

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Соловьева Елена Павловна

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АСИНХРОННЫХ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2012

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор ЧУРИН Юрий Васильевич  
(Санкт-Петербургский государственный  
университет, профессор)

доктор физико-математических наук, профессор  
БЕЛЯЕВ Александр Константинович (Институт  
проблем машиноведения РАН, заместитель  
директора)

Ведущая организация: Институт прикладной физики Российской  
Академии наук

Защита состоится 7 ноября 2012 г. в \_\_ часов \_\_ минут на заседании диссертационного совета Д212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



А.А. Архипова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

*Актуальность темы.* Исследование устойчивости является одной из важнейших задач при проектировании и эксплуатации асинхронных машин.

Впервые строгие математические методы к изучению динамики электрических машин переменного тока – синхронных машин применил известный итальянский математик Ф. Трикоми. Он вывел простейшее дифференциальное уравнение синхронной машины – уравнение второго порядка – и провел глобальное качественное исследование этого уравнения, доказал существование нетривиальной глобальной бифуркации и получил оценки бифуркационных значений параметров.

В настоящей работе продолжены исследования Ф. Трикоми и его последователей. Здесь выведены дифференциальные уравнения асинхронных машин в предположении о равномерно вращающемся магнитном поле, создаваемом обмотками статора. Это предположение восходит к классическим идеям Н. Тесла и Г. Феррариса. Такое рассмотрение весьма наглядно и упрощает вывод уравнений.

В настоящее время достаточно полно развита математическая теория локальной устойчивости (устойчивость «в малом») состояний равновесия дифференциальных уравнений асинхронных машин. Однако многие прикладные задачи требуют не только установления факта локальной устойчивости, но и оценки области притяжения рассматриваемого состояния равновесия. Среди таких задач следует отметить задачу о предельной нагрузке на асинхронные машины и задачу регулирования скорости вращения асинхронных двигателей с фазным ротором. Для решения этих задач оказалось возможным использование метода нелокального сведения, разработанного Г.А. Леоновым. Основная идея этого метода заключается в том, что при построении функции Ляпунова используется информация о поведении траекторий специальной двумерной системы. При помощи метода нелокального сведения получен ряд новых результатов об устойчивости асинхронных машин.

Все это свидетельствует об актуальности темы диссертационной работы.

*Цель работы.* Целью работы является вывод дифференциальных уравнений асинхронных машин, исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений асинхронных машин, развитие и модификация метода нелокального сведения, а также определение предельно допустимой нагрузки на асинхронные машины с короткозамкнутым ротором, двухклеточным ротором, фазным ротором и нахождение пределов регулирования

скорости вращения асинхронных двигателей с фазным ротором.

*Методы исследования.* В работе применялись методы исследования устойчивости автономных систем: теорема устойчивости по первому приближению, прямой метод Ляпунова, метод нелокального сведения.

*Результаты, выносимые на защиту.*

- Выведены дифференциальные уравнения асинхронных машин с короткозамкнутым ротором, с двухклеточным ротором и с фазным ротором.
- Разработана модификация метода нелокального сведения для дифференциальных уравнений асинхронных машин.
- Получены эффективные оценки областей притяжения устойчивых состояний равновесия. На их основе получены оценки предельно допустимых нагрузок на асинхронные машины и найдены пределы регулирования скорости вращения асинхронных двигателей с фазным ротором при фиксированных нагрузках.

*Достоверность результатов.* Все результаты строго математически доказаны.

*Научная новизна.* Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

*Практическая ценность.* Полученные в диссертации результаты могут использоваться для анализа устойчивости конкретных моделей асинхронных машин с короткозамкнутым ротором, с двухклеточным ротором и с фазным ротором, а также могут способствовать более надежной работе различных конструкций, использующих в качестве привода асинхронные машины.

*Апробация работы.* Результаты данной работы докладывались на международных конференциях “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конференция Пятницкого) (Россия, Москва – 2010, 2012), International Workshop “Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology” (Финляндия, Ювяскюля – 2010), 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC) (Италия, Рим – 2011), ТРИЗфест-2011 (Россия, Санкт-Петербург – 2011), “VII Окуневские чтения” (Россия, Санкт-Петербург – 2011), 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD) (Австрия, Вена – 2012) и на семинарах кафедры прикладной кибернетики (2010 – 2012).

