

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

НЕЗДЕРОВ Александр Александрович

**АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ  
НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ ЗАДАЧИ  
С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2012

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор ЮШКОВ Михаил Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор ЛЕСТЕВ Александр Михайлович  
(Санкт-Петербургский государственный  
университет аэрокосмического  
приборостроения)

кандидат физико-математических наук,  
доцент ЕРШОВ Виктор Иванович  
(Тутаевский филиал ФГБОУ ВПО  
«РГТА имени П.А. Соловьева»)

Ведущая организация: Балтийский государственный технический  
университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова

Защита состоится 31 мая 2012 г. в 16 часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, С.-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9.

Автореферат разослан ".....".....2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



Е.В. Кустова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы и ее цель.** Предлагаемая работа посвящена созданию математической модели движения автомобиля как механической системы с освобождающими связями. Решение различных проблем, связанных с эксплуатацией автомобиля, является актуальной задачей. В том числе, весьма существенными являются вопросы, связанные с его поведением в аварийных ситуациях, возникающих именно при освобождении от связей. Решение данных проблем, основанное на методах аналитической механики, имеет важное практическое значение, поэтому тема диссертации актуальна.

**Научная новизна.** Для создания математической модели движения автомобиля в сложных условиях на основе применения методов аналитической механики требуется изложение основ этой научной дисциплины. В работе дается авторская методическая разработка основных положений аналитической механики в свете подхода к этому вопросу, изложенному в монографии С.А. Зегжды, Ш.Х. Солтаханова, М.П. Юшкова «Неголономная механика. Теория и приложения» (М.: Наука. 2009. 344 с). При этом большое внимание уделяется вопросам трактовки понятия возможного перемещения в неголономных системах. На основе критического анализа научной переписки между ведущими учеными Советского Союза Н.Н. Поляховым и В.В. Румянцевым проводится исследование единства и взаимосвязи вариационных принципов механики. Изложенный материал используется для исследования математических моделей движения автомобиля в продольном движении при его разгоне с учетом возможности пробуксовки ведущих колес и для изучения аварийной ситуации при боковом движении автомобиля с учетом возможности его заноса.

### Результаты, выносимые на защиту:

**1.** Исследована взаимосвязь и установлено единство дифференциальных вариационных принципов механики. Показано, что определение возможных перемещений в соответствии с постулатами Четаева эквивалентно определению возможных скоростей по Журдену. Доказана справедливость утверждения Н.Н. Поляхова, согласно которому принципы «более низшего порядка» получаются как следствие из принципов «более высокого порядка».

**2.** Впервые в научный оборот введена научная переписка Н.Н. Поляхова и В.В. Румянцева. Эта переписка позволяет проследить за тем, как устанавливалась векторная структура реакций неголономных связей, как формулировалось понятие идеальности неголономных связей, как выяснялась иерархия дифференциальных вариационных принципов механики. Переписка помогает исследовать взаимосвязь и единство дифференциальных вариационных принципов механики.

**3.** Исследовано продольное движение автомобиля при разгоне с учетом возможности пробуксовки ведущих колес на основе решения голономной задачи с освобождающей связью. Изучен процесс освобождения от связи и ее восстановление, сопровождающееся ударом. Рассмотрены движения переднеприводных и заднеприводных автомобилей.

**4.** Изучено движение автомобиля на повороте с возможностью его заноса как неголономной задачи с освобождающими связями. Рассмотрены случаи освобождения от связей и их восстановления. Исследовано движение переднеприводных и заднеприводных автомобилей.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным приме-

нением к решению поставленных задач классических методов аналитической механики, математического анализа, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии. Результаты, относящиеся к решению конкретных задач, согласуются с выводами других авторов и с экспериментальными данными.

**Теоретическое и практическое значение.** Рассмотрены некоторые вопросы аналитической механики и исследованы на основе методов аналитической механики математические модели продольного движения автомобиля при его разгоне с возможностью учета пробуксовки ведущих колес и его бокового движения с возможностью учета его заноса. Эти модели основаны на изучении движения механической системы при учете возможности освобождения от связей, наложенных на ее движение.

**Апробация работы.** Материалы диссертации докладывались на международной научной конференции «7. Magdeburger Maschinenbau-Tage» (2005 г.), на международных научных конференциях по механике «Четвертые Поляховские чтения» (2006 г.), «Пятое Поляховские чтения» (2009 г.), «Шестые Поляховские чтения», (2012 г.), на международной конференции «Седьмые Окуневские чтения» (2011 г.), на заседании секции теоретической механики им. Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (2007 г.), на заседании кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2006, 2011 гг.).

**Публикации.** Основное содержание диссертации отражено в 15 научных публикациях. Среди научных работ [1–3], опубликованных в рекомендованном ВАК'ом журнале, статья [2] выполнена без соавторов. В совместных работах [1, 3], выполненных в соавторстве с М.П. Юшковым, основные результаты получены автором, соавтору принадлежит постановка рассматриваемых задач. В работах [7, 9] М.П. Юшкову принадлежит постановка задачи, в работе [6] Е.М. Носова проводила часть численных расчетов, в работах [14, 15] А.Б. Бячков участвовал в постановке задачи, а С.А. Панова и Ю.А. Белоусов провели некоторые численные расчеты.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из краткой характеристики работы, введения, трех частей, заключения и списка литературы. Число иллюстраций равно 50. Общий объем работы составляет 174 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** кратко излагаются основные этапы развития неголономной механики и основные вопросы изучения движения автомобиля, приводится краткий обзор соответствующей литературы. Подчеркивается, что многие вопросы исследования движения автомобиля совпадают с современными задачами изучения движения мобильных роботов.

