САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Зарецкий Александр Михайлович

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2012

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ЧУРИН Юрий Васильевич
(Санкт-Петербургский государственный
университет, профессор)

доктор физико-математических наук, профессор
БЕЛЯЕВ Александр Константинович (Институт
проблем машиноведения РАН, заместитель
директора)

Ведущая организация: Институт прикладной физики Российской
Академии наук

Защита состоится 7 ноября 2012 г. в __ часов __ минут на заседании дисссертационного совета Д212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “____” ___________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.А. Архипова

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию устойчивости решений актуальных для современной техники дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, описывающих динамику синхронных электрических машин.

Первые попытки исследовать синхронные электрические машины с точки зрения теории дифференциальных уравнений были предприняты известным итальянским математиком Ф. Трикоми. Он изучил простейшее дифференциальное уравнение синхронной машины — уравнение второго порядка, которое совпадает с уравнением математического маятника под действием постоянной силы — и провел глобальное качественное исследование этого уравнения, доказал существование нетривиальной глобальной бифуркации и получил оценки бифуркационных значений параметров.

В настоящее время широкое распространение получили инженерные методы исследования устойчивости синхронных машин, основанные на математической теории локальной устойчивости. Однако многие прикладные задачи требуют не только установить факт локальной устойчивости, но и получить оценки области притяжения устойчивого состояния равновесия. Кроме того, необходимо определить условия, при которых решение не притянется к состоянию равновесия. Среди таких задач следует отметить задачу о предельной нагрузке и задачу определения условий существования круговых решений и циклов второго рода. Для решения задачи о предельной нагрузке в работе используется метод нелокального сведения [*Леонов, 1984*]. Идея этого метода заключается в том, что при построении функции Ляпунова используется информация о поведении траекторий специальной двумерной системы маятникого типа. На основе модифицированного метода нелокального сведения получен критерий существования круговых решений и циклов второго рода.

Все это позволяет повысить устойчивость работы синхронных электрических машин, что свидетельствует об актуальности работы.

Цель работы. Целью работы является вывод и исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений синхронных электрических машин с различными соединениями полюсов в системе возбуждения, развитие и модификация метода нелокального сведения, определение условий существования круговых решений и циклов второго рода для полученных систем, а также определение допустимой нагрузки на синхронные электрические машины.

Методы исследования. В работе применялись методы исследования устойчивости автономных систем: теорема устойчивости по первому приближению, прямой метод Ляпунова, метод нелокального сведения для исследования динамики автономных систем с угловыми координатами.

Результаты, выносимые на защиту.

- Выведены дифференциальные уравнения четырехполюсных синхронных электрических машин с короткозамкнутой демпферной обмоткой и при различных способах соединения полюсов обмотки возбуждения.

- Разработана модификация метода нелокального сведения для полученных дифференциальных уравнений синхронных электрических машин и исследована устойчивость решений этих уравнений.

- Получен критерий существования круговых решений и циклов второго рода для дифференциальных уравнений синхронных электрических машин.

Достоверность результатов. Все результаты, выносимые на защиту, строго математически доказаны.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут использоваться для анализа устойчивости конкретных моделей синхронных электрических машин.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого) (Россия, Москва – 2010, 2012), International Workshop "Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology" (Финляндия, Ювяскюля – 2010), 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC) (Италия, Рим – 2011), ТРИЗфест-2011 (Россия, Санкт-Петербург – 2011), международная конференция «VII Окуневские чтения» (Россия, Санкт-Петербург – 2011), 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD) (Австрия, Вена – 2012) и на семинарах кафедры прикладной кибернетики (2010 – 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 8 печатных работах, в том числе в 2 статьях [1, 2], опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

В работах [1, 2, 5] соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, все результаты получены диссертантом самостоятельно.