*Публикации.* Основные результаты диссертации представлены в 8 печатных работах, в том числе в 2 статьях [1, 2], опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

В работах [1, 2, 3] соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, все результаты получены диссертанткой самостоятельно.

В работе [4] диссертантке принадлежат вывод дифференциальных уравнений асинхронных двигателей и исследование устойчивости их решений. В работах [6, 7] диссертанткой получены аналитические и численные оценки предельно допустимых нагрузок. В работе [8] диссертантке принадлежат теоретические результаты об критериях стабилизации явнополюсных электрических машин.

*Объем и структура диссертации.* Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, двух приложений, списка литературы, включающего 95 наименований, изложена на 117 страницах машинописного текста и содержит 23 рисунка.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена выводу дифференциальных уравнений асинхронных электрических машин в предположении о равномерно вращающемся магнитном поле, создаваемом обмотками статора. При сделанном предположении динамика рассматриваемых асинхронных машин определяется динамикой их роторов. Все выведенные в этой главе уравнения получены на основе общего подхода, связанного с введением вращающейся системы координат, жестко связанной с вектором магнитной индукции и рассмотрением движения электромеханической модели асинхронной машины в этой системе координат. Такое рассмотрение весьма наглядно и упрощает вывод уравнений.

Основное внимание в диссертации уделено асинхронным электрическим машинам в двигательном режиме. В дальнейшем для краткости будем называть такие машины асинхронными двигателями.

В начале первой главы рассматриваются электромеханические модели асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором (рис. 1, а), с двухклеточным ротором (рис. 1, б), с фазным ротором (рис. 1, в).

На основе электромеханических моделей асинхронных двигателей, используя законы механики и электротехники (первый и второй законы Кирхгофа для электрической цепи и уравнение моментов сил), строятся математические модели этих двигателей. Сначала получена система дифференциальных уравнений асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором, состоящим из  $n$  стержней и замыкающих их на торцах колец (бе-

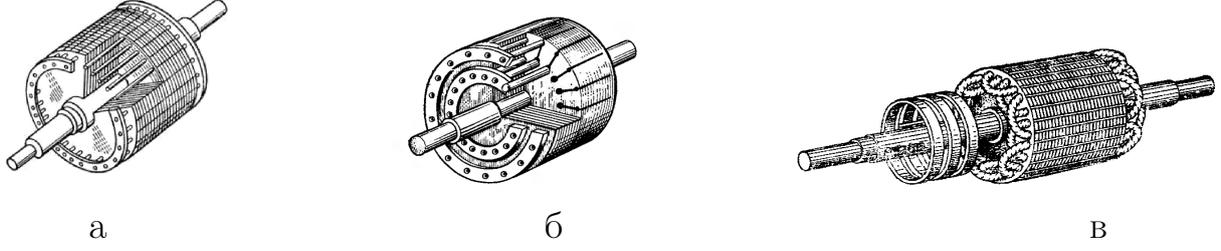


Рис. 1. а – короткозамкнутый ротор с беличьей клеткой, б – двухклеточный ротор с двойной беличьей клеткой, в – фазный ротор [Брускин, Зорохович & Хвостов, 1979]

личья клетка)

$$\begin{aligned}
 L\dot{i}_k + Ri_k &= -l_0lB \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)\dot{\theta}, \quad k = 1, \dots, n, \\
 J\ddot{\theta} &= l_0lB \sum_{k=1}^n \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)i_k - M,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $i_k$  – ток в  $k$  стержне;  $R$  – сопротивление стержня;  $L$  – индуктивность стержня;  $l$ ,  $l_0$  – радиус и длина короткозамкнутого ротора соответственно;  $\theta$  – угол между вектором магнитной индукции  $B$  и радиус-вектором, направленным к  $i_n$  стержню;  $J$  – момент инерции ротора;  $M$  – момент нагрузки.

С помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned}
 \theta &\mapsto -\theta, & s &= \dot{\theta}, \\
 x &= -\frac{2L}{nl_0lB} \sum_{k=1}^n \sin\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)i_k, & y &= -\frac{2L}{nl_0lB} \sum_{k=1}^n \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)i_k, \\
 z_k &= \sum_{j=-m}^m i_{(k+j) \bmod n} - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\right)i_k, & k &= 2, \dots, n-1,
 \end{aligned} \tag{2}$$

система (1) приведена к более удобному для дальнейшего исследования виду

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= s, \\
 \dot{s} &= ay + \gamma, \\
 \dot{x} &= -cx + ys, \\
 \dot{y} &= -cy - xs - s, \\
 \dot{z}_k &= -cz_k, \quad k = 2, \dots, n-1,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$a = \frac{n(l_0lB)^2}{2JL}, \quad \gamma = \frac{M}{J}, \quad c = \frac{R}{L}.$$

В системе (3) переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z_k$  определяют электрические величины в стержнях ротора, переменная  $s$  определяет скольжение ротора. Заметим, что уравнения с переменными  $z_k$  легко интегрируются, а остальные уравнения, кроме первого, не зависят от  $\theta$ , следовательно, достаточно рассматривать систему

$$\begin{aligned}\dot{s} &= ay + \gamma, \\ \dot{x} &= -cx + ys, \\ \dot{y} &= -cy - xs - s.\end{aligned}\tag{4}$$

Далее выведена математическая модель асинхронного двигателя с двухклеточным ротором, обмотка которого выполнена в виде двойной беличьей клетки

$$\begin{aligned}L_1 \dot{i}_k + R_1 i_k &= -l_1 l B \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n_1}\right) \dot{\theta}, \quad k = 1, \dots, n_1, \\ L_2 \dot{j}_k + R_2 j_k &= -l_2 l B \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n_2}\right) \dot{\theta}, \quad k = 1, \dots, n_2, \\ J \ddot{\theta} &= l_1 l B \sum_{k=1}^{n_1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n_1}\right) i_k + l_2 l B \sum_{k=1}^{n_2} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n_2}\right) j_k - M,\end{aligned}\tag{5}$$

где  $n_1, n_2$  – количество стержней внешней и внутренней клеток соответственно;  $i_k$  – ток в  $k$  стержне внешней клетки;  $j_k$  – ток в  $k$  стержне внутренней клетки;  $R_1, L_1$  – сопротивление и индуктивность стержня внешней клетки;  $R_2, L_2$  – сопротивление и индуктивность стержня внутренней клетки;  $l$  – длина клеток;  $l_1, l_2$  – радиус внешней и внутренней клеток соответственно; остальные обозначения имеют прежний смысл.

Используя преобразования координат, аналогичные преобразованиям (2), система (5) приведена к следующему виду

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= s, \\ \dot{s} &= a_1 y + a_2 \nu + \gamma, \\ \dot{x} &= -c_1 x + ys, \\ \dot{y} &= -c_1 y - xs - s, \\ \dot{z}_k &= -c_1 z_k, \quad k = 2, \dots, n_1 - 1, \\ \dot{\mu} &= -c_2 \mu + \nu s, \\ \dot{\nu} &= -c_2 \nu - \mu s - s, \\ \dot{v}_k &= -c_2 v_k, \quad k = 2, \dots, n_2 - 1,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $a_1 = \frac{n_1(l_1 B)^2}{2JL_1}$ ,  $c_1 = \frac{R_1}{L_1}$ ,  $a_2 = \frac{n_2(l_2 B)^2}{2JL_2}$ ,  $c_2 = \frac{R_2}{L_2}$ ,  $\gamma = \frac{M}{J}$ . Всюду далее предполагается, что  $c_1 = c_2 = c$ .

Аналогично случаю асинхронного двигателя с беличьей клеткой достаточно рассматривать систему