В **части I** предлагается авторская методическая разработка основных положений неголономной механики. Для описания несвободного движения системы материальных точек вводится понятие изображающей точки по Герцу. При наложении идеальных голономных связей выведены уравнения Лагранжа второго рода и первого рода для криволинейных координат. Подчеркивается, что распространением этих уравнений для описания движения механической системы с  $s$  степенями свободы фактически вводится дополнительный постулат физики. Итак, считаем, что движение подобной свободной механической системы описывается уравнениями Лагранжа

второго рода ( $M$  – масса всей системы):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} &= Q_\sigma, \quad T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} = \\ &= \frac{M}{2} g_{00} + M g_{0\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{M}{2} g_{\sigma\tau} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau = \frac{M}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \\ \sigma, \tau &= \overline{1, s}, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s}, \quad q^0 = t, \quad \dot{q}^0 = 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Введем в рассмотрение абстрактное многообразие  $V$  всех мыслимых положений изучаемой механической системы, которые она может иметь в данный момент времени  $t$ . Зафиксируем некоторую точку с координатами  $q^\sigma$ ,  $\sigma = \overline{1, s}$ , этого многообразия. Предположим, что старые и новые координаты этой точки выражаются друг через друга по формулам

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*), \quad q_*^\rho = q_*^\rho(t, q), \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}. \quad (1.2)$$

Пусть  $T(q, V)$  является касательным пространством к абстрактному многообразию  $V$ . Это пространство состоит из касательных векторов

$$\delta \mathbf{y} = \delta q^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \delta q_*^\rho \mathbf{e}_\rho^*, \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}, \quad (1.3)$$

эвклидову структуру в нем можно ввести, используя инвариантность относительно систем отсчета квадрата длины вектора (1.3):

$$(\delta \mathbf{y})^2 = g_{\sigma\tau} \delta q^\sigma \delta q^\tau = g_{\sigma^* \tau^*}^* \delta q_*^{\sigma^*} \delta q_*^{\tau^*}, \quad \sigma, \tau, \sigma^*, \tau^* = \overline{1, s}. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4) коэффициенты  $g_{\sigma\tau}$  и  $g_{\sigma^* \tau^*}^*$  являются элементами положительно определенной квадратичной формы  $T^{(2)}$ .

В свою очередь инвариантность элементарной работы позволяет ее записать в виде

$$\delta A = Q_\sigma \delta q^\sigma = Q_\rho^* \delta q_*^\rho. \quad (1.5)$$

Если здесь коэффициенты  $Q_\sigma$  и  $Q_\rho^*$  рассматривать как ковариантные компоненты вектора

$$\mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma = Q_\rho^* \mathbf{e}_\rho^*, \quad (1.6)$$

то элементарную работу (1.5) можно переписать в виде  $\delta A = \mathbf{Y} \cdot \delta \mathbf{y}$ . Векторы  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\rho^*$ , и  $\mathbf{e}^\sigma$ ,  $\mathbf{e}_*^\rho$  ( $\sigma, \rho = \overline{1, s}$ ) в формулах (1.3) и (1.6) можно рассматривать как векторы взаимных базисов в касательном пространстве  $T(q, V)$  при использовании криволинейных координат (1.2).

В результате получаем возможность представить уравнения Лагранжа второго рода (1.1) в касательном пространстве  $T(q, V)$  в виде одного векторного уравнения

$$\begin{aligned} M\mathbf{W} &= \mathbf{Y}, \quad \mathbf{W} = (g_{\sigma\tau} \ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma, \alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) \mathbf{e}^\sigma = (\ddot{q}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) \mathbf{e}_\sigma, \\ \Gamma_{\tau, \alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\tau\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\tau} \right), \quad \sigma, \tau = \overline{1, s}, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При наложении на движение механической системы голономных или неголономных связей согласно принципу освобожденности от связей получим векторное уравнение

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}. \quad (1.8)$$

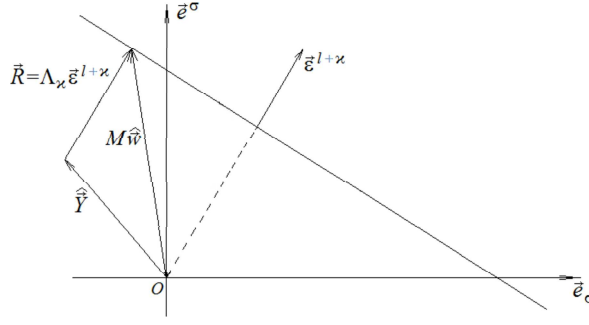


Рис. I.1. Разложение ускорения системы при наличии неголономной связи

Для выявления структуры реакции связей  $\mathbf{R}$  записываются линейные неголономные связи второго порядка

$$\psi^\varkappa(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv a_\sigma^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}) \ddot{q}^\sigma + a_0^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}) = 0, \quad l = s - k, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (1.9)$$

Для построения теории движения неголономных систем в рассмотрение вводятся векторы

$$\widehat{\mathbf{W}} = \ddot{q}^\sigma \mathbf{e}_\sigma, \quad \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - M \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \mathbf{e}_\sigma. \quad (1.10)$$

Уравнения связей (1.9) формируют " $K$ -пространство" размерности  $k$  с базисом

$$\varepsilon^{l+\varkappa} \equiv \nabla'' \psi^\varkappa = \frac{\partial \psi^\varkappa}{\partial \ddot{q}^\sigma} \mathbf{e}_\sigma, \quad \varkappa = \overline{1, k}, \quad \sigma = \overline{1, s}. \quad (1.11)$$

Обобщенный оператор  $\nabla''$  был введен Н.Н. Поляховым.

