Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Жукова Алена Михайловна

Критические конфигурации шарнирных многоугольников и цепей

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета

Научный руководитель: Панина Гаянэ Юрьевна,
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: Ковалёв Михаил Дмитриевич,
доктор физико-математических наук
(МГТУ им. Н. Э. Баумана, профессор)

Малютин Андрей Валерьевич,
доктор физико-математических наук
(ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН,
ведущий научный сотрудник)

Ведущая организация: Независимый Московский Университет
"МЦНМО-НМУ"

Защита состоится "__"______________ 2012 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, ауд. 133.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "__"______________ 2012 г.

Учёный секретарь совета Д 212.232.29
доктор физико-математических наук,
профессор Нежинский В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию критических конфигураций двух частных случаев шарнирных механизмов – шарнирных многоугольников и шарнирных цепей. *Шарнирный механизм* – это граф без петель и кратных ребер, для каждого ребра которого задано положительное число – его длина. *Реализацией* шарнирного механизма, или его *конфигурацией* называется его вложение в некоторое объемлющее метрическое пространство (например, в $\mathbb{R}^2$), такое, что для каждого ребра длина отрезка, его реализующего, равна заданной длине ребра. При этом положение некоторых вершин может быть задано заранее.

Все возможные конфигурации шарнирного механизма формируют *конфигурационное пространство* шарнирного механизма или его *пространство модулей*. Его наделяют естественной топологией, порождаемой топологией пространства, в которое вкладывается шарнирный механизм. Шарнирные механизмы и их конфигурационные пространства (пространства модулей) – тема, давно ставшая классической. Они естественным образом возникают в задачах механики, робототехники, управления. Существует математическая дисциплина, занимающаяся изучением пространств модулей различных объектов, в том числе и шарнирных механизмов, – топологическая робототехника. В этой дисциплине выделяются два основных течения: во-первых, изучение чисто топологических задач, порожденных робототехникой и управлением, и, во-вторых, применение топологических идей, топологического языка и результатов алгебраической топологии к специализированным задачам управления и программирования.

Шарнирный многоугольник L – это шарнирный механизм, состоящий из n ребер с длинами $l_1, l_2, \dots, l_n$, соединенных друг с другом по циклу. Конфигурациями шарнирного многоугольника являются замкнутые ломаные, лежащие в плоскости, возможно, с самопересечениями, с вершинами $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$, такие, что

$$|p_i p_{i+1}| = l_i,\ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Нумерация при этом предполагается циклической, то есть, например, $p_{n+1} = p_1$. Далее, мы считаем две конфигурации шарнирного многоугольника эквивалентными, если существует некоторая изометрия плоскости, сохраняющая ориентацию, которая переводит одну из этих конфигураций в другую. Нетрудно видеть, что при таком условии нам достаточно рассматривать лишь конфигурации с фиксированным положением первых двух вершин: $p_1 = (0, 0), p_2 = (0, l_1)$. Множество всех таких конфигураций называется *пространством модулей шарнирного многоугольника* L. Оно естественным образом вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n-4}$ и наследует его топологию.

Пространства модулей шарнирных многоугольников – хорошо изученный объект. Оно является гладким многообразием тогда и только тогда, когда не существует таких

$$\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \ldots, n,$$

что

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i l_i = 0,$$

то есть, если у многоугольника L не существует конфигурации, все вершины которой лежат на одной прямой.