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= a_1 y + a_2 \nu + \gamma, \\
 \dot{x} &= -cx + ys, \\
 \dot{y} &= -cy - xs - s, \\
 \dot{\mu} &= -c\mu + \nu s, \\
 \dot{\nu} &= -c\nu - \mu s - s.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Затем выведены дифференциальные уравнения асинхронного двигателя с фазным ротором. В отличие от короткозамкнутого и двухклеточного роторов в цепь обмотки фазного ротора включают пускорегулирующий реостат, выполняющий роль добавочного активного сопротивления, одинакового для каждой фазы. В данном случае математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned}
 Li_1 + (R + r) i_1 &= -2nSB \cos(\theta) \dot{\theta}, \\
 Li_2 + (R + r) i_2 &= -2nSB \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \dot{\theta}, \\
 Li_3 + (R + r) i_3 &= -2nSB \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \dot{\theta} \\
 J\ddot{\theta} &= 2nSB \left( \cos \theta i_1 + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) i_2 + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) i_3 \right) - M,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $n$  – количество витков в трехфазной обмотке;  $S$  – площадь отдельных витков обмотки;  $R$  – сопротивление;  $r$  – добавочное активное сопротивление;  $L$  – индуктивность;  $i_1, i_2, i_3$  – токи;  $\theta$  – угол между плоскостью витков обмотки с током  $i_1$  и плоскостью, перпендикулярной к вектору магнитной индукции  $B$ ;  $J$  – момент инерции ротора;  $M$  – момент нагрузки.

После невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned}
 \theta &\mapsto -\theta, & s &= \dot{\theta}, & z &= i_1 + i_3 - i_2, \\
 x &= -\frac{1}{3} \frac{L}{nSB} \left( \cos \theta i_1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) i_2 + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) i_3 \right), \\
 y &= -\frac{1}{3} \frac{L}{nSB} \left( \sin \theta i_1 + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) i_2 + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) i_3 \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

система (8) может быть преобразована к следующему виду

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= s, \\
 \dot{s} &= ay + \gamma, \\
 \dot{x} &= -cx + ys, \\
 \dot{y} &= -cy - xs - s, \\
 \dot{z} &= -cz,
 \end{aligned}$$

где  $a = 6 \frac{(nSB)^2}{JL}$ ,  $\gamma = \frac{M}{J}$ ,  $c = \frac{R+r}{L}$ . Первое и последнее уравнения могут быть проинтегрированы независимо от остальной системы, следовательно, достаточно рассматривать систему

$$\begin{aligned}\dot{s} &= ay + \gamma, \\ \dot{x} &= -cx + ys, \\ \dot{y} &= -cy - xs - s.\end{aligned}\tag{10}$$

Заметим, что система (8) приводится к такой же системе (4), как и для короткозамкнутого ротора.

Первая глава завершается сравнением широко известных математических моделей асинхронных машин с математическими моделями, рассмотренными в диссертации.

Во второй главе проводится исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений асинхронных двигателей, доказываемая устойчивость «в целом» системы дифференциальных уравнений асинхронных двигателей на холостом ходу (то есть при отсутствии нагрузки), формулируются и решаются задача о предельной нагрузке и задача регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором при фиксированных нагрузках.

Исследование устойчивости – одна из основных научно-технических задач при конструировании электрических машин. Способность электрической машины восстанавливать установившийся режим после сколь угодно малого его возмущения называют статической устойчивостью. Термин статическая устойчивость в теории электрических машин соответствует термину асимптотическая устойчивость (устойчивость «в малом») в теории дифференциальных уравнений. Статическая устойчивость является необходимым условием работоспособности электрической машины.

Расчеты статической устойчивости стационарных режимов асинхронных двигателей выполнялись при помощи классических теорем об устойчивости по первому приближению. Асимптотически устойчивые состояния равновесия соответствуют рабочим режимам асинхронного двигателя, а неустойчивые состояния равновесия соответствуют физически нереализуемым режимам.

При эксплуатации асинхронных двигателей возможны не только малые, но и значительные возмущения режимов. Динамической устойчивостью называют свойство электрической машины возвращаться к рабочему режиму после значительных возмущений. Термин динамическая устойчивость асинхронной машины в теории электрических машин соответствует термину устойчивость «в большом» в теории дифференциальных уравнений.

С проблемой динамической устойчивости тесно связана задача о предельной нагрузке. В работе данная задача описана на примере электрической дисковой пилы.

Сформулируем задачу о предельной нагрузке для системы (4), описывающей динамику асинхронных двигателей с короткозамкнутым и фазным ротором.