Показывается, что при выборе реакции из условия ее минимальности по величине реакция идеальных связей представляется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \varepsilon^{l+\varkappa}, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (1.12)$$

Тогда уравнение Ньютона принимает вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \varepsilon^{l+\varkappa}. \quad (1.13)$$

Формулы (1.12) и (1.13) для случая  $s = 2$  и  $k = 1$  поясняются рисунком I.1.

Из уравнения (1.13) получены обобщенные уравнения Маджи и обобщенные уравнения Лагранжа первого рода для неголономных связей второго порядка. При неголономных связях первого порядка они соответственно принимают вид классических уравнений Маджи и уравнений Лагранжа второго рода с множителями. С использованием этих уравнений выведены принципы Даламбера–Лагранжа, Сулова–Журдена и Гаусса.

Большое внимание в работе уделено обсуждению единства и взаимосвязи дифференциальных вариационных принципов механики. В этом большую помощь оказала научная переписка ведущих ученых Советского Союза в области аналитической механики Н.Н. Поляхова и В.В. Румянцева, сохранившаяся в архиве Н.Н. Поляхова.

Согласно взглядам Н.Н. Поляхова, опиравшегося на вариирование по Журдену, можно считать наиболее общим принципом неголономной механики принцип Гаусса, справедливый и для линейных неголономных связей второго порядка. Из него

как следствие получают принципы «более низкого порядка» Сулова–Журдена и Даламбера–Лагранжа.

При историческом пути развития вариационных принципов, справедливость которого отстаивал В.В. Румянцев, их формулирование требовало аксиоматического определения «возможных перемещений». Показано, что эта аксиоматика фактически совпадает с понятием возможных скоростей и возможных ускорений.

В диссертации подчеркивается, что оба подхода оказались справедливыми, в определенном смысле эквивалентными, плодотворными и удачно дополняющими друг друга.

В **части II** разрабатываются две модели движения автомобиля, основанные на применении методов аналитической механики, при этом материал разбит на две главы.

В **ГЛАВЕ 1** рассматривается продольное движение автомобиля с ускорением как движение голономной системы с освобождающей связью. Учитывается возможность проскальзывания ведущих колес. Колеса считаются абсолютно твердыми недеформируемыми. На рис. II.1 представлена расчетная схема для переднеприводного автомобиля. Он состоит из корпуса на рессорах с амортизаторами, в которых учитываются силы вязкого сопротивления, и переднего (1) и заднего (2) двойных колес.  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  – массы корпуса, передних и задних колес;  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  – их моменты инерции относительно центров масс;  $\chi$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  – коэффициенты сил вязкого сопротивления, действующих соответственно на корпус и в амортизаторах;  $c_1$ ,  $c_2$  – коэффициенты жесткости пружин передних и задних колес;  $k_1^{ст}$ ,  $k_1^{дин}$  – статический и динамический коэффициенты силы трения Кулона для ведущих передних колес;  $r_1$ ,  $r_2$  – коэффициенты трения качения для передних и задних колес;  $R_1$ ,  $R_2$  – радиусы соответствующих колес.

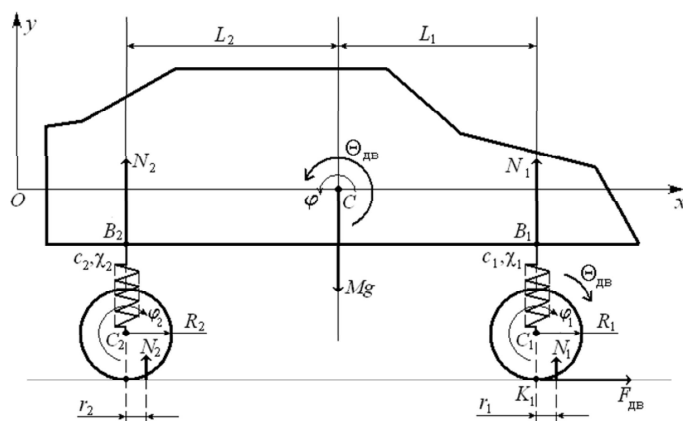


Рис. II.1. Модель движения переднеприводного автомобиля при разгоне

На ведущие колеса со стороны двигателя действует движущий момент  $\Theta_{дв}$ , задаваемый как функция времени. Условие качения без скольжения можно записать в виде дифференциальной линейной связи первого порядка

$$\dot{x} = \dot{\varphi}_1 R_1. \quad (2.1)$$

Связь (2.1) является неудерживающей, автомобиль освобождается от нее, когда наступает проскальзывание ведущих колес, при этом вместо условия (2.1) начинает

выполняться неравенство  $\dot{\varphi}_1 > \dot{x}/R_1$ . При разгоне автомобиля противоположного знака в нем быть не может, поэтому связь оказывается односторонней. Проскальзывание возникает при достижении силой горизонтальной реакции дороги на ведущие колеса автомобиля некоторого «предельного» значения, связанного со статической силой трения Кулона.

