САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Слепухин Александр Сергеевич

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА ОТРИЦАТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ И АТТРАКТОРОВ КОЦИКЛОВ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
РАЙТМАНН Фолькер

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
ПИЛЮГИН Сергей Юрьевич
(Санкт-Петербургский государственный университет, профессор)

доктор физико-математических наук, профессор
БУРКИН Игорь Михайлович
(Тульский государственный университет, профессор)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Защита состоится “07” ноября 2012 г. в 11 часов 00 минут на заседании совета Д 212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В. О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “____” ___________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Архипова А. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию коциклов, порождённых в первую очередь неавтономными обыкновенными дифференциальными уравнениями, изучению инвариантных множеств и глобальных аттракторов таких коциклов, а также оценке сверху размерности по Хаусдорфу этих инвариантных множеств и аттракторов.

Актуальность темы.

Теория коциклов является мощным инструментом в различных областях теории динамических систем. В частности, коциклы можно рассматривать в качестве обобщённых динамических систем и эффективно использовать их для исследования неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из наиболее важных и актуальных направлений в теории коциклов является изучение их глобальных аттракторов и оценка размерности (например, размерности по Хаусдорфу) таких аттракторов.

Важными результатами на пути развития теории общих динамических систем и их аттракторов были работы М. В. Бебутова [6], Р. К. Миллера и Д. Р. Селла [4], Д. Р. Векмана [5], П. Е. Клоедена и Б. Шмалфуса [2] и другие. Впервые общие верхние оценки размерности Хаусдорфа для отрицательно инвариантных множеств и аттракторов конечномерных динамических систем были получены А. Дуади и Д. Оэстерле [1]. Г. А. Леонов и В. А. Бойченко впервые ввели функции ляпуновского типа в оценки размерности Хаусдорфа инвариантных множеств [3, 7].

Диссертация является развитием указанных исследований из теории динамических систем на случай аттракторов и инвариантных множеств коциклов.

Цель работы.

Целью работы является обобщение на случай коциклов, в частности, порождённых неавтономными уравнениями, известных методов оценки размерности Хаусдорфа глобальных аттракторов динамических систем, использующих функции ляпуновского типа. Работа также направлена на развитие эффективных методов оценки сингулярных чисел линейных неавтономных систем, используемых в теории оценки размерности.

Методы исследования.

Для исследования аттракторов коциклов и их размерности Хаусдорфа, в частности, для коциклов, порождённых неавтономными обыкновенным дифференциальными уравнениями, в работе используются:

— общая теория глобальных аттракторов коциклов;

— развитие теории Дуади-Оэстерле о верхней оценке размерности Хаусдорфа инвариантных множеств динамических систем;

— методы функций ляпуновского типа и матричных неравенств Ляпунова в оценке сингулярных чисел.

Результаты, выносимые на защиту.

— Получены теоремы существования коциклов, порождённых квазилинейным уравнением и системой Лоренца с непрерывными по времени возмущениями.

— Получены теоремы о существовании глобального $\mathcal{B}$-аттрактора при вытягивании назад для коциклов, порождённых квазилинейным уравнением и системой Лоренца с непрерывными по времени, в том числе реккурентными или почти периодическими, возмущениями.

— Получено обобщение на случай коциклов известной теоремы Дуади-Оэстерле о верхней оценке размерности Хаусдорфа инвариантных множеств динамических систем.

— Получено обобщение на случай коциклов метода, использующего функции ляпуновского типа в теории оценки размерности по Хаусдорфу для динамических систем. Доказана теорема о верхней оценке размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантных множеств коциклов, порождённых неавтономными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

— Получена вехрняя оценка размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантного множества локального коцикла, порождённого системой Рёсслера с гладким по времени возмущением. Результат содержит как частный случай известную верхнюю оценку размерности Хаусдорфа инвариантного множества автономной системы Рёсслера [3].

— Для эффективной оценки размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантных множеств коциклов получено обобщение метода матричных неравенств Ляпунова.