Предположим, что синхронному режиму работы асинхронного двигателя без нагрузки соответствует стационарное решение системы (4) в случае  $\gamma = 0$ :  $s = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Далее в некоторый момент времени  $t = \tau$  происходит мгновенный наброс нагрузки. Математическая постановка задачи о предельной нагрузке такова: найти условия, при которых решение  $s(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  с начальными данными  $s = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  находилось бы в области притяжения стационарного решения  $s = s_0 = \frac{c(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,  $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$ ,  $y = -\frac{\gamma}{a}$ , т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{\gamma s_0}{ac}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a}. \quad (11)$$

Введем обозначения:  $s_1 = \frac{c(a + \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{c}s^2 + as - c\gamma, \quad \Gamma = 2 \max_{\lambda \in (0, c)} \left[ \lambda \left( c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2(c - \lambda)} \right) \right]^{1/2}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma < 2c^2$  и для решения уравнения

$$FF'(s) = -\Gamma F(s) - \psi(s), \quad (12)$$

с начальными данными  $F(s_1) = 0$  выполнено условие

$$F(0) > \gamma. \quad (13)$$

Тогда решение системы (4) с начальными данными  $s = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  удовлетворяет соотношениям (11).

Данная теорема позволяет свести исследование устойчивости «в большом» системы третьего порядка (4) к анализу уравнения (12), которое эквивалентно уравнению второго порядка

$$\ddot{s} + \Gamma \dot{s} + \psi(s) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) подробно изучено в работах Ф. Трикоми, Л. Америо, К.Бема, Л.Н. Белюстиной, Ю.Н. Бакаева и других. В монографии Е.А.

Барбашина и В.А. Табуевой была получена оценка сепаратрисы уравнения (14)

$$F(s) > \left( 2 \int_s^{s_1} \psi(s) ds + \Gamma^2 (s_1 - s)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Таким образом, условие (13) теоремы 1 выполнено, если

$$2 \int_0^{s_1} \psi(s) ds + \Gamma^2 s_1^2 \geq \gamma^2.$$

Анализ последнего неравенства дает аналитическую оценку предельно допустимых нагрузок на асинхронные двигатели с короткозамкнутым и фазным ротором:

**Следствие 1.** Если  $5c^2 \geq 2a$  и  $\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{4} a$ , то решение системы (4) с начальными данными  $s = 0, x = 0, y = 0$  удовлетворяет соотношениям (11).

Аналогичные исследования проводятся для системы (7) уравнений асинхронного двигателя с двухклеточным ротором. В данном случае задача о предельной нагрузке ставится следующим образом: найти условия, при которых решение системы (7)  $s(t), x(t), \mu(t), y(t), \nu(t)$  с начальными данными  $s = 0, x = 0, \mu = 0, y = 0, \nu = 0$  находилось бы в области притяжения стационарного решения  $s = s_0 = \frac{c(a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,  $x = \mu = -\frac{s_0^2}{c^2 + s_0^2}$ ,  $y = \nu = -\frac{cs_0}{c^2 + s_0^2}$ , т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{s_0^2}{c^2 + s_0^2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) = -\frac{s_0^2}{c^2 + s_0^2}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{cs_0}{c^2 + s_0^2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t) = -\frac{cs_0}{c^2 + s_0^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем обозначения:  $s_1 = \frac{c(a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{c} s^2 + (a_1 + a_2)s - c\gamma, \quad \Gamma = 2 \max_{\lambda \in (0, c)} \left[ \lambda \left( c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2(c - \lambda)} \right) \right]^{1/2}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma < 2c^2$  и для решения уравнения

$$FF'(s) = -\Gamma F(s) - \psi(s),$$

с начальными данными  $F(s_1) = 0$  выполнено условие

$$F(0) > \gamma.$$

Тогда решение системы (7) с начальными данными  $s = 0, x = 0, \mu = 0, y = 0, \nu = 0$  удовлетворяет соотношениям (16).

Таким образом, исследование устойчивости «в большом» системы пятого порядка (7) также сводится к анализу уравнения (12). Используя оценку (15), получим аналитическую оценку предельно допустимых нагрузок на асинхронные двигатели с двухклеточным ротором:

**Следствие 2.** Если  $5c^2 \geq 2(a_1 + a_2)$  и  $\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1 + a_2)$ , то решение системы (7) с начальными данными  $s = 0, x = 0, \mu = 0, y = 0, \nu = 0$  удовлетворяет соотношениям (16).