Пусть **связь (2.1) выполняется**. Система уравнений Лагранжа второго рода при движении переднеприводного автомобиля без проскальзывания:

$$\begin{aligned}
& \left( M + M_1 + M_2 + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} \right) \ddot{x}(t) = \\
& = \frac{\Theta_{\text{дв}}}{R_1} - \left( M_1 + \frac{ML_2}{L_1 + L_2} \right) \frac{r_1 g}{R_1} - \left( M_2 + \frac{ML_1}{L_1 + L_2} \right) \frac{r_2 g}{R_2} + \\
& + \left( \frac{c_1 r_1}{R_1} + \frac{c_2 r_2}{R_2} \right) y(t) + \left( \frac{c_1 r_1 L_1}{R_1} - \frac{c_2 r_2 L_2}{R_2} \right) \varphi(t) - \chi \dot{x}(t) + \\
& + \left( \frac{\chi_1 r_1}{R_1} + \frac{\chi_2 r_2}{R_2} \right) \dot{y}(t) + \left( \frac{\chi_1 r_1 L_1}{R_1} - \frac{\chi_2 r_2 L_2}{R_2} \right) \dot{\varphi}(t), \tag{2.2} \\
M\ddot{y}(t) & = -(c_1 + c_2)y(t) + (c_2 L_2 - c_1 L_1)\varphi(t) - \\
& - (\chi_1 + \chi_2)\dot{y}(t) + (\chi_2 L_2 - \chi_1 L_1)\dot{\varphi}(t), \\
J\ddot{\varphi}(t) & = \Theta_{\text{дв}} - (c_1 L_1 - c_2 L_2)y(t) - (c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2)\varphi(t) - \\
& - (\chi_1 L_1 - \chi_2 L_2)\dot{y}(t) - (\chi_1 L_1^2 + \chi_2 L_2^2)\dot{\varphi}(t).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части третьего уравнения системы (2.2) описывает влияние движущего момента на корпус. Учет влияния этого момента имеет принципиальное значение, к сожалению, в ряде исследований его не учитывают.

При **движении с проскальзыванием** необходимо введение новой «самостоятельной» обобщенной координаты  $\varphi_1$ , характеризующей угол поворота ведущих передних колес. Система уравнений Лагранжа второго рода приобретает вид:

$$\begin{aligned}
& \left( M + M_1 + M_2 + \frac{J_2}{R_2^2} \right) \ddot{x}(t) = \\
& = \left( M_1 + \frac{ML_2}{L_1 + L_2} \right) k_1^{\text{днн}} g - \left( M_2 + \frac{ML_1}{L_1 + L_2} \right) \frac{r_2 g}{R_2} + \\
& + \left( \frac{c_2 r_2}{R_2} - c_1 k_1^{\text{днн}} \right) y(t) - \left( c_1 k_1^{\text{днн}} L_1 + \frac{c_2 r_2 L_2}{R_2} \right) \varphi(t) - \chi \dot{x}(t) - \\
& - \left( \chi_1 k_1^{\text{днн}} - \frac{\chi_2 r_2}{R_2} \right) \dot{y}(t) - \left( \chi_1 k_1^{\text{днн}} L_1 + \frac{\chi_2 r_2 L_2}{R_2} \right) \dot{\varphi}(t), \tag{2.3} \\
M\ddot{y}(t) & = -(c_1 + c_2)y(t) + (c_2 L_2 - c_1 L_1)\varphi(t) - \\
& - (\chi_1 + \chi_2)\dot{y}(t) + (\chi_2 L_2 - \chi_1 L_1)\dot{\varphi}(t), \\
J\ddot{\varphi}(t) & = (c_2 L_2 - c_1 L_1)y(t) - (c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2)\varphi(t) + \\
& + (\chi_2 L_2 - \chi_1 L_1)\dot{y}(t) - (\chi_1 L_1^2 + \chi_2 L_2^2)\dot{\varphi}(t) + \Theta_{\text{дв}}, \\
J_1 \ddot{\varphi}_1(t) & = \Theta_{\text{дв}} - \left( M_1 + \frac{ML_2}{L_1 + L_2} \right) (r_1 + k_1^{\text{днн}} R_1) g + \\
& + c_1 (r_1 + k_1^{\text{днн}} R_1) (y(t) + L_1 \varphi(t)) + \chi_1 (r_1 + k_1^{\text{днн}} R_1) (\dot{y} + L_1 \dot{\varphi}).
\end{aligned}$$



Запишем динамическое условие отсутствия проскальзывания:

$$\Theta_{\text{дв}} - r_1 N_1 - J_1 \frac{\ddot{x}}{R_1} = FR_1 < k_1^{\text{ст}} N_1 R_1. \quad (2.4)$$

Системой уравнений (2.2) можно пользоваться до тех пор, пока найденные из нее величины  $N_1$  и  $\ddot{x}$  удовлетворяют неравенству (2.4). Если в некоторый момент времени  $t_1$  неравенство (2.4) нарушилось, и проскальзывание передних колес началось, то следует перейти к интегрированию системы (2.3). Теперь на ведущие колеса действует динамическая сила трения Кулона  $k_1^{\text{дин}} N_1$ . Наложенная на ведущие колеса неголономная связь является неудерживающей и односторонней. Поэтому если при интегрировании системы (2.3) в некоторый момент времени  $t_2$  выполнится равенство  $\dot{\varphi}_1 = \dot{x}/R_1$ , то это будет означать окончание проскальзывания ведущих колес и восстановление связи (2.1). Начиная с момента времени  $t_2$  следует перейти к интегрированию системы дифференциальных уравнений (2.2).