В работах [3] диссертанту принадлежат вывод дифференциальных уравнений синхронных электрических машин в двигательном режиме и исследование их устойчивости. В работе [6] диссертант разработал модификацию метода нелокального сведения для системы дифференциальных уравнений, описывающей две синхронные машины. В [7] диссертант вывел уравнения синхронных электрические машины и разработал модификацию метода нелокального сведения для этих уравнений. В [8] диссертантом выведены дифференциальные уравнения четырехполюсных синхронных электрических машин.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, двух приложений, списка литературы, включающего 72 наименований, изложена на 121 страницах машинописного текста и содержит 18 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе исследуется устойчивость решений дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, описывающих динамику синхронных электрических машин. В первой главе на основе электромеханических моделей, выводятся дифференциальные уравнения синхронных электрических машин при различных соединениях полюсов в обмотке возбуждения. Пусть i – ток в обмотке возбуждения; i_k – токи в стержнях короткозамкнутой демпферной обмотки; θ – угол между радиус-вектором к стержню с током i_n и вектором магнитной индукции B; R_1, L_1 – активное и индуктивное сопротивление обмотки возбуждения; R_2, L_2 – активное и индуктивное сопротивление демпферной обмотки; e – постоянное напряжение, подведённое к обмотке возбуждения; m – коэффициент сильного регулирования; n_1 – количество витков в обмотке возбуждения; n_2 – количество стержней в короткозамкнутой обмотке; S_1 – площадь витка обмотки возбуждения; S_2 – площадь диаметрального сечения короткозамкнутой обмотки; J – момент инерции ротора; B – магнитная индукция; M – момент внешних сил (момент нагрузки).

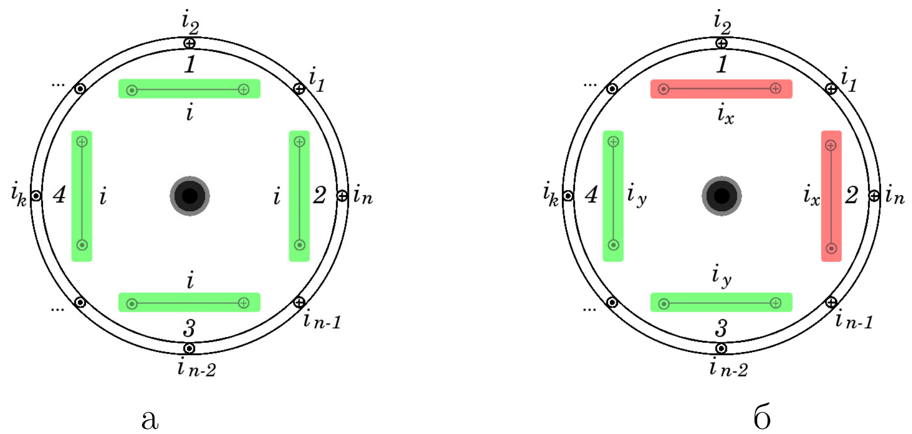


Рис. 1. Электромеханические модели четырехполюсных синхронных электрических машин при последовательном соединении в системе возбуждения: а – соединение первого типа; б – соединение второго типа

Первой рассматривается электромеханическая модель синхронной электрической машины при последовательном соединении полюсов обмотки возбуждения первого типа (рис. 1-а), т.е. когда все полюса обмотки возбуждения подключены последовательно друг к другу и к одному источнику постоянного напряжения. В предположение о равномерно вращающемся магнитном поле динамика машины описывается динамикой ротора. Для вывода дифференциальных уравнений, используются классические законы механики и электротехники: первый и второй законы Кирхгофа для электрической цепи, закон электромагнитной индукции и уравнение моментов сил. В итоге получена следующая математическая модель

$$J\ddot{\theta} = m\dot{\theta} + n_1 S_1 B\sqrt{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4})i + \tfrac{S_2 B}{2}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \cos(\theta + \tfrac{2\pi k}{n_2}) - M,$$

$$L_1\dot{i} + R_1 i = -4n_1 S_1 B\sqrt{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4})\dot{\theta} + e,$$

$$L_2\dot{i}_k + R_2 i_k = -\tfrac{S_2 B}{2}\cos(\theta + \tfrac{2\pi k}{n_2})\dot{\theta}, \qquad k = 1, ..., n_2.$$