Условия на длины сторон шарнирного n–угольника вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i l_i = 0, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \ldots, n$$

разбивают пространство параметров шарнирных n–угольников на камеры. Если два шарнирных многоугольника находятся в одной камере, их пространства модулей диффеоморфны (это верно как для плоских многоугольников, так и для вложенных в $\mathbb{R}^3$). К. Уолкер в [16] выдвинул гипотезу о том, что соотношения длин сторон шарнирного многоугольника, то есть его принадлежность к некоторой камере, могут быть восстановлены по кольцу когомологий его пространства модулей. Эта гипотеза была доказана Д. Щуцем в [15] для плоских многоугольников, и им же совместно с М. Фарбером и Ж.-К. Хаусманом, в [8] для многоугольников в $\mathbb{R}^3$. М. Фарбер и В. Фромм в [7] доказали, что если пространства модулей шарнирных многоугольников, находящихся в $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, O(d)–диффеоморфны, то шарнирные многоугольники принадлежат одной камере. Все группы гомологий пространств модулей шарнирных многоугольников являются свободными абелевыми. М. Фарбер и Д. Шуц нашли формулу для чисел Бетти этих пространств (см. [9]).

Д. Звонкин в [17] описал все возможные топологические типы пространств модулей для шарнирных n-угольников с n=5, n=6. А именно, пространство конфигураций типичного шарнирного пятиугольника – двумерная связная поверхность рода не больше, чем четыре, либо дизъюнктное объединение двух торов.

На пространствах модулей шарнирных многоугольников в $\mathbb{R}^3$ была введена структура кэлерова многообразия, вычислены группы гомологий (см. [14], [11]) и введено произведение на группах когомологий этих пространств (см. [10]).

Шарнирная цепь P – это шарнирный механизм, состоящий из n ребер с длинами $l_1, l_2, \ldots, l_n$, соединенных друг с другом последовательно. Ее конфигурациями являются незамкнутые ломаные на плоскости с вершинами

$r_0, r_1, \dots, r_n$, такие, что

$$|r_i r_{i+1}| = l_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Как и в случае шарнирного многоугольника, мы считаем первые две вершины зафиксированными: $p_1 = (0,0), p_2 = (0, l_1)$. Нетрудно видеть, что пространство модулей шарнирной цепи гомеоморфно многомерному тору $(S^1)^{n-1}$.

В диссертации эти пространства изучаются с точки зрения теории Морса. В качестве функции Морса используется функция ориентированной площади – естественное обобщение понятия обычной площади для самопересекающихся объектов. Существует два эквивалентных определения ориентированной площади для шарнирных многоугольников.

- Для конфигурации P шарнирного многоугольника на плоскости ее *ориентированная площадь* равна следующему интегралу по мере Лебега, взятому по всей плоскости:

$$A(P) = \int_{x \in \mathbb{R}^2} \omega_P(x) dx,$$

  где $\omega_P(x)$ – индекс обхода точки x конфигурацией P.

- Для конфигурации $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ шарнирного многоугольника L, где $p_i = (x_i, y_i)$, ее *ориентированная площадь* равна:

$$2A(P) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \dots + (x_n y_1 - x_1 y_n).$$

Для шарнирных цепей ориентированная площадь определяется следующим образом: вершины r_n и r_0 соединяются отрезком, и вычисляется ориентированная площадь полученного многоугольника.

Поскольку в общем случае эта функция является функцией Морса, естественно возникает вопрос о ее критических точках и их индексах Морса. Теорема, доказанная Я. Штейнером, гласит, что точкой абсолютного максимума ориентированной площади является выпуклая вписанная конфигурация шарнирного многоугольника.

В [12] Г.Ю. Панина и Г.Н. Химшиашвили обобщили этот результат, доказав, что конфигурация P шарнирного многоугольника является критической точкой функции A тогда и только тогда, когда P – вписанная конфигурация (то есть, все ее вершины лежат на одной окружности).

В [13] Д. Сирсма и Г.Н. Химшиашвили доказали, что конфигурация R шарнирной цепи является критической точкой функции ориентированной площади тогда и только тогда, когда R – диаметральная вписанная конфигурация (то есть, все ее вершины лежат на одной окружности, причем отрезок $r_0 r_n$ является диаметром этой окружности).