**Пример решения задачи.** Рассмотрим разгон гипотетического переднеприводного легкового автомобиля. Пусть рассматриваемый промежуток времени равен 50 секундам. В начальный момент времени ( $t_0 = 0$ ) автомобиль неподвижен и начинает разгоняться под действием движущего момента, заданного в  $H \cdot м$  (время  $t$  измеряется в секундах):

$$\Theta_{\text{дв}} = \begin{cases} 750 \sin \frac{\pi t}{40}, & t \leq 37, \\ 750 \sin \frac{37\pi}{40}, & t > 37, \end{cases} \quad (2.5)$$

$M = 955 \text{ кг}$ ;  $J = 1394.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\chi = 10 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $L_1 = 1.17 \text{ м}$ ;  $L_2 = 1.307 \text{ м}$ ;  $M_1 = M_2 = 14 \text{ кг}$ ;  $J_1 = 21.52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $J_2 = 1.076 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $R_1 = R_2 = 0.392 \text{ м}$ ;  $c_1 = c_2 = 20000 \text{ Н/м}$ ;  $\chi_1 = \chi_2 = 1000 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $r_1 = r_2 = 0.0024 \text{ м}$ ;  $k_1^{\text{ст}} = 0.3$ ;  $k_1^{\text{дин}} = 0.25$ ;  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ .

Учитываются переходы от системы (2.2) к системе (2.3), а затем снова к системе (2.2). Они поясняются с помощью рис. П.2, на котором сплошной линией показаны статическая  $F_{\text{тр}}^{\text{ст}} = k_1^{\text{ст}} N_1$  и динамическая  $F_{\text{тр}}^{\text{дин}} = k_1^{\text{дин}} N_1$  силы трения Кулона, а штрихованной линией – движущая сила трения

$$F = \frac{\Theta_{\text{дв}}}{R_1} - \frac{r_1 N_1}{R_1} - \frac{J_1 \ddot{x}}{R_1^2}. \quad (2.6)$$

От момента времени  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 14.004 \text{ с}$  движущая сила трения возрастает, однако неравенство (2.4) выполняется. Поэтому ведется интегрирование системы (2.2). Начиная с момента времени  $t_1$  наступает движение с проскальзыванием. Оно описывается системой (2.3), начальные данные для которой находятся из значений функций, являвшихся решением системы (2.2) при  $t_1 = 14.004 \text{ с}$ . При интегрировании системы (2.3) определяется момент времени  $t_2 = 38.747 \text{ с}$ , когда мгновенно накладывается связь (2.1), и наступает возобновление движения без проскальзывания. Оно описывается системой (2.2), начальные данные для которой находятся из значений функций, являвшихся решением системы (2.3) при  $t_2 = 38.747 \text{ с}$ . Дальнейшая проверка условия (2.4) позволяет сделать вывод о том, что при законе изменения движущего момента (2.5) вплоть до 50-й секунды нового проскальзывания ведущих колес не возникает.

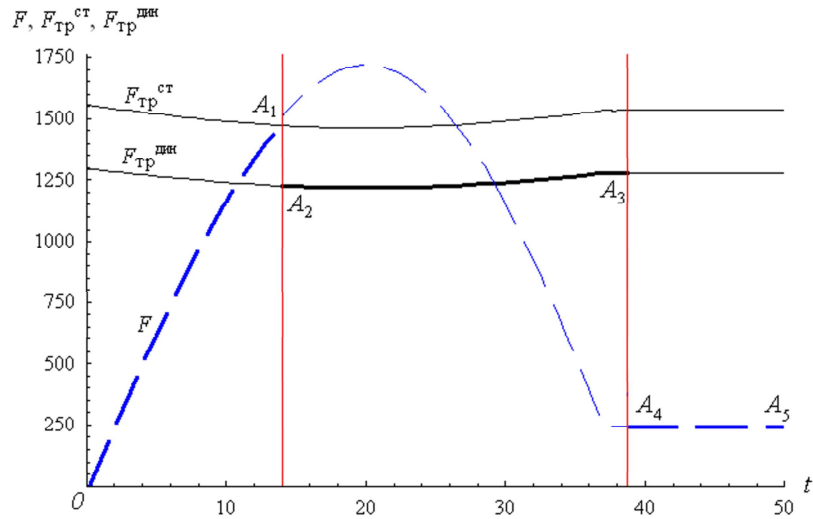


Рис. П.2. Силы, действующие на ведущие колеса автомобиля

Переход при  $t_2 = 38.747$  с от системы (2.3) к системе (2.2), обусловленный мгновенным наложением связи (2.1), сопровождается скачком ускорения, который связан с уменьшением величины силы сцепления ведущих колес с дорогой скачком от значения  $k_1^{дин} N_1$  до величины  $F_{дв}$ . Данный скачок силы сцепления ведущих колес с дорогой является интересной особенностью разгона автомобиля при наличии проскальзывания ведущих колес.