Используя невырожденное преобразование координат

$$\theta \mapsto -\theta - \frac{\pi}{4}, \quad s = \dot{\theta}, \quad x = i + \frac{e}{R},$$

$$y = -\frac{L_2}{n_2 S_2 B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \sin(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi k}{n_2}), \qquad z = -\frac{L_2}{n_2 S_2 B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \cos(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi k}{n_2}),$$

$$z_k = -\sum_{j=-m}^{m} i_{k+j} + \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{n_2})i_k, \qquad k = 2, ..., (n_2 - 1).$$

получим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = -\mu s + ax\sin\theta + by - \varphi(\theta) + \gamma,\\
&\dot{x} = -c_1 x - d\sin\theta s,\\
&\dot{y} = -c_2 y - zs - s,\\
&\dot{z} = -c_2 z + ys,\\
&\tfrac{dz_k}{dt} = -c_2 z_k \qquad\qquad k = 2, ..., (n_2 - 1),
\end{aligned} \tag{1}$$

где

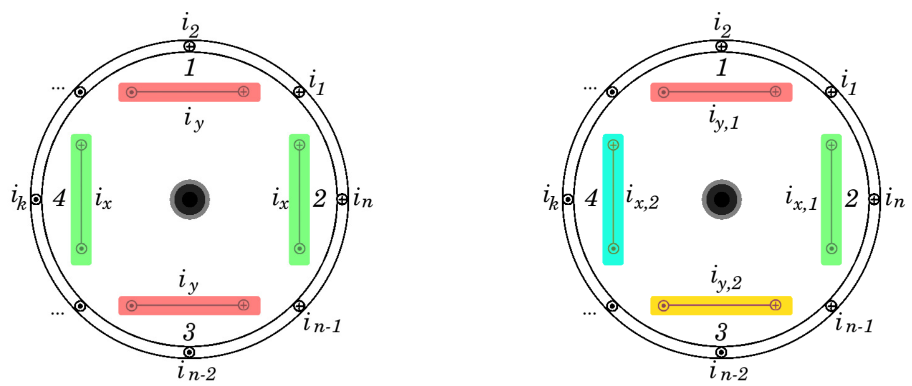
$$\mu = \tfrac{m}{J}, \qquad a = \tfrac{2\sqrt{2}n_1 SB}{J}, \qquad b = \tfrac{n_2(l_0 lB)^2}{2JL_2}, \qquad c_1 = \tfrac{R_1}{L_1},$$
$$c_2 = \tfrac{R_2}{L_2}, \qquad \gamma = \tfrac{M}{J}, \qquad \gamma_{max} = \tfrac{2\sqrt{2}n_1 SBe}{JR_1}, \qquad \varphi(\theta) = \gamma_{max}\sin\theta.$$

В системе (1) переменные x, y, z, z_k определяют электрические величины в обмотках ротора. Заметим, что в системе (1) уравнения с переменными z_k легко интегрируются, следовательно, достаточно рассматривать систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = -\mu s + ax\sin\theta + by - \varphi(\theta) + \gamma,\\
&\dot{x} = -c_1 x - d\sin\theta s,\\
&\dot{y} = -c_2 y - zs - s,\\
&\dot{z} = -c_2 z + ys.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Аналогично, система уравнений, описывающая электромеханическую модель синхронной электрической машины при последовательном соединений полюсов обмотки возбуждения второго типа, изображенную на рисунке 1-б, приведена к виду (2). Последовательное соединение второго типа означает, что два последовательно идущих полюса обмотки возбуждения подключены последовательно к одному источнику постоянного напряжения, а два других — к другому.

Далее рассматриваются электромеханические модели синхронных двигателей при параллельных соединениях в системе возбуждения первого и второго типов (рис. 2).