— Приведены результаты численных экспериментов, показывающие зависимость аттракторов системы Лоренца с различными возмущениями от класса таких возмущений и параметра.

Достоверность результатов.

Все основные полученные теоретические результаты математически строго доказаны.

При использовании доказанных методов верхней оценки размерности Хаусдорфа в частном случае для исследования отрицательно инвариантного множества локального коцикла, порождённого системой Рёсслера с возмущением, был получен результат, который содержит как частный случай известную оценку сверху размерности по Хаусдорфу инвариантного множества автономной системы Рёсслера [3].

Научная новизна.

Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для исследования коциклов, в частности, порождённых неавтономными обыкновенными дифференциальныи уравнениями, и верхней оценки размерности Хаусдорфа их глобальных аттракторов. Также полученные методы и результаты работы могут быть использованы для дальнейшего обобщения теории Дуади-Оэстерле верхней оценки размерности по Хаудорфу инвариантных множеств, в частности, на случай коциклов на многообразиях.

Апробация работы.

Результаты представленной работы докладывались на международных конференциях "Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial"(Санкт-Петербург – 2010), "PhysCon-2011"(Леон, Испания – 2011), "Science and Progress - 2011"(Санкт-Петербург – 2011).

Кроме того, в рамках стипендиальной программы имени Леонарда Эйлера Германской службы академических обменов (DAAD) диссертант прошёл научную стажировку в Свободном университете Берлина, в течение которой были представлены доклады по теме диссертационной работы (2009).

Публикации.

Основные результаты диссертации представлены в 5 печатных работах [1*-5*], в том числе в 2 статьях [1*, 2*], опубликованных в рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных ВАК.

В работах [1*-4*] соавторам принадлежит постановка задачи, все основные результаты получены диссертантом самостоятельно.

Объем и структура диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего 53 наименования. Работа изложена на 113 страницах машинописного текста и содержит 41 рисунок.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава полностью посвящена общей теории коциклов, в частности, порождённых неавтономными дифференциальными уравнениями. Исследуются вопросы существования коциклов и их глобальных $\mathcal{B}$-аттракторов при вытягивании назад.

Пусть (Θ, ρ_Θ) обозначает некоторое метрическое пространство, где ρ_Θ – его метрика. Пусть задано непрерывное отображение $\sigma : \mathbb{R} \times \Theta \to \Theta$, действующее как $(t, \theta) \mapsto \sigma^t(\theta)$ и удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\sigma^0(\cdot) = \mathrm{id}_\Theta$;

2) $\sigma^{t+s}(\cdot) = \sigma^t(\cdot) \circ \sigma^s(\cdot)$, для любых $t, s \in \mathbb{R}$.

Тогда пара $(\{\sigma^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (\Theta, \rho_\Theta))$ называется *базисным потоком.*

Пусть далее $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, ρ_n – метрика в $\mathbb{R}^n$, порождённая евклидовой нормой, и пусть $\mathcal{U}$ рассматривается как топологическое пространство с индуцированной топологией и метрикой $\rho_\mathcal{U}$. Пусть $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$, $\mathbb{D} := \mathbb{T} \times \Theta \times \mathbb{R}^n$.

Пусть на множестве $\mathbb{D}$ задано непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathcal{U}$, действующее как $(t, \theta, u) \mapsto \varphi^t(\theta, u)$ и удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\varphi^0(\theta, \cdot) = \mathrm{id}_\mathcal{U}$, для любых $\theta \in \Theta$;

2) $\varphi^{t+s}(\theta, \cdot) = \varphi^t(\sigma^s(\theta), \varphi^s(\theta, \cdot))$, для любых $\theta \in \Theta$ и любых $t, s \in \mathbb{T}$.

Тогда пара $\left(\{\varphi^t(\theta, \cdot)\}_{\substack{\theta\in\Theta,\\ t\in\mathbb{T}}}, (\mathcal{U}, \rho_\mathcal{U})\right)$ называется *коциклом над базисным потоком* $(\{\sigma^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (\Theta, \rho_\Theta))$.