Эти результаты связывают шарнирные многоугольники и цепи с *циклическими многоугольниками* (многоугольниками, вписанными в окружность). В последние годы появилось много работ, посвященных этой теме. Основным содержанием этих работ является получение и исследование аналога формулы Герона, дающего возможность вычисления площадей таких многоугольников через длины их сторон. Циклические многоугольники изучались следующими математиками: В.В. Варфоломеев, Р. Коннели, И. Пак, Д. Роббинс, И.Х. Сабитов.

Цель работы. Основной целью диссертации является нахождение простых формул для индексов Морса вписанных конфигураций шарнирных многоугольников и диаметральных вписанных конфигураций шарнирных цепей и изучение локальных экстремумов функции ориентированной площади на пространствах модулей шарнирных многоугольников и цепей.

Методы исследований. Применяются методы теории Морса, дифференциальной геометрии, комбинаторики.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту. В диссертации получены следующие новые результаты, касающиеся шарнирных многоугольников и цепей:

- Получена (в совместной работе с Г.Ю. Паниной в [1] и продолжении ее в [2]) простая формула для индекса Морса критической конфигурации шарнирного многоугольника.
- Получена (совместно с Г.Ю. Паниной, Г.Н. Химшиашвили и Д. Сирсма в [5]) простая формула для индекса Морса критической конфигурации шарнирной цепи.
- Построена полная классификация локальных экстремумов ориентированной площади на пространствах модулей шарнирных многоугольников.
- Доказано, что на пространстве модулей шарнирных цепей не существует экстремумов ориентированной площади, кроме глобальных.
- Построен ряд примеров, перечисляющих вписанные конфигурации некоторых шарнирных пятиугольников.
- Построен ряд примеров, перечисляющих диаметральные вписанные конфигурации некоторых шарнирных цепей.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в теории шарнирных механизмов и циклических многоугольников.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Петербургском геометрическом семинаре им. А.Д.Александрова, Петербургском топологическом семинаре им. В.А.Рохлина, а также на следующих конференциях:

1. "Метрическая геометрия поверхностей и многогранников", посвященная 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова, МГУ, мех-мат, 2010 г.

2. 42-я Всероссийская молодежная школа-конференция "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2011 г.

3. Международная (43-я Всероссийская) молодежная школа-конференция "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2012 г.

4. 4-я геометрическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Д. Александрова, Санкт-Петербург, институт Эйлера, 2012 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в научных статьях [1]-[5].

В совместной работе [1] диссертанту принадлежат раздел 3 о диагональной системе координат на пространствах модулей шарнирных многоугольников, лемма 4.5 о прохождении вписанной деформации шарнирного многоугольника через флип, все примеры. Соавтору (научному руководителю) принадлежат постановка задачи, леммы 4.2, 4.4, а также теоремы 4.6 и 5.2.

В совместной работе [3] соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, результаты принадлежат диссертанту.

В совместной работе [5] диссертанту принадлежат разделы 3 и 4, посвященные выводу формулы для индекса Морса критических конфигураций шарнирных многоугольников и цепей. Все остальные разделы принадлежат соавторам.

Работы [1]-[4] опубликованы в изданиях из перечня ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из пяти глав, включающих введение и заключение, и списка литературы, содержащего 60 названий. Общий объём диссертации составляет 92 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структура работы следующая.

Глава 1, вводная посвящена обзору предшествовавших результатов, относящихся к теме диссертации, в ней также обсуждаются мотивировки решаемых задач и даются необходимые определения и обозначения.

В параграфах 1.1-1.5 освещается история исследований шарнирных механизмов в целом, шарнирных многоугольников и цепей, функции ориентированной площади, а также циклических многоугольников.

В параграфе 1.6 приведены основные результаты диссертации.

В параграфе 1.7 даются определения и обозначения, используемые в тексте диссертации. В частности, используются следующие обозначения:

Пусть $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вписанная конфигурация шарнирного многоугольника L. Тогда:

$m(P)$ – индекс Морса ориентированной площади в точке P.