а б

Рис. 2. Электромеханические модели четырехполюсных синхронных электрических машин при параллельном соединении в системе возбуждения: а – соединение первого типа; б – соединение второго типа

Вначале рассмотрена электромеханическая модель, изображенная на рисунке рис. 2-а. Она описывает четырехполюсную модель синхронной электрической машины при параллельном соединении полюсов в обмотке возбуждения первого типа, т.е. когда два противоположных полюса обмотки возбуждения подключены к одному источнику постоянного напряжения, а оставшиеся два — к другому. Математическая модель, полученная в работе:

$$J\ddot{\theta} = m\dot{\theta} + n_1 S_1 B(i_x \sin\theta + i_y \sin\theta) + \tfrac{S_2 B}{2}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \cos(\theta + \tfrac{2\pi k}{n_2}) - M,$$

$$L_1 \dot{i}_x + R_1 i_x = -4 n_1 S_1 B\dot{\theta}\sin\theta + e_1,$$

$$L_1 \dot{i}_y + R_1 i_y = -4 n_1 S_1 B\dot{\theta}\cos\theta + e_2,$$

$$L_2 \dot{i}_k + R_2 i_k = -\tfrac{S_2 B}{2}\cos(\theta + \tfrac{2\pi k}{n_2})\dot{\theta}, \qquad k = 1, ..., n_2.$$

Используя невырожденное преобразование координат

$$x_1 = -\Big[(i_x - \frac{e_1}{r})\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + (i_y - \frac{e_2}{r})\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\Big], \quad y_1 = -\Big[(i_x - \frac{e_1}{r})\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) + (i_y - \frac{e_2}{r})\cos$$

$$x_2 = -\frac{L_2}{n_2 S_2 B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \sin(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi k}{n_2}), \qquad y_2 = -\frac{L_2}{n_2 S_2 B}\sum_{k=1}^{n_2} i_k \cos(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi k}{n_2}),$$

$$z_k = -\sum_{j=-m}^{m} i_{k+j} + \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{n_2}) i_k, \qquad k = 2, ..., (n_2 - 1),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s,\\
&\dot{s} = -\mu s + a_1 y_1 + a_2 y_2 - \varphi(\theta) + \gamma,\\
&\dot{x_1} = -c_1 x_1 + y_1 s,\\
&\dot{y_1} = -c_1 y_1 - x_1 s - s,\\
&\dot{x_2} = -c_2 x_2 + y_2 s,\\
&\dot{y_2} = -c_2 y_2 - x_2 s - s,\\
&\tfrac{dz_k}{dt} = -c_2 z_k, \qquad\qquad k = 2, ..., (n_2 - 1),
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\mu = \tfrac{m}{J}, \qquad a_1 = \tfrac{4(n_1 SB)^2}{JL_1}, \qquad a_2 = \tfrac{n_2(l_0 lB)^2}{2JL_2}, \qquad c_1 = \tfrac{R_1}{L_1}, \qquad c_2 = \tfrac{R_2}{L_2}, \qquad \gamma = \tfrac{M}{J},$$

$$\gamma_{max} = \tfrac{2n_1 SB\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}{JR_1}, \qquad \vartheta_0 = \arcsin\tfrac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}, \qquad \varphi(\theta) = \gamma_{max}\sin(\theta + \vartheta_0).$$

Заметим, что в системе (3), также как и в системе (1), уравнения с переменными z_k интегрируются независимо от остальной системы. Следовательно, изучение системы (3) сводится к изучению системы

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = s, \dot{s} = -\mu s + a_1 y_1 + a_2 y_2 - \varphi(\theta) + \gamma,\\
&\dot{x_1} = -c_1 x_1 + y_1 s,\\
&\dot{y_1} = -c_1 y_1 - x_1 s - s,\\
&\dot{x_2} = -c_2 x_2 + y_2 s,\\
&\dot{y_2} = -c_2 y_2 - x_2 s - s.
\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогичная система получена и в случае электромеханической модели, изображенной на рисунке 2-б, которая описывает четырехполюсные синхронные электрические машины при параллельном соединении полюсов в обмотке возбуждения второго типа, т.е. когда все полюса обмотки возбуждения подключены к разным источникам постоянного напряжения.

В конце первой главы, на основе теоремы о первом приближении, проведен статический анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений (2) и (4), описывающих четырехполюсные синхронные машины с рассмотренными соединениями в системе возбуждения.