Пусть задано уравнение

$$\dot{u} = f(t, u), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение.

Для правой части уравнения (1) задаются отображения сдвига

$$\sigma^t(f) := f(\cdot + t, \cdot),$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$, и берётся замыкание множества $\{f(\cdot + t, \cdot), t \in \mathbb{R}\}$ всевозможных таких сдвигов в некоторой топологии.

Полученное множество $\mathcal{H}(f) = \overline{\{f(\cdot + t, \cdot), t \in \mathbb{R}\}}$, где черта означает замыкание в выбранной топологии, называется *оболочкой* f.

Пара $(\{\sigma^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (\mathcal{H}(f), \rho_{\mathcal{H}(f)}))$, построенная указанным образом, называется *потоком Бебутова на оболочке* $\mathcal{H}(f)$.

Далее рассматривается расширение исходного уравнения (1) на оболочку. Для этого используется непрерывное отображение взятия значения $\widehat{f} : \mathcal{H}(f) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, заданное для любых $\theta \in \mathcal{H}(f)$ и $u \in \mathcal{U}$ как

$$\widehat{f}(\theta, u) := \theta(0, u).$$

Если вместо θ_0 брать f, т. е. правую часть уравнения (1), то

$$\widehat{f}(\sigma^t(\theta_0), u) = f(t, u),$$

для любых $t \in \mathbb{R}$ и любых $u \in \mathcal{U}$. Таким образом, рассматривается семейство уравнений

$$\dot{u} = \widehat{f}(\sigma^t(\theta), u), \qquad \theta \in \mathcal{H}(f), \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{U}$ и где при $\theta = \theta_0$ уравнение (2) совпадает с исходым (1).

Пусть для уравнения (1) с начальными данными $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathcal{U}$ существует единственное глобальное решение $u(\cdot, t_0, u_0)$, определённое для всех $t \in \mathbb{T}$, такое что $u(t_0, t_0, u_0) = u_0$. Пусть оно непрерывно и непрерывно зависит от начальных данных.

Тогда пусть $\varphi^t(\theta_0, u_0) = u(\theta_0 + t, \theta_0, u_0)$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \in \mathcal{H}(f)$, $u_0 \in \mathcal{U}$. Для таких σ и φ пара $\left(\{\varphi^t(\theta, \cdot)\}_{\substack{\theta\in\mathcal{H}(f)\\ t\in\mathbb{T}}}, (\mathcal{U}, \rho_{\mathcal{U}})\right)$ есть коцикл над потоком Бебутова на оболочке, порождённый исходным уравнением (1).

Пусть для коцикла $\left(\{\varphi^t(\theta, \cdot)\}_{\substack{\theta\in\Theta\\ t\in\mathbb{T}}}, (\mathcal{U}, \rho_{\mathcal{U}})\right)$ задано отображение, действующее как $\theta \in \Theta \mapsto \mathcal{Z}(\theta) \subset \mathcal{U}$, тогда совокупность $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ называется *неавтономным множеством* для заданного коцикла.

Неавтономное множество $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ называется *компактным*, если для каждого $\theta \in \Theta$ множества $\mathcal{Z}(\theta) \subset \mathcal{U}$ компактны.

Неавтономное множество $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ называется *инвариантным* для заданного коцикла, если

$$\varphi^t(\theta, \mathcal{Z}(\theta)) = \mathcal{Z}(\sigma^t(\theta)),$$

для любых $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$, и *отрицательно инвариантным* для заданного коцикла, если

$$\varphi^t(\theta, \mathcal{Z}(\theta)) \supset \mathcal{Z}(\sigma^t(\theta)),$$

для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta$.