Показано, что с точки зрения характеристик разгона заднеприводный автомобиль имеет преимущество по сравнению переднеприводным.

В ГЛАВЕ 2 рассматривается боковое движение автомобиля на повороте при учете возможности заноса его осей. Движение в горизонтальной плоскости будем изучать относительно неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  (см. рис. П.3). Положение автомобиля будем задавать обобщенными координатами  $q^1 = \varphi$ ,  $q^2 = \xi_C$ ,  $q^3 = \eta_C$ . Угол  $\theta$  является заданной функцией времени  $\theta = \theta(t)$ .

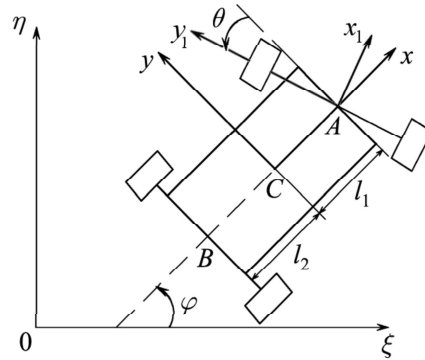


Рис. П.3. Схема движения автомобиля на повороте

На движение автомобиля наложены две неголономные связи

$$\varphi^1 \equiv -\dot{\xi}_C \sin \varphi + \dot{\eta}_C \cos \varphi - l_2 \dot{\varphi} = 0, \quad (2.7)$$

$$\varphi^2 \equiv -\dot{\xi}_C \sin(\varphi + \theta) + \dot{\eta}_C \cos(\varphi + \theta) + l_1 \dot{\varphi} \cos \theta = 0, \quad (2.8)$$

выражающие отсутствие боковых скольжений задней и передней осей экипажа. Экипаж приводится в движение силой  $F_1(t)$ , действующей вдоль его продольной оси  $Cx$ , учитывается сила сопротивления  $F_2(v_C)$ , действующая в противоположную сторону скорости  $\mathbf{v}_C$  центра масс  $C$  корпуса.

При выполнении связей (2.7) и (2.8) уравнение Маджи имеет вид

$$\begin{aligned} J^* \ddot{\varphi} + J_2 \ddot{\theta} + M_2 l_1 (-\ddot{\xi}_C \sin \varphi + \ddot{\eta}_C \cos \varphi) - F_1 l_1 \sin \theta + \\ + [M^* \ddot{\xi}_C - M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - F_1(t) \cos(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\xi}_C / v_C] \times \\ \times [l_1 \cos \varphi \cos \theta + l_2 \cos(\varphi + \theta)] / \sin \theta + \\ + [M^* \ddot{\eta}_C + M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\eta}_C / v_C] \times \\ \times [l_1 \sin \varphi \cos \theta + l_2 \sin(\varphi + \theta)] / \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если заданы начальные условия и аналитические представления функций  $F_1(t)$ ,  $F_2(v_C)$ , то после численного интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений (2.7), (2.8), (2.9) найдем закон движения автомобиля  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\xi_C = \xi_C(t)$ ,  $\eta_C = \eta_C(t)$ . Теперь из второй группы уравнений Маджи

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = [M^* \ddot{\xi}_C - M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - F_1(t) \cos(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\xi}_C / v_C] \times \\ \times \cos(\varphi + \theta) / \sin \theta - \\ - [M^* \ddot{\eta}_C + M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\eta}_C / v_C] \times \\ \times \cos \varphi / \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = [M^* \ddot{\xi}_C - M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - F_1(t) \cos(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\xi}_C / v_C] \times \\ \times \sin(\varphi + \theta) / \sin \theta - \\ - [M^* \ddot{\eta}_C + M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\eta}_C / v_C] \times \\ \times \sin \varphi / \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

после подстановки в них полученного закона движения автомобиля найдем закон изменения обобщенных реакций  $\Lambda_i = \Lambda_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Эти функции позволяют исследовать возможность выполнения неголономных связей (2.7), (2.8). Если силы реакций окажутся больше сил, обеспечиваемых силами трения Кулона, то эти связи не будут выполняться, и автомобиль начнет скользить вдоль осей, на которых укреплены колеса.

В работе рассмотрен принципиально важный вопрос о связи обобщенной реакции неголономной связи с силой реакции и показано, что обобщенная реакция  $\Lambda$  равна проекции силы реакции связи  $\mathbf{R}$  на направление вектора, вдоль которого связью запрещено боковое движение. Для векторов реакций связей получены формулы

$$\mathbf{R}_B = \Lambda_1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_A = \Lambda_2 (-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta), \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  являются ортами системы  $Cxy$ . При нарушении неголономных связей возникающие при этом силы трения могут быть представлены в виде

$$\mathbf{R}_B^{\text{TP}} = -\Lambda_1^{\text{TP}} \text{sign}(\varphi^1) \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_A^{\text{TP}} = -\Lambda_2^{\text{TP}} \text{sign}(\varphi^2) (-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta).$$

Рассмотрим теперь **движение автомобиля на повороте с неудерживающими связями**. Динамическими условиями выполнения кинематических связей (2.7),