$H(P) = Det(Hess(P))$ – определитель гессиана функции A в точке P

O – центр описанной около P окружности.

α_i – половина угла между векторами $\overrightarrow{Op_i}$ и $\overrightarrow{Op_{i+1}}$. Угол всегда определяется как положительный, без учета ориентации.

Для конфигурации, ни одно ребро которой не проходит через точку O обозначим через ε_i ориентацию ребра $(p_i p_{i+1})$ относительно точки O, то есть,

- $\varepsilon_i = 1$, если треугольник (p_i, p_{i+1}, O) ориентирован положительно (против часовой стрелки);

- $\varepsilon_i = -1$, если треугольник (p_i, p_{i+1}, O) ориентирован отрицательно (по часовой стрелке).

$e(P)$ – количество положительно ориентированных ребер в конфигурации P.

$\omega(P)$ – степень центра O описанной окружности относительно конфигурации P как замкнутой кривой.

Для нецентральной вписанной конфигурации P, положим

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Аналогичные обозначения вводятся для диаметральной вписанной конфигурации $R = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ шарнирной цепи. Лишь значение $\omega(R)$ для конфигурации R определяется следующим образом.

Назовем *замыканием* R^{Cl} конфигурации R вписанную ломаную, получающуюся из R добавлением на окружность новой точки q двух положительно ориентированных ребер (r_n, q) и (q, r_0). Очевидно, полученная ломаная есть конфигурация некоторого шарнирного механизма. Положим

$$\omega(R) = \omega(R^{Cl}).$$

Глава 2 посвящена изучению шарнирных многоугольников. Выводится формула для вычисления индекса Морса их критических конфигураций, классифицируются локальные экстремумы ориентированной площади на пространстве модулей шарнирных многоугольников.

В параграфе 2.1 определяется понятие типичного шарнирного многоугольника. Эти требования оставляют в рассмотрении лишь те многоугольники, пространства модулей которых являются гладкими многообразиями, и на этих пространствах все критические точки ориентированной площади являются морсовыми. Важно, что эти условия задают открытое всюду плотное множество в пространстве параметров R^n_+ шарнирных многоугольников.

В параграфе 2.2 вводится локальная система координат на пространстве модулей шарнирного многоугольника с использованием некоторого набора диагоналей конфигурации шарнирного многоугольника. В этой системе координат гессиан ориентированной площади имеет вид трехдиагональной матрицы, что облегчает его исследование. Элементы этой трехдиагональной матрицы выражены в явном виде через длины сторон и диагоналей многоугольника. Сами по себе эти выражения довольно громоздки и не могут быть непосредственно использованы для вычисления индекса Морса. Однако с их помощью делаются выводы о невырожденности критических точек шарнирного многоугольника и о поведении гессиана в особых случаях.

В параграфе 2.3 вводится понятие *вписанной деформации общего вида* конфигурации шарнирного многоугольника. Общая идея такова: зафиксировав у данной вписанной конфигурации описанную около нее окружность, мы двигаем по этой окружности вершины конфигурации, соблюдая некоторые условия общности. При этом длины сторон конфигурации меняются, и мы получаем некоторое непрерывное семейство шарнирных многоугольников $L(t)$ вместе с непрерывным семейством их вписанных конфигураций $P(t)$.

Мы рассматриваем вписанную деформацию общего вида, соединяющую произвольную вписанную конфигурацию с какой-нибудь выпуклой положительно ориентированной вписанной конфигурацией шарнирного многоугольника с тем же числом вершин. Выпуклая вписанная положительно ориентированная конфигурация является абсолютным максимумом функции ориентированной площади, а значит, ее индекс Морса равен $n-3$. Далее, исследуется поведение параметров вписанной конфигурации в течение этой деформации. Оказывается, что следующие параметры вписанной конфигурации P связаны со знаком определителя гессиана ориентированной площади $\mathcal{H}(P) = sign((H(P))$: число $e(P)$ положительно ориентированных ребер конфигурации, а также знак характеристики $d(P) = sign(\delta(P))$. Из нескольких лемм получаем теорему, дающую формулу для вычисления знака определителя гессиана произвольной вписанной конфигурации шарнирного многоугольника (а значит, четности ее индекса Морса).