Множество $\widehat{\mathcal{Z}}$ называется *глобально $\mathcal{B}$-притягивающим при вытягивании назад* [globally B-pullback attracting] для заданного коцикла, если для любого $\theta \in \Theta$ и любого ограниченного множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ выполнено

$$\operatorname{dist}\left(\varphi^t(\sigma^{-t}(\theta), \mathcal{B}), \mathcal{Z}(\theta)\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Компактное, инвариантное, глобально $\mathcal{B}$-притягивающее при вытягивании назад множество $\widehat{\mathcal{Z}}$ называется *глобальным $\mathcal{B}$-аттрактором при вытягивании назад* [global $\mathcal{B}$-pullback attractor] для заданного коцикла.

Далее в первой главе описываются классы дифференциальных уравнений с возмущениями, исследуемые в данной работе. Затем, также описыаются классы этих возмущений, приводятся их свойства. Кроме того, в первой главе доказаны теоремы существования коциклов, порождённых квазилинейным уравнением и системой Лоренца с непрерывными по времени возмущениями. Для этих коциклов доказаны теоремы существования глобальных $\mathcal{B}$-аттракторов при вытягивании назад.

Система Лоренца с непрерывным по времени возмущением рассматривается в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + \xi_x(t), \\ \dot{y} = rx - y - xz + \xi_y(t), \\ \dot{z} = -bz + xy + \xi_z(t), \end{cases} \tag{3}$$

где $a, r, b > 0$ – положительные параметры, $\xi(\cdot) = \begin{pmatrix} \xi_x(\cdot) \\ \xi_y(\cdot) \\ \xi_z(\cdot) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – ограниченная и равномерно непрерывная функция возмущения.

Пусть построено расширение системы (3) на оболочку $\mathcal{H}(f)$, где f – правая часть (3).

Т е о р е м а 1. *Коцикл, порождённый системой Лоренца* (3) *на оболочке, имеет глобальный $\mathcal{B}$-аттрактор при вытягивании назад для всех значений параметров $a, r, b > 0$.*

В т о р а я г л а в а полностью посвящена вопросам оценки размерности по Хаусдорфу отрицательно инвариантных множеств и аттракторов коциклов.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор и пусть $\alpha_1(L) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n(L)$ обозначают его упорядоченные сингулярные числа с учётом кратности.

Пусть для любых $d \in [0, n]$, таких что $d = d_0 + s$, где $d_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $s \in (0, 1]$

$$\omega_k(L) := \begin{cases} \alpha_1(L)\alpha_2(L)\ldots\alpha_{d_0}(L)\alpha_{d_0}^s(L), & \text{при} \quad k > 0, \\ 1, & \text{при} \quad k = 0. \end{cases}$$

Величина $\omega_d(L)$ называется *функцией сингулярных чисел оператора L порядка d.*

Пусть задан глобальный коцикл $\left(\{\varphi^t(\theta, \cdot)\}_{\substack{\theta\in\Theta \\ t\in\mathbb{R}_+}}, (\mathbb{R}^n, \rho_n)\right)$ над базисным потоком $(\{\sigma^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (\Theta, \rho_\Theta))$, для которого отображения $\varphi^t(\theta, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1-гладкие для всех $\theta \in \Theta$ и $t \in \mathbb{R}_+$ и пусть задано неавтономное множество $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ для этого коцикла.

Пусть выполнены следующие предположения.

(A1) Неавтономное множество $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ компактно и отрицательно инвариантно для коцикла.

(A2) Пусть $\partial_2\varphi^t(\theta, u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обозначает для произвольных точек $(\theta, u) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ и $t > 0$ дифференциал функции $\varphi^t(\theta, u)$ относительно u, который обладает следующими свойствами:

i) для любых $\varepsilon > 0$ и $t > 0$ функция

$$\eta_\varepsilon(t, \theta) := \sup_{\substack{v,u\in\mathcal{Z}(\theta) \\ 0<\|v-u\|\leqslant\varepsilon}} \frac{\|\varphi^t(\theta, v) - \varphi^t(\theta, u) - \partial_2\varphi^t(\theta, u)(v-u)\|}{\|v-u\|}$$

ограничена на Θ и $\eta_\varepsilon(t, \theta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ для каждого фиксированного t;

ii) для любых $t > 0$ выполнено

$$\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{u\in\mathcal{Z}(\theta)}\|\partial_2\varphi^t(\theta,u)\|_{op} < \infty,$$

где $\|L\|_{op}$ обозначает операторную норму L.