Далее получены численные оценки предельно допустимых нагрузок на асинхронные двигатели с помощью численного анализа уравнения (12) и условия (13). Для этого зафиксирован параметр внешней нагрузки на асинхронный двигатель  $\gamma = \sigma\gamma_{\max}$ , где  $\sigma \leq 1$  и введена замена

$$s = c\theta, F = \sqrt{p} F_1.$$

В случае короткозамкнутого и фазного роторов  $\gamma = \sigma\frac{a}{2}$  и  $p = \frac{a}{c^2}$ , а в случае двухклеточного ротора  $\gamma = \sigma\frac{a_1+a_2}{2}$  и  $p = \frac{a_1+a_2}{c^2}$ . Тогда, учитывая  $\gamma = \sigma\frac{pc^2}{2}$ , получим

$$\Gamma = c\sqrt{p}\frac{2}{\sqrt{p}} \max_{\mu \in (0,1)} \left[ \mu(1 - \mu - \frac{(\sigma p)^2}{16(1 - \mu)}) \right]^{\frac{1}{2}} = c\sqrt{p}\Gamma_1(p)$$

и

$$\psi(s) = c^3 p \left( -\frac{\sigma}{2}\theta^2 + \theta - \frac{\sigma}{2} \right) = c^3 p \psi_1(\theta).$$

Уравнение (12) примет вид

$$F_1 \frac{dF_1}{d\theta} = -\Gamma_1(p) - c^2 \psi_1(\theta) \quad (17)$$

с начальными данными  $F_1(\frac{s_1}{c}) = 0$ , а условие (13) переписется следующим образом

$$F_1(0) \geq \sigma \frac{pc^{\frac{3}{2}}}{2}. \quad (18)$$

В результате получим, что при фиксированных  $\sigma$  уравнение (17) зависит от двух параметров  $s$  и  $p$ . Численный анализ (17) и (18) позволяет построить график зависимости параметра  $p$  от параметра  $s$  при фиксированном  $\sigma$  (рис.2).

На рисунке 2 области, расположенные ниже кривых 1,...,5, являются областями устойчивости систем (4) и (7). Таким образом, при фиксированных значениях внешней нагрузки  $\gamma$  мы можем найти область параметров  $p$  и  $s$  (область ниже соответствующей кривой), при которых данная нагрузка будет допустимой.

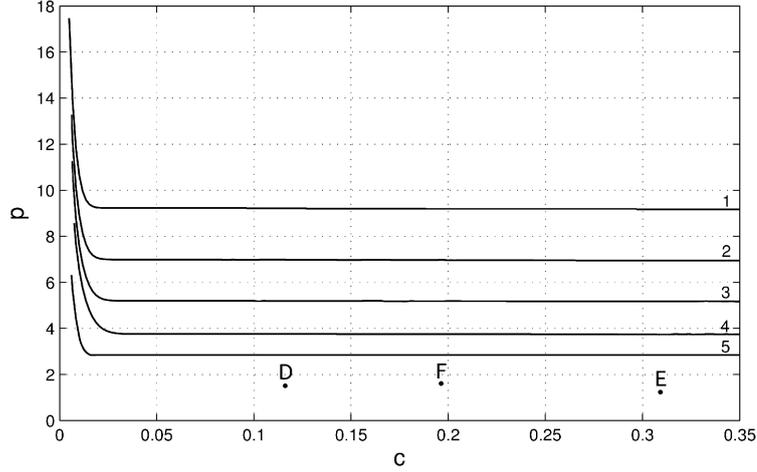


Рис. 2. Области устойчивости систем (4) и (7) при фиксированных значениях  $\sigma$ :  $\sigma = \frac{27}{40}$  (область ниже кривой 1),  $\sigma = \frac{7}{10}$  (область ниже кривой 2),  $\sigma = \frac{29}{40}$  (область ниже кривой 3),  $\sigma = \frac{3}{4}$  (область ниже кривой 4),  $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (область ниже кривой 5). Точки D, E, F соответствуют параметрам асинхронных двигателей 4A250M4Y3, 4AK200M4Y3, 4AP160S4Y3 серии 4A.

В качестве примера были вычислены значения параметров  $p$  и  $c$  для двигателей серии 4A с короткозамкнутым ротором 4A250M4Y3, с фазным ротором 4AK200M4Y3 и с двухклеточным ротором – 4AP160S4Y3 точки D, E, F на рисунке 2 соответственно. Так как все точки лежат ниже кривой 5 ( $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ), то нагрузка  $\gamma < \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{max}$  является допустимой для данных двигателей.