Все выведенные в этой главе уравнения получены на основе общего подхода, связанного с введением системы координат, жестко связанной с вращающимся магнитным полем. Такое рассмотрение позволяет исследовать динамику синхронных электрических машин с точки зрения вращения ротора, что весьма наглядно и упрощает вывод уравнений.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости в "большом" дифференциальных уравнений, полученных в первой главе. Вначале исследуются дифференциальные уравнения четырехполюсных синхронных машин, работающих на холостом ходу. Это означает, что момент внешних сил равен нулю, т.е. параметр $\gamma = 0$. Системы дифференциальных уравнений (2) и (4) – системы с цилиндрическим фазовым пространством.

Теорема 1
Если $\gamma = 0$, то любое решение систем (2) и (4) стремится к одному из состояний равновесия.

Таким образом, при отсутствии нагрузки системы дифференциальных уравнений (2) и (4) глобально устойчивы. Следовательно, при любых начальных данных (при любом положении ротора относительно статора, начальных токах в обмотках ротора и т.д.) системы притянутся к соответствующим состояниям равновесия (машина втянется в синхронный режим работы). Доказательство теоремы 1 основано на использовании функции Ляпунова вида:

$$V(\theta, s, x, y, z) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a}{2d}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{b}{2}z^2 + \int\limits_0^\theta [\varphi(\zeta) - \gamma]d\zeta.$$

для системы (2) и

$$V(\theta, s, x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{a_1}{2}x_1^2 + \frac{a_1}{2}y_1^2 + \frac{a_2}{2}x_2^2 + \frac{a_2}{2}y_2^2 + \int\limits_0^\theta [\varphi(\zeta) - \gamma]d\zeta.$$

для системы (4).

Следующий параграф второй главы посвящен исследованию устойчивости “в большом” системы (2) в случае $\gamma \neq 0$, что соответствует работе машины под нагрузкой. Одной из основных задач, возникающих при исследовании синхронных машин, является задача о предельной нагрузке на машину.

Рассмотрим задачу о предельной нагрузки для системы (2). Предположим, что синхронному режиму работы машины без нагрузки соответствует стационарное решение системы (2) в случае $\gamma = 0$: $\theta = s = x = y = z = 0$. Далее в некоторый момент времени происходит мгновенный наброс нагрузки $\gamma > 0$. Новое устойчивое состояние равновесия, в которое должна перейти система, имеет вид $\theta = \theta_0$, $s = x = y = z = 0$. Здесь θ_0 удовлетворяет условиям

$$\varphi(\theta_0) = 0, \quad \varphi'(\theta_0) > 0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Математическая постановка задачи о предельной нагрузке такова: найти условия, при которых решение θ, s, x, y, z с начальными данными $\theta(0) = s(0) = x(0) = y(0)z(0) = 0$ находилось бы в области притяжения стационарного решения $\theta = \theta_0$, $s = x = y = z = 0$, т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0, \tag{5}$$

Следующая теорема является расширением результатов Ф. Трикоми и его последователей, полученных для двумерной системы маятникового типа.

Теорема 2 *Пусть существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия*

1. $$\lambda < \min\{\mu, c_1, c_2\}.$$

2. *Дифференциальное уравнение*

$$\ddot{\sigma} + 2\sqrt{\lambda(\mu - \lambda)}\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0.$$

с начальными данными $\sigma(0) = \theta_0, \quad \dot{\sigma}(0) = 0$, *удовлетворяет условию*

$$\sigma(t) < \theta_1, \qquad \forall t > 0.$$

Тогда решение системы (2) с начальными данными $\theta = x = y = z = 0$ *удовлетворяет соотношениям (5).*

Доказательство теоремы основывается на использовании метода нелокального сведения, основой которого является специальная функция Ляпунова, содержащая информацию о решениях уравнения маятникового типа специального вида:

$$\ddot{\sigma} + 2\sqrt{\lambda(\mu - \lambda)}\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0. \tag{6}$$

Теорема 2 позволяет свести анализ системы дифференциальных уравнений пятого порядка (2) к анализу дифференциального уравнения второго порядка (6). Уравнение (6) в общем виде подробно изучено в работах Ф. Трикоми, Л. Америо, К. Бема, Л.Н. Белюстиной, Ю.Н. Бакаева и других.