Пусть для произвольного множества $\mathcal{Z}\subset\mathbb{R}^n$ величина $\dim_H\mathcal{Z}$ обозначает размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{Z}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* **(A1)** *и* **(A2)** *и следующие условия:*

1) существует компактное множество $\widetilde{\mathcal{K}}\subset\mathbb{R}^n$ *такое, что*

$$\overline{\bigcup_{\theta\in\Theta}\mathcal{Z}(\theta)}\subset\widetilde{\mathcal{K}};$$

2) существуют непрерывная ограниченная функция $\varkappa:\Theta\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, *момент времени* $\tau > 0$ *и число* $d\in(0,n]$ *такие, что выполнено:*

$$\mathcal{Z}(\theta)\subset\mathcal{Z}(\sigma^\tau(\theta));$$

$$\sup_{(\theta,u)\in\Theta\times\widetilde{\mathcal{K}}}\frac{\varkappa(\sigma^\tau(\theta),\varphi^\tau(\theta,u))}{\varkappa(\theta,u)}\,\omega_d(\partial_2\varphi^\tau(\theta,u)) < 1.$$

Тогда $\dim_H\mathcal{Z}(\theta)\leqslant d$ *для каждого* $\theta\in\Theta$.

Аналогичный результат получен для случая локальных коциклов.

Пусть задано неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot u = f(t,u), \tag{4}$$

где $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – C^k-гладкое ($k\geqslant 2$) отображение. Относительно (4) рассматривается оболочка f, заданная как

$$\mathcal{H}(f)=\overline{\{f(\cdot+t,\cdot),t\in\mathbb{R}\}},$$

где замыкание берётся в компактно-открытой топологии. Пусть далее

$$\dot u = \widehat{f}(\sigma^t(\theta),u), \qquad \theta\in\mathcal{H}(f), \tag{5}$$

есть расширение (4) на оболочку.

Пусть (5) порождает коцикл $\left(\{\varphi^t(\theta,\cdot)\}_{\substack{\theta\in\mathcal{H}(f)\\ t\in\mathbb{R}_+}},(\mathbb{R}^n,\rho_n)\right)$ над базисным потоком $\left(\{\sigma^t\}_{t\in\mathbb{R}},(\mathcal{H}(f),\rho_{\mathcal{H}(f)})\right)$, где отображение φ задаётся с помощью решения уравнения (5).

Пусть $w(t, \theta_0, u_0)$ обозначает решение вариационного уравнения вдоль траектории коцикла через точку $(\theta_0, u_0) \in \mathcal{H}(f) \times \mathbb{R}^n$. Вариационное уравнение имеет вид

$$\dot{w} = \partial_2 \widehat{f}(\sigma^t(\theta_0), \varphi^t(\theta_0, u_0))w, \tag{6}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ и задано начальное условие $w(0, \theta_0, w_0) = w_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\partial_2 \varphi^t(\theta_0, u_0) w_0 = w(t, \theta_0, w_0)$$

для любых $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\lambda_1(\theta, u) \geqslant \lambda_2(\theta, u) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\theta, u)$ – упорядоченные собственные числа матрицы $\frac{1}{2}\left[\partial_2 \hat{f}(\theta, u) + \partial_2 \hat{f}(\theta, u)^T\right]$, взятые с учётом кратности.

Пусть $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta \in \mathcal{H}(f)}$ – неавтономное множество для коцикла, порождённого дифференциальным уравнением (5).