С проблемой динамической устойчивости также связана задача регулирования скорости вращения асинхронного двигателя. В работе рассмотрен широко распространенный способ регулирования скорости асинхронного двигателя посредством добавочного активного сопротивления. Этот способ применим только для асинхронных двигателей с фазным ротором благодаря возможности включения регулирующего устройства – реостата в цепь ротора. Данная задача в работе описана на примере электровоза.

Математическая постановка задачи регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором при фиксированной нагрузке следующая: найти условия, при которых решение системы (4)  $x(t), y(t), s(t)$  с начальными данными  $s_0 = \frac{c(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,  $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$ ,  $y = -\frac{\gamma}{a}$ , находилось бы в области притяжения стационарного решения  $s = \hat{s}_0 = \frac{\hat{c}(a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,  $x = -\frac{\gamma \hat{s}_0}{a\hat{c}}$ ,  $y = -\frac{\gamma}{a}$ , т.е. должны быть выполнены соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \hat{s}_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{\gamma \hat{s}_0}{a\hat{c}}, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a}. \quad (19)$$

Введем обозначения:  $\hat{s}_1 = \frac{\hat{c}(a + \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}$ ,  $\rho = \frac{\hat{c}}{c}$ ,

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{\hat{c}}s^2 + as - \hat{c}\gamma, \quad \Gamma = 2 \max_{\lambda \in (0, \hat{c})} \left[ \lambda \left( \hat{c} - \lambda - \frac{\gamma^2}{4\hat{c}^2(\hat{c} - \lambda)} \right) \right]^{1/2}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma < 2\hat{c}^2$ ,  $s_0 < \hat{s}_1$  и для решения уравнения

$$FF'(s) = -\Gamma F(s) - \psi(s), \quad (20)$$

с начальными данными  $F(\hat{s}_1) = 0$  выполнено условие

$$2F(s_0) > (a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2}) \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|. \quad (21)$$

Тогда решение системы (4) с начальными данными  $s = s_0$ ,  $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$ ,  $y = -\frac{\gamma}{a}$  удовлетворяет соотношениям (19).

В монографии Е.А. Барбашина и В.А. Табуевой была получена еще одна оценка сепаратрисы уравнения (14)

$$F(s) > \Gamma(\hat{s}_1 - s). \quad (22)$$

Таким образом, условие (21) теоремы 3 выполнено, если

$$4\Gamma^2(\hat{s}_1 - s_0)^2 > (a - \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})^2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^2.$$

Анализ последнего неравенства позволяет получить диапазон регулирования скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором:

**Следствие 3.** Если  $\gamma < 2\hat{c}^2$ ,  $s_0 < \hat{s}_1$  и выполнены следующие неравенства

$$2 \max_{\lambda \in (0, \hat{c})} \left[ \lambda \left( \hat{c} - \lambda - \frac{\gamma^2}{4\hat{c}^2(\hat{c} - \lambda)} \right) \right]^{1/2} > \frac{\gamma}{\hat{c}}, \quad (23)$$

$$\rho > 1 - \frac{\sqrt{a^2 - 4\gamma^2}}{a} \quad (24)$$

то решение системы (4) с начальными данными  $s = s_0$ ,  $x = -\frac{\gamma s_0}{ac}$ ,  $y = -\frac{\gamma}{a}$  удовлетворяет соотношениям (19).

В третьей главе дана физическая интерпретация результатов, полученных во второй главе, и проведены численные эксперименты.

На рисунке 3 области 1 и 3 соответствуют допустимым нагрузкам, полученными с помощью теорем 1 и 2. Области 1 и 2 соответствуют предельно допустимым нагрузкам, при которых ротор вращается в том же направлении, что и вращающееся магнитное поле. Таким образом, область