Следствие 1 *Пусть*

$$\int_{\theta_1}^{0} \varphi(\theta) d\theta < 0,$$

где

$$\varphi(\theta) = \gamma_{max} \sin\theta - \gamma,$$

и θ_1 *удовлетворяет условиям*

$$\varphi(\theta_1) = 0, \quad \varphi'(\theta_1) < 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi),$$

тогда решение системы (2) с начальными данными $\theta = s = x = y = z = 0$ *удовлетворяет соотношениям (5).*

Рассмотрим задачу о предельной нагрузке для системы (4) уравнений синхронной машины при параллельном соединении в системе возбуждения. Математическая постановка задачи о предельной нагрузке в этом случае будет: найти условия, при которых для решения $\theta, s, x_1, y_1, x_2, y_2$ системы (4) с начальными данными $\theta(0) = \vartheta_0, s(0) = x_1(0) = y_1(0) = x_2(0) = y_2(0) = 0$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0,\\ \lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Следующая теорема позволяет решить данную задачу.

Теорема 3 *Пусть существует такое число* $\lambda > 0$*, что выполнены следующие условия*

1. $$\lambda < \min\{\mu, c_1, c_2\}.$$

2. *Дифференциальное уравнение*

$$\ddot{\sigma} + 2\sqrt{\lambda(\mu - \lambda)}\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0. \tag{8}$$

с начальными данными $\sigma(0) = \theta_0, \quad \dot{\sigma}(0) = 0$, *удовлетворяет условию*

$$\sigma(t) < \theta_1, \qquad \forall t > 0.$$

Тогда решение системы (4) с начальными данными $\theta = \vartheta_0, s = x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ *удовлетворяет соотношениям (7).*

Также как и в теореме 2 при доказательстве теоремы используется метод нелокального сведения и уравнение маятникового типа (6) специального вида.

Следствие 2 *Пусть*

$$\int\limits_{\theta_1}^{0} \varphi(\theta) d\theta < 0,$$

где

$$\varphi(\theta) = \gamma_{max} \sin(\theta + \vartheta_0) - \gamma,$$

и θ_1 *удовлетворяет условиям*

$$\varphi(\theta_1) = 0, \quad \varphi'(\theta_1) < 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi),$$

тогда решение системы (4) с начальными данными $\theta = \vartheta_0, s = x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ *удовлетворяет соотношениям (7).*

Следствия 3 и 4 являются обоснованием широко применяемого в инженерной практике метода площадей, который был обоснован для ряда моделей в работах А.А. Янко-Триницкого. Обоснование метода площадей основывается на использовании функций Ляпунова вида: квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности. Однако теоремы 3 и 4 позволяют улучшить оценки предельной нагрузки на синхронную машину, полученные с помощью метода площадей.

Следующий параграф посвящен исследованию условий, при которых дифференциальные уравнения синхронных электрических машин имеют круговые решения и циклы второго рода.

Опеределение 1 *Будем говорить, что решение* $u(t) = (\theta(t), \xi(t))$ *системы дифференциальных уравнений (2) и (4) является* **круговым**, *если существуют такие числа* $\varepsilon > 0$ *и* τ, *что при всех* $t \geq \tau$ *имеет место неравенство*

$$|\dot{\theta}(t)| \geq \varepsilon.$$

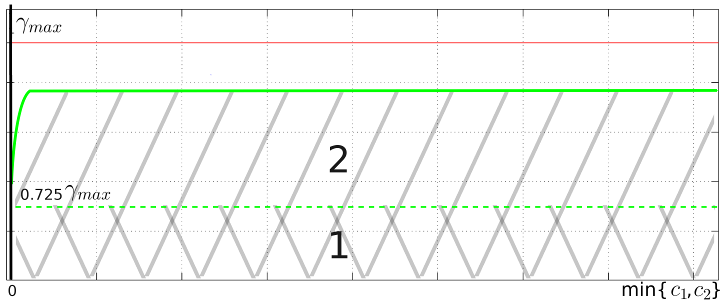


Рис. 3. Сравнение оценок допустимой нагрузки на синхронную машину: 1 — метод площадей; 2 — метод нелокального сведения.