Теорема 3. *Пусть для коцикла, порождённого уравнением* (5) *выполнены предположения* **(A1)**, **(A2)** *и следующие условия:*

1) существует компактное множество $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\overline{\bigcup_{\theta \in \mathcal{H}(f)} \mathcal{Z}(\theta)} \subset \widetilde{\mathcal{K}};$$

2) существуют непрерывная функция $V : \mathcal{H}(f) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой существуют производные $\frac{d}{dt}V(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u_0))$ вдоль данной траектории траектории коцикла, число $\tau > 0$ и число $d \in (0, n]$, записанное как $d = d_0 + s$, где $d_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $s \in (0, 1]$, такие, что выполнено:

$$\mathcal{Z}(\theta) \subset \mathcal{Z}(\sigma^\tau(\theta));$$

$$\int\limits_0^\tau \Big[\lambda_1(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u_0)) + \ldots + \lambda_{d_0}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u_0)) +$$
$$+ s\lambda_{d_0+1}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u_0)) + \frac{d}{dt}V(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u_0))\Big] dt < 0$$

для всех $\theta \in \mathcal{H}(f)$ и $u_0 \in \widetilde{\mathcal{K}}$.

Тогда $\dim_H \mathcal{Z}(\theta) \leqslant d$ *для всех $\theta \in \mathcal{H}(f)$.*

Аналогичный результат получен для случая локальных коциклов.

Система Рёсслера с неавтономными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = -b(t)z + a(t)(y - y^2), \end{cases} \tag{7}$$

где $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – гладкие функции, такие, что

$$a(t) = a_0 + a_1(t), \qquad b(t) = b_0 + b_1(t).$$

Здесь a_0 и b_0 – положительные константы, $a_1(\cdot)$ и $b_1(\cdot)$ – C^1-гладкие функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|a_1(t)| \leqslant \varepsilon a_0, \qquad |b_1(t)| \leqslant \varepsilon b_0 \tag{8}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, где $\varepsilon \in (0, 1)$ – малый параметр. Пусть существует $l > 0$ такое, что

$$|\dot{b}(t)| \leqslant \varepsilon l, \tag{9}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть оболочка $\mathcal{H}(f)$, где в качестве f берётся правая часть (7), компактна в компактно-открытой топологии.

Расширение системы (7) на оболочку имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = -\widehat{b}(\sigma^t(\theta))z + \widehat{a}(\sigma^t(\theta))(y - y^2), \end{cases} \qquad \theta \in \mathcal{H}(f). \tag{10}$$

Семейство (10) порождает локальный коцикл $\left(\{\varphi^t(\theta, \cdot)\}_{\substack{\theta \in \mathcal{H}(f) \\ t \in [0, \beta(\theta, u))}}, (\mathbb{R}^n, \rho_n)\right)$ над базисным потоком $(\{\sigma^t\}_{t \in \mathbb{R}}, (\mathcal{H}(f), \rho_{\mathcal{H}(f)}))$, где интервал $[0, \beta(\theta, u))$ – неотрицательная часть максимального промежутка существования решения (10), проходящего через точку $(\theta, u) \in \mathcal{H}(f) \times \mathbb{R}^n$.

Пусть для этого локального коцикла существует компактное неавтономное множество $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}(\theta)\}_{\theta \in \mathcal{H}(f)}$, для которого выполнено:

1) существует компактное множество $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\overline{\bigcup_{\theta \in \mathcal{H}(f)} \mathcal{Z}(\theta)} \subset \widetilde{\mathcal{K}};$$

2) существует такое время $0 < \tau < \min\limits_{\substack{\theta\in\mathcal{H}(f)\\ u\in\mathcal{Z}(\theta)}} \beta(\theta, u)$, что $\widehat{\mathcal{Z}}$ отрицательно инвариантно для локального коцикла.