Теорема 2.3.6. Пусть P – типичная вписанная конфигурация. Тогда верно

$$\mathcal{H}(P) = d(P)(-1)^{e(P)+1}.$$

В параграфе 1.4 доказана следующая теорема, позволяющая вычислить индекс Морса вписанной конфигурации шарнирного многоугольника.

Теорема 2.4.2. Пусть $P = (p_1, \ldots, p_n)$ – вписанная конфигурация типичного шарнирного многоугольника L. Рассмотрим ее подконфигурации $P_3, \ldots, P_n$:

$$P_i = (p_1, \ldots, p_i), \quad i = 3, \ldots, n.$$

Тогда индекс Морса $m(P)$ конфигурации P равен количеству смен знака в последовательности

$$\mathcal{H}(P_3), \mathcal{H}(P_4), \mathcal{H}(P_5), \ldots, \mathcal{H}(P_n),$$

где $\mathcal{H}(P_i), i = 4, \ldots, n$ могут быть найдены по теореме 2.3.6, а $\mathcal{H}(P_3) = 1$. $\square$

Этот метод может быть использован для вычисления индекса Морса, однако он неудобен из-за присутствия индукции.

В параграфе 2.5 на основе теорем двух предыдущих параграфов выводится теорема, дающая явную формулу для индекса Морса вписанной конфигурации шарнирного многоугольника.

Теорема 1.6.1. Пусть P – вписанная конфигурация типичного шарнирного многоугольника L. Тогда для индекса Морса ориентированной площади A в точке P справедлива формула:

$$m(P) = \begin{cases} e(P) - 1 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) > 0; \\ e(P) - 2 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) < 0. \end{cases}$$

В параграфе 2.6 изучаются локальные экстремумы ориентированной площади шарнирного многоугольника. Были выделены четыре типа локальных максимумов ориентированной площади. Критерии для всех, кроме последнего, – чисто комбинаторные (нет условия на $\delta(P)$), в то время как в четвертом случае присутствует условие $\delta(P) > 0$.

Теорема 1.6.2. Пусть P — вписанная конфигурация типичного шарнирного многоугольника.

Без ограничения общности можно считать, что для конфигурации P верно $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leq i \leq e(P)$. Если же это не так, применим к P подходящую перестановку ребер φ_σ, так, чтобы в $\varphi_\sigma(P)$ указанное условие выполнялось (доказано, что это не изменит индекса Морса). Точка P является точкой локального максимума функции ориентированной площади A тогда и только тогда, когда она является конфигурацией одного из следующих четырех типов:

1. P — выпуклая конфигурация.

2. Все ребра конфигурации P отрицательно ориентированы, и при этом каждые два ребра пересекаются.

3. Одновременно выполнены три условия:

   - любые два отрицательно ориентированных ребра конфигурации P пересекают друг друга;
   - положительно ориентированные ребра конфигурации P не пересекают друг друга;
   - ни одно положительно ориентированное ребро конфигурации P не пересекает отрицательно ориентированные ребра.

4. Одновременно выполнены четыре условия:

   - $\delta(P) > 0$;
   - любые два отрицательно ориентированных ребра конфигурации P пересекают друг друга;
   - положительно ориентированные ребра конфигурации P не пересекают друг друга;
   - ровно одно положительно ориентированное ребро конфигурации P пересекает отрицательно ориентированные ребра, причем пересекает их всех.

В **Главе 3** рассматриваются критические конфигурации шарнирных цепей.