Опеределение 2 *Решение $u(t)$ системы дифференциальных уравнений (2) и (4) будем называть* **циклом второго рода**, *если существуют число $\tau > 0$ и целое число $j \neq 0$, такие, что имеют место равенства*

$$\theta(\tau) - \theta(0) = 2\pi j, \qquad \xi(\tau) = \xi(0).$$

Круговые решения и циклы второго рода соответствуют таким режимам работы, при которых ротор синхронной машины совершает провороты на сколь угодно большой угол θ. Таким образом, наличие таких решений исключает глобальную устойчивость систем (2) и (4). Следующая теорема определяет условия существования круговых решений и циклов второго рада для системы дифференциальных уравнений (2).

Теорема 4 *Пусть существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия*

1. $\lambda < \min\{c_1, c_2\}$ *и выполнено*

$$\lambda - \mu - \frac{(a+d)^2}{4(c_1-\lambda)} - \frac{(b+1)^2}{4(c_2-\lambda)} \geq 0; \tag{9}$$

2. *решение $F(\sigma)$ уравнения*

$$F\frac{dF}{d\sigma} = -\lambda F - \varphi(\sigma), \tag{10}$$

с начальными данными $F(\theta_0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\inf F(\sigma) > 0, \qquad \forall \sigma > \sigma_0,$$

где $\sigma_0 > \theta_0$.

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует круговое решение θ, s, x, y, z, системы (2), удовлетворяющее условиям $\theta(0) = \theta_0$ и

$$s(0) > 0, \qquad |s(0)| + |x(0)| + |y(0)| + |z(0)| < \varepsilon.$$

Если, кроме этого, $\mu > 0$, то система (2) имеет цикл второго рода.

Доказательство теоремы 4 основано на использовании модифицированного метод нелокального сведения и уравнения маятникового типа специального вида, эквивалентного уравнению (10)

$$\ddot{\sigma} + 2\lambda\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0. \tag{11}$$

Введём в рассмотрение следующие величины

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi(\pi\sqrt{b^2-\gamma^2}+\gamma)}}, \quad p_2 = \frac{2\gamma}{\sqrt{2\pi^2\sqrt{b^2-\gamma^2}+\gamma)}}, \\ p_3 = \sqrt{\sqrt{3(b^2-\gamma^2)+1} - 2\sqrt{b^2-\gamma^2}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Следствие 3 *Пусть хотя бы для одного из чисел p_i выполнены следующие условия*

1. $$p_i < \min\{c_1, c_2\} \tag{13}$$

2. $$p_i - \frac{(a+d)^2}{4(c_1 - p_i)} - \frac{(b+1)^2}{4(c_2 - p_i)} > 0; \tag{14}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует круговое решение θ, s, x, y, z, системы (2), удовлетворяющее условиям $\theta(0) = \theta_0$ и

$$|s(0)| + |x(0)| + |y(0)| + |z(0)| < \varepsilon.$$

Аналогичная теорема и следствие получены для системы (4).

Теорема 5 *Пусть существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия*

1. $\lambda < \min\{c_1, c_2\}$ *и выполнено*

$$\lambda - \mu - \frac{(a_1+1)^2}{4(c_1 - \lambda)} - \frac{(a_2+1)^2}{4(c_2 - \lambda)} \geq 0; \tag{15}$$

2. *решение $F(\sigma)$ уравнения*

$$F\frac{dF}{d\sigma} = -\lambda F - \varphi(\sigma),$$

с начальными данными $F(\theta_0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\inf F(\sigma) > 0, \qquad \forall \sigma > \sigma_0,$$

где $\sigma_0 > \theta_0$.