Пусть $\lambda_k(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z))$, где $k = 1, 2, 3$, $\lambda_1(\cdot,\cdot) \geqslant \lambda_2(\cdot,\cdot) \geqslant \lambda_3(\cdot,\cdot)$ – упорядоченные собственные числа симметризованной матрицы Якоби $\frac{1}{2}\Big[\partial_2\widehat{f}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z)) + \partial_2\widehat{f}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z))^T\Big]$ для правой части уравнения (10) вдоль траектории локального коцикла.

Пусть $V(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z))$ есть функция Ляпунова, заданная для всех $t \in [0, \tau]$, $(x, y, z) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ и $\theta \in \mathcal{H}(f)$ следующим образом

$$V(\sigma^t(\theta), x, y, z) := \frac{1}{2}(1 - s)\xi(z - \widehat{b}(\sigma^t(\theta))x),$$

где $\xi \in \mathbb{R}$ – варьируемый параметр.

Для оценки сверху размерности Хаусдорфа множества $\widehat{\mathcal{Z}}$ с помощью теоремы 3 проверяется неравенство

$$\lambda_1(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z)) + \lambda_2(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z)) + \\ + s\lambda_3(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z)) + \frac{d}{dt}V(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, x, y, z)) < 0$$

для всех, $t \in [0, \tau]$, $(x, y, z) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ и $\theta \in \mathcal{H}(f)$.

После некоторых преобразований с использованием оценок (8) и (9) получена верхняя оценка

$$\dim_H \mathcal{Z}(\theta) \leqslant 3 - \frac{2(1-\varepsilon)b_0}{(1+\varepsilon)b_0 + \sqrt{(a_0 + 2b_0)^2 + {b_0}^2 + 1} + \varepsilon \cdot C}, \qquad (11)$$

для всех $\theta \in \mathcal{H}(f)$, где множитель $C > 0$ вычисляется из параметров системы a_0, b_0, ε, l системы (7). Множитель C ограничен сверху для любого малого $\varepsilon \in (0, 1)$.

При $\varepsilon \to 0$ оценка (11) совпадает с извествной верхней оценкой размерности Хаусдорфа компактного инвариантного множества $\mathcal{K}$ автономной системы Рёсслера [3]

$$\dim_H \mathcal{K} \leqslant 3 - \frac{2b_0}{b_0 + \sqrt{(a_0 + 2b_0)^2 + {b_0}^2 + 1}}.$$

Далее доказана модификация теоремы 2 с использованием метода матричных неравенств Ляпунова.

Пусть для уравнения (4) построено расширение на оболочку (5), построен коцикл, порождённый этим уравнением, проведена линеаризация этого коцикла и получено вариационное уравнение (6). Пусть $\widehat{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}\}_{\theta\in\mathcal{H}(f)}$ – неавтономное множество для коцикла.

Пусть $\widehat{J}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u)) := \partial_2 \widehat{f}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u))$ – матрица Якоби правой части системы (5).

Теорема 4. *Пусть для коцикла, порождённого уравнением (5) выполнены следующие условия:*

1) предположения **(A1)** *и* **(A2)** *теоремы 2;*

2) существует компактное множество $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\overline{\bigcup_{\theta\in\mathcal{H}(f)} \mathcal{Z}(\theta)} \subset \widetilde{\mathcal{K}};$$

3) существуют непрерывная на $\mathcal{H}(f)$ функция Q, такая что для любого $\theta \in \mathcal{H}(f)$ $\widehat{Q}(\sigma^{(\cdot)}(\theta))$ – непрерывная симметричная положительно определённая матричная функция порядка $n \times n$; и непрерывная на $\mathcal{H}(f)$ функция γ, такая что для любого $\theta \in \mathcal{H}(f)$ $\widehat{\gamma}(\sigma^{(\cdot)}(\theta), \varphi^{(\cdot)}(\theta, \cdot)) : \mathbb{R}_+ \times \widetilde{\mathcal{K}} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, для которых имеет место матричное неравенство

$$\widehat{J}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u))^T \widehat{Q}(\sigma^t(\theta)) + \widehat{Q}(\sigma^t(\theta)) \widehat{J}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u)) + \\ + 2\widehat{\gamma}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u)) \widehat{Q}(\sigma^t(\theta)) \geqslant 0,$$