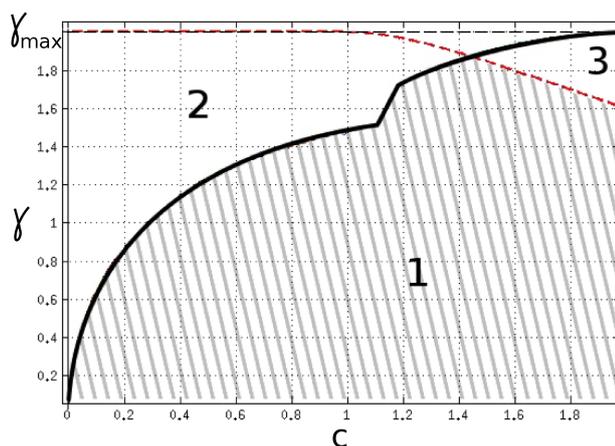


Рис. 3. Оценки допустимых нагрузок на асинхронные двигатели;  $\gamma_{max} = \frac{a}{2}$  для системы (4),  $\gamma_{max} = \frac{a_1+a_2}{2}$  для системы (7)

2 осталась аналитически не исследованной. В связи с этим проведены численные эксперименты поведения асинхронных двигателей при нагрузках, взятых из области 2.

В работе рассмотрены система (4) при фиксированном параметре  $a$ , с параметрами  $c$  и  $\gamma$  из области 2, начальными данными  $s = 0, x = 0, y = 0$  и система (7) при фиксированных параметрах  $a_1$  и  $a_2$ , с параметрами  $c$  и  $\gamma$  из области 2, начальными данными  $s = 0, x = 0, \mu = 0, y = 0, \nu = 0$ . При численном решении системы дифференциальных уравнений используется сетка с шагом 0.001 и метод Рунге - Кутты 4-го порядка. Результаты компьютерного моделирования показали, что при всех исследованных параметрах  $c$  и  $\gamma$  из области 2 траектории систем стремятся к устойчивому положению равновесия, например рис. 4. Это означает, что рассмотренные нагрузки являются допустимыми и асинхронный двигатель втянется в синхронизм.

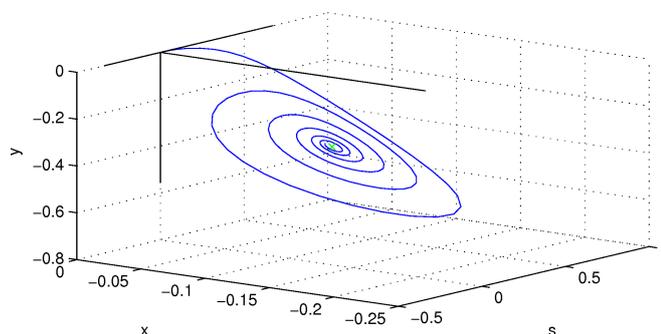


Рис. 4. Решение системы (4) при  $c = 0.28$  и  $\gamma = 1.3$

### Публикации по теме диссертации.

1. Леонов Г.А., Соловьева Е.П. Метод нелокального сведения в анализе устойчивости дифференциальных уравнений асинхронных машин // Доклады Академии наук. 2012. Сер. Математика. Т. 444, вып. 4. С.362-366.

2. Леонов Г.А., Соловьева Е.П. О специальном типе устойчивости дифференциальных уравнений асинхронных машин с ротором «двойная беличья клетка» // Вестник С.-Петербур. ун-та. 2012. Сер. 1, вып. 3. С.44-52.

3. Леонов Г.А., Соловьева Е.П. Регулирование скорости вращения асинхронного двигателя с фазным ротором // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. No 4. С.12-19.

4. Leonov G.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M., Seledzhi S.M., Stability and oscillations of electrical machines of alternating current / Proceedings of Vienna conference of Mathematical modelling (Vienna, Austria). 2012. P.1-6.

5. Соловьева Е.П. Устойчивость дифференциальных уравнений асинхронных машин / Тезисы докладов XII международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, Россия). 2012. С.296-297.

6. Leonov G.A., Solov'eva E.P., Kondrat'eva N.V., Zaretskiy A.M., Limit load estimation of two connected synchronous machines / Abstracts of 7th European Nonlinear Dynamics Conference (Rome, Italy). 2011. P.50.

7. Leonov G.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M. Estimation of limit load for synchronous machines / Programme of the International Workshop «Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology» (Jyväskylä, Finland), 2010. P.4.

8. Зарецкий А.М., Кондратьева Н.В., Соловьева Е.П. Математические модели явнополусных электрических машин / Тезисы докладов XI международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, Россия). 2010. С.134-135.