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует круговое решение* θ, s, x_1, y_1, x_2, y_2, *системы (4), удовлетворяющее условиям* $\theta(0) = \theta_0$ *и*

$$s(0) > 0, \qquad |s(0)| + |x_1(0)| + |y_1(0)| + |x_2(0)| + |y_2(0)| < \varepsilon.$$

Если, кроме этого, $\mu > 0$, *то система (4) имеет цикл второго рода.*

Следствие 4 *Пусть хотя бы для одного из чисел* p_i *выполнены следующие условия*

1. $$p_i < \min\{c_1, c_2\} \tag{16}$$

2. $$p_i - \frac{(a_1+1)^2}{4(c_1 - p_i)} - \frac{(a_2+1)^2}{4(c_2 - p_i)} > 0; \tag{17}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует круговое решение* θ, s, x_1, y_1, x_2, y_2, *системы (4), удовлетворяющее условиям* $\theta(0) = \theta_0$ *и*

$$|s(0)| + |x_1(0)| + |y_1(0)| + |x_2(0)| + |y_2(0)| < \varepsilon.$$

В третьей главе проводится численный анализ результатов, полученных в предыдущих главах, для систем дифференциальных уравнений (2) и (4), которые описывают динамику четырехполюсных синхронных электрических машин при последовательном и параллельном соединениях полюсов обмотки возбуждения.

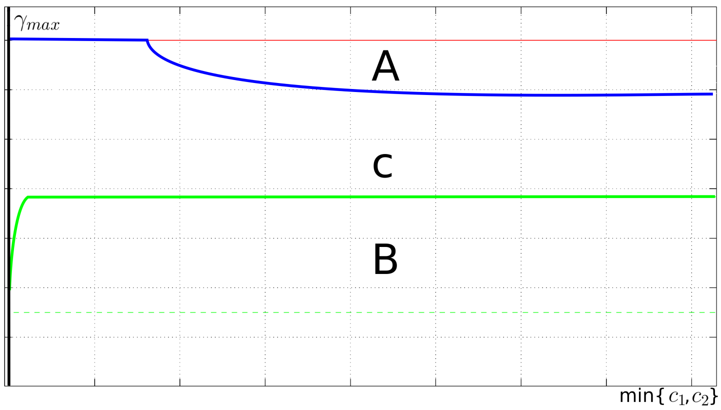


Рис. 4. A — область существования круговых решений и циклов второго рода; B — область допустимых нагрузок на синхронную электрическую машину; C — область аналитически не изучена.

В работе рассмотрены различные соединения полюсов обмотки возбуждения, которые влияют на устойчивость системы. При одинаковых исходных параметрах системы имеют различные максимальные значения момента внешней нагрузки. Максимальное значение этого параметра имеет модель, которая описывает синхронную электрическую машину при последовательном соединении полюсов обмотки возбуждения. Следовательно, эти синхронные электрические машины с последовательным соединением полюсов обмотки возбуждения являются наиболее устойчивыми.

Публикации по теме диссертации.

1. Зарецкий А.М., Леонов Г.А. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений синхронных машин // Доклады Академии наук. 2012. Сер. Математика. Т.445, вып.4. С.386–389.

2. Зарецкий А.М., Леонов Г.А. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2012. Сер.1, вып.4. С.18–27.

3. Leonov G.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M., Seledzhi S.M. Stability and oscillations of electrical machines of alternating current / Proceedings of Vienna conference of Mathematical modelling (Vienna, Austria). 2012. P.1-6.

4. Зарецкий А.М. Устойчивость дифференциальных уравнений синхронных машин / Труды XII международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, Россия). 2012. С.142.

5. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Циклы дифференциальных уравнений синхронных электрических машин // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. No 4 С.1-11.

6. Leonov G.A., Solov'eva E.P., Kondrat'eva N.V., Zaretskiy A.M. Limit load estimation of two connected synchronous machines / Abstracts of 7th European Nonlinear Dynamics Conference (Rome, Italy). 2011. P.50.

7. Leonov G.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M. Estimation of limit load for synchronous machines / Abstracts of the International Workshop "Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology" (Jyväskylä, Finland). 2010. P.4.

8. Зарецкий А.М., Кондратьева Н.В., Соловьева Е.П. Математические модели явнополюсных электрических машин / Труды XI международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, Россия). 2010. С.134–135.