(2.8) являются требования, чтобы силы взаимодействия колес с дорогой не превосходили соответствующих сил трения Кулона. Для ведомых задних колес это выражается неравенством

$$|\Lambda_1| < F_1^{\text{TP}} = k_1 N_1. \quad (2.13)$$

При рассмотрении ведущих передних колес следует учесть, что величина силы взаимодействия этих колес с дорогой  $\mathbf{F}_B$  определяется векторной суммой движущей силы  $\mathbf{F}_1$  и боковой реакции  $\mathbf{R}_A$ , задаваемой формулой (2.12) (см. рис. II.4,а). Для отсутствия бокового скольжения передней оси должно выполняться условие:

$$F_A = \sqrt{(F_1)^2 + (\Lambda_2)^2} < F_2^{\text{TP}} = k_2 N_2. \quad (2.14)$$

В формулах (2.13) и (2.14)  $F_1^{\text{TP}}$ ,  $F_2^{\text{TP}}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  – силы трения и коэффициенты трения между соответствующими колесами и дорогой,  $N_1$ ,  $N_2$  – нормальные давления на оси. При  $F_A > F_2^{\text{TP}}$  связь становится неудерживающей и имеем

$$(F_A)^2 \equiv (F_2^{\text{TP}})^2 \equiv (k_2 N_2)^2 = (F_1)^2 + (\Lambda_2^{\text{TP}})^2. \quad (2.15)$$

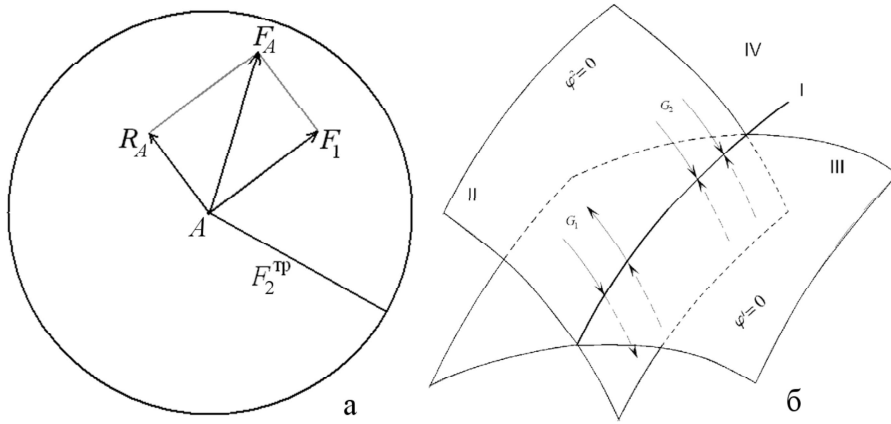


Рис. II.4. Силы, действующие на передние ведущие колеса (а).  
Пояснение возможных типов движения автомобиля (б)

**Возможные типы движения автомобиля.** На рис. II.4,б в фазовом пространстве переменных  $q^\sigma$ ,  $\dot{q}^\sigma$ ,  $\sigma = \overline{1, 3}$ , условно изображены две гиперповерхности. Первая соответствует связи (2.7), а вторая – связи (2.8). При движении без проскальзывания (I-ый тип движения) точка фазового пространства находится на жирной линии I, при II-ом типе движения заносит заднюю ось автомобиля, при III-ем типе движения заносит переднюю ось, при IV-ом типе – заносит обе оси, и изображающая точка находится вне гиперповерхностей. Из каждого типа движения изображающая точка может перейти в любой другой тип движения. Область  $G_1$  иллюстрирует мгновенную остановку заднего моста и его движение в обратную сторону при II-ом типе движения, а область  $G_2$  – возможность восстановления связи  $\varphi^1 = 0$  и возобновление I-го типа движения.

В качестве примера приведем уравнения движения для **III-го типа движения**:

$$\begin{aligned} J^* \ddot{\varphi} + J_2 \ddot{\theta} + M_2 l_1 (-\ddot{\xi}_C \sin \varphi + \ddot{\eta}_C \cos \varphi) - F_1 l_1 \sin \theta - \Lambda_2^{\text{TP}} l_1 \cos \theta + \\ + [M^* \ddot{\eta}_C + M_2 l_1 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C) \dot{\eta}_C / v_C - \\ - \Lambda_2^{\text{TP}} \cos(\varphi + \theta)] \times l_2 / \cos \varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$M^*\ddot{\xi}_C - M_2l_1(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - F_1(t) \cos(\varphi + \theta) + F_2(v_C)\dot{\xi}_C/v_C + \Lambda_2^{\text{TP}} \sin(\varphi + \theta) + \text{tg}(\varphi + \theta)[M^*\ddot{\eta}_C + M_2l_1(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C)\dot{\eta}_C/v_C - \Lambda_2^{\text{TP}} \cos(\varphi + \theta)] = 0, \quad (2.17)$$

$$\Lambda_1 = [M^*\ddot{\eta}_C + M_2l_1(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - F_1(t) \sin(\varphi + \theta) + F_2(v_C)\dot{\eta}_C/v_C - \Lambda_2^{\text{TP}} \cos(\varphi + \theta)] / \cos(\varphi). \quad (2.18)$$

Для получения закона движения автомобиля необходимо интегрировать совместно уравнение связи (2.7) и уравнения (2.16) и (2.17), а выражение (2.18) дает обобщенную реакцию единственной оставшейся связи. Если при полученном значении  $\Lambda_1$  выполняется динамическое условие (2.13) осуществления связи (2.7), то продолжается III-ий тип движения. Если же условие (2.13) нарушится, то автомобиль перейдет к IV-му типу движения. Одновременно с проверкой неравенства (2.13) следует непрерывно следить за тем, не начнется ли выполнение связи  $\varphi^2 = 0$ , после чего автомобиль переходит к I-му типу движения.

