // J. Differential Equations. 1991. Vol. 92. P. 100–124.

2. V. A. Pliss and G. R. Sell. Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets. // J. Differential Equations. 1997. Vol. 149. P. 1–51.

Публикации автора по теме диссертации:

3. Бегун Н. А. Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2012. Вып. 4. С. 3–12.

4. Бегун Н. А. О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. №1. С. 80–88.