для всех $(\theta, u) \in \mathcal{H}(f) \times \widetilde{\mathcal{K}}$, $t \in \mathbb{R}_+$;

4) существуют такие $\tau > 0$ и $d \in (0, n]$, что

$$\int\limits_0^\tau [(n-d)\widehat{\gamma}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u)) + \operatorname{tr} \widehat{J}(\sigma^t(\theta), \varphi^t(\theta, u))] dt < 0,$$

для любых $(\theta, u) \in \mathcal{H}(f) \times \widetilde{\mathcal{K}}$, и

$$\lambda_1^{d/2}\left(\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))\right) \lambda_1^{d/2}\left(\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))^{-1}\right) < 1,$$

для любых $\theta \in \Theta$.

Тогда $\dim_H \mathcal{Z}(\theta) \leqslant d$ для каждого $\theta \in \mathcal{H}(f)$.

В условии 3) неравенство означает, что симметричная матрица в левой части неотрицательно определена.

В условии 4) $\lambda_1\left(\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))\right)$ и $\lambda_1\left(\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))^{-1}\right)$ для всех $\theta \in \mathcal{H}(f)$ обозначают наибольшие собственные числа матриц $\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))$ и $\widehat{Q}(\sigma^\tau(\theta))^{-1}$, соответственно.

В третьей главе приводятся результаты численных экспериментов по локализации глобальных $\mathcal{B}$-аттракторов коциклов, порождённых системой Лоренца с различными непрерывными возмущениями. По результатам экспериментов можно проследить зависимость этих аттракторов от класса функции возмущения и параметров.

Список цитируемой литературы.

1. Duady A., Oesterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série A. 1980. № 290. P. 1135–1138.

2. Kloeden P. E., Schmalfuß B. Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization // Numerical Algorithms. 1997. V. 14, № 1-3. P. 141–152.

3. Leonov G. A., Boichenko V. A. Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors // Acta Applicandae Mathematica. 1992. V. 26. P. 1–60.

4. Miller R. K., Sell G. R. Existence, uniqueness and continuity of solutions of integral equations // Annali di Mathematica Pura ed Applicata. 1968. V. 80. P. 135-152.

5. Wakeman D. R. An application of topological dynamics to obtain a new invariance property for non-autonomous ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. 1975. V. 17, Iss. 2. P. 259-295.

6. Бебутов М. В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень Механико-математического факультета МГУ. 1940. Т. 5. С. 1-52.

7. Леонов Г. А. Об оценках хаусдорфовой размерности аттракторов // Вестник ЛГУ. Серия 1. 1991. Вып. 3. С. 41-44.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1*. Леонов Г. А., Райтманн Ф., Слепухин А. С. Верхние оценки хаусдорфовой размерности отрицательно инвариантных множеств локальных коциклов // Доклады Академии Наук. 2011. Т. 439, № 6. С. 736-739.

2*. Райтманн Ф., Слепухин А. С. О верхних оценках размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантных множеств локальных коциклов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. 2011. Вып. 4. С. 61-70.

3*. Leonov G. A., Reitmann V., Slepukhin A. S. Upper Hausdorff dimension estimates for the global attractors of non-autonomous systems / Abstracts of the "Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial" conference, January 11-16, 2010, Saint-Petersburg, Russia. 2010. P. 60-63.

4*. Leonov G. A., Reitmann V., Slepukhin A. S. Lyapunov functions in Hausdorff dimension estimates of cocycle attractors / Proceedings of the 5^{th} International Conference "PhysCon", September 5-8, 2011, León, Spain. 2011.

5*. Slepukhin A. S. Lyapunov functions in Hausdorff dimension estimates of cocycle attractors / Proceedings of the 2^{nd} International Conference "Science and Progress", November 14-18, 2011, Saint-Petersburg, Russia. 2011.