В параграфе 3.1 доказывается следующая теорема, дающая формулу для вычисления индекса Морса диаметральной вписанной конфигурации шарнирной цепи.

Теорема 1.6.4. Пусть R – диаметральная вписанная конфигурация типичной шарнирной цепи L. Тогда для индекса Морса ориентированной площади A в точке R справедлива формула:

$$m(R) = \begin{cases} e(R) - 2\omega(R) + 1, & \text{если } \delta(R) > 0, \\ e(R) - 2\omega(R), & \text{если } \delta(R) < 0. \end{cases}$$

Параграф 3.2 посвящен экстремумам функции ориентированной площади шарнирных цепей. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.6.5. На пространстве модулей шарнирной цепи не существует экстремумов ориентированной площади, кроме глобальных.

В **Главе 4** построен ряд примеров шарнирных многоугольников и цепей, иллюстрирующих различные свойства ориентированной площади как функции Морса.

В параграфе 4.1 приведены примеры шарнирных многоугольников, показывающие, что индекс Морса вписанной конфигурации шарнирного многоугольника не может быть вычислен ни на основе индексов ее подконфигураций, ни на основе ее комбинаторики.

Параграф 4.2 посвящен исследованию всех возможных наборов вписанных конфигураций типичного шарнирного пятиугольника. Полученная классификация приведена в следующей теореме.

Теорема 4.2.1. Пусть L – типичный шарнирный пятиугольник (a,b,c,d,e), причем его ребра упорядочены по длине: $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.

1. Пусть $a - b - c - d + e > 0$.

   Тогда пространство модулей P — сфера, и на нем есть ровно две критические точки функции A: один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивыпуклая конфигурация);

2. Пусть $a - b - c - d + e < 0$ и $a - b - c + d - e > 0$.

   Тогда пространство модулей P — тор, и на нем есть ровно четыре критические точки функции A: один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивыпуклая конфигурация), две седловые точки;

3. Пусть $a - b - c + d + e > 0$, $a - b - c + d - e < 0$ и $a - b + c - d - e > 0$.

   Тогда пространство модулей P — поверхность рода два, и на нем есть не более четырнадцати критических точек. Остается открытым вопрос о существовании шарнирного многоугольника этого типа с ровно четырнадцатью вписанными конфигурациями. Возможны следующие варианты:

   - Шесть критических точек функции A: один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивыпуклая конфигурация), четыре седловые точки;

- Десять критических точек функции A: два максимума (выпуклая и самопересекающаяся конфигурация), два минимума (антивыпуклая и самопересекающаяся конфигурация), шесть седловых точек;
- Четырнадцать критических точек функции A: три максимума (выпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), три минимума (антивыпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), восемь седловых точек.

4. Пусть $a - b - c + d + e < 0$.

   Тогда пространство модулей P — два дизъюнктных тора, и на нем может быть не более двенадцати критических точек. Остается открытым вопрос о существовании шарнирного многоугольника этого типа с ровно двенадцатью вписанными конфигурациями. Возможны следующие варианты:

   - Восемь критических точек функции A: два максимума (выпуклая и самопересекающаяся конфигурации), два минимума (антивыпуклая и самопересекающаяся конфигурации), четыре седловые точки;
   - Двенадцать критических точек функции A: три максимума (выпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), три минимума (выпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), шесть седловых точек.

5. Пусть $a + b - c - d - e > 0$ и $a - b + c - d - e < 0$.

   Тогда пространство модулей P – поверхность рода три, и на нем может быть не более двенадцати критических точек. Возможны следующие варианты:

   - Восемь критических точек функции A: один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивыпуклая конфигурация), шесть седловых точек;
   - Двенадцать критических точек функции A: два максимума (выпуклая и самопересекающиеся конфигурации), два минимума (антивыпуклая и самопересекающаяся конфигурации), восемь седловых точек.

6. Пусть $a + b - c - d - e < 0$.