Приведем **расчет движения конкретного автомобиля на повороте**. Рассмотрим движение гипотетического легкового малолитражного заднеприводного автомобиля, имеющего  $M_1 = 1000 \text{ кг}$ ;  $M_2 = 110 \text{ кг}$ ;  $J_1 = 1500 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_2 = 30 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $l_1 = 1.2 \text{ м}$ ;  $l_2 = 1.2 \text{ м}$ ;  $k_{1\text{TP}} = 0.4$ ;  $k_{2\text{TP}} = 0.4$  при силовых характеристиках  $F_2(v_C) = k_2 v_C \text{ Н}$ ;  $k_2 = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}$ . Вначале автомобиль движется прямолинейно в течение восьми секунд, причем  $\varphi = \pi/6$ ,  $F_1(t) = 200t$ . После восьми секунд водитель начинает поворачивать руль автомобиля на угол  $\theta = \pi(t - 8)/8$ , при этом  $F_1(t) = 1600$ . По графикам рис. II.5 видно, что при  $t_1 = 9.5147$ ,  $\theta(t_1) = 0.5948$  нарушается условие выполнения связи (2.8). Поэтому при  $8 < t < 9.5147$  автомобиль совершает I-ый тип движения, а после  $t_1 = 9.5147$  переходит к III-му типу движения.

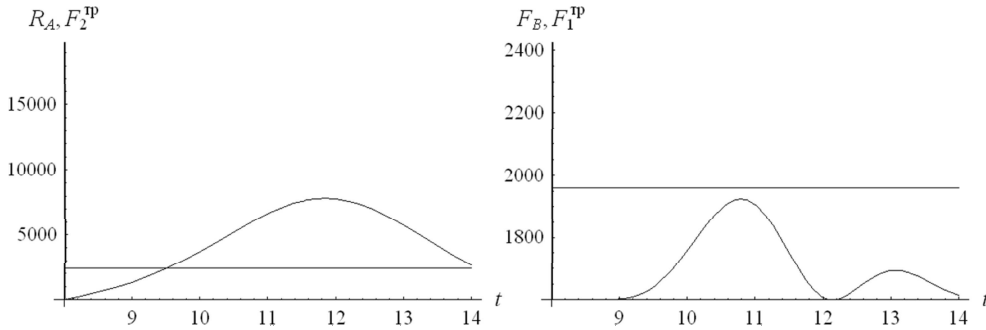


Рис. II.5. Возникновение III-го типа движения

После наступления III-го типа движения водитель пытается устранить боковой занос, полагая  $F_1 = 0$  и задавая закон  $\theta = -10(t - t_1) + \theta_1$ . Как видно из рис. II.6, при этом движении сила  $F_B$  не превышает силу трения в промежутке времени  $9.5147 < t < 13$ , т. е. динамическое условие осуществления связи (2.7) выполняется. Согласно рис. II.6 при  $t_2 = 9.8415$  начинает выполняться условие  $\varphi^2 = 0$ , при этом величина реакции связи  $|\Lambda_2|$ , как показывают вычисления, становится близкой к силе трения колес с дорогой, и передний мост перестает совершать боковые движения. Пусть теперь при  $t_2 < t < 14$  движущая сила изменяется по закону  $F_1 = 200(t - t_2)/(2 - t_2)$ . В этом случае выполняются динамические условия выполнения связей, и автомобиль совершает I-ый тип движения. На рис. II.7 представлены графики функций на всем промежутке времени исследования движения автомобиля.

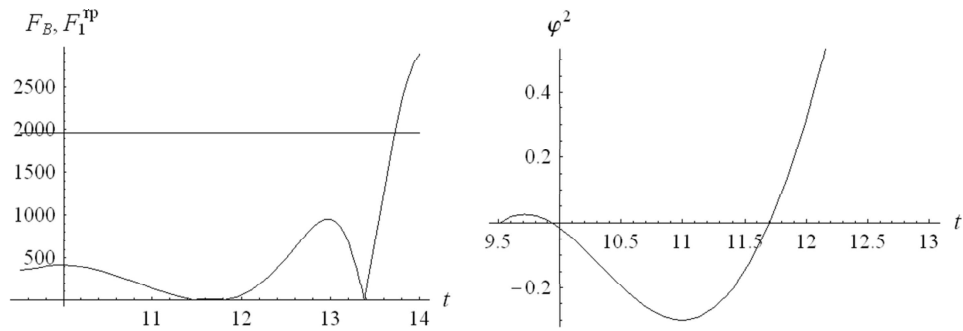


Рис. II.6. Возвращение к I-му типу движения

Показано, что с точки зрения безопасности движения на повороте переднеприводной автомобиль предпочтительнее.

В конце главы 2 обсуждается рациональный выбор квазискоростей.