   Тогда пространство модулей P – поверхность рода четыре, и на нем может быть не более четырнадцати критических точек. Возможны следующие варианты:

- Десять критических точек функции A: один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивыпуклая конфигурация), восемь седловых точек;
- Четырнадцать критических точек функции A: два максимума (выпуклая и звездообразная конфигурации), два минимума (антивыпуклая и звездообразная конфигурации), десять седловых точек.

Доказывается, что у типичных шарнирных пятиугольников не встречаются наборы критических точек, не указанные в этой теореме. Однако не удалось доказать *существование* двух типов шарнирных многоугольников из приведенных в теореме, а именно: имеющих четырнадцать критических точек на поверхности рода два и двенадцать критических точек на паре торов. Основная трудность доказательства их существования сотоит в том, что, как отмечено еще в статье В. Варфоломеева [6], количество критических точек на пространстве модулей шарнирного многоугольника очень чувствительно к изменению длин его сторон. К остальным типам конфигурационных пространств были найдены примеры шарнирных пятиугольников, их реализующие, которые приведены после доказательства теоремы.

В параграфе 4.3 приведено несколько примеров шарнирных цепей, в которых функция ориентированной площади становится как точной, так и неточной функцией Морса.

В **Главе 5, заключительной** кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Список литературы

Публикации автора

[1] G. Panina, A. Zhukova *Morse index of a cyclic polygon* // Cent. Eur. J. Math. 9:2 (2011), 364-377. Preprint arXiv:1007.2740v2 [math.MG]

[2] А.М. Жукова *Индекс Морса циклического многоугольника II* // Алгебра и анализ, 24:3 (2012), 129–148.

[3] А.М. Жукова, Г.Ю. Панина *Равновесные положения плоского полигонального шарнирного механизма* // Труды СПИИРАН, 12 (2010), 226–234.

[4] А.М. Жукова *Наборы вписанных конфигураций типичных шарнирных пятиугольников* //Труды СПИИРАН, 21 (2012).

[5] G. Khimshiashvili, G. Panina, D. Siersma, A. Zhukova *Extremal Configurations of Polygonal Linkages* // Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH Oberwolfach Preprints (OWP), 24 (2011), 26 pp.

Использованные публикации других авторов

[6] В.В. Варфоломеев *Вписанные многоугольники и полиномы Герона*// Матем. сборник, **194**:3 (2003), 3–24.

[7] M. Farber, V. Fromm, The topology of spaces of polygons.

[8] M. Farber, J.-Cl. Hausmann, D. Schütz, *On the conjecture of Kevin Walker* // J. of Topology and Analysis, **1** (2009), 65-–86.

[9] M. Farber, D. Schütz *Homology of planar polygon spaces* // Geom. Dedicata, **125**:18 (2007), 75–92.

[10] J.-C. Hausmann, A. Knutson *The cohomology rings of polygon spaces* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **48** (1998), 281-–321.

[11] M. Kapovich, J. Millson *On the moduli space of polygons in the Euclidean plane* // J. Differential Geom, **42**:1 (1995), 133–164.

[12] G. Khimshiashvili, G. Panina *Cyclic polygons are critical points of area* // Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), **360**:8 (2008), 238–245.

[13] G. Khimshiashvili, D. Siersma *Preprint ICTP* **047**(2009),11 p.

[14] A. Klyachko *Spatial polygons and stable configurations of points in the projective line. Algebraic geometry and its applications* // Algebraic geometry and its applications, Aspects Math., E25, Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84.

[15] D. Schuetz *The Isomorphism Problem for Planar Polygon Spaces* // Journal of Topology, **3**:3 (2010), 713–742.

[16] K. Walker *Configuration spaces of linkages*, Bachelor thesis // Princeton, 1985. http://canyon23.net/math/.

[17] D. Zvonkine *Configuration spaces of hinge constructions* // Russian J. of Math. Phys., **5**:20 (1997), 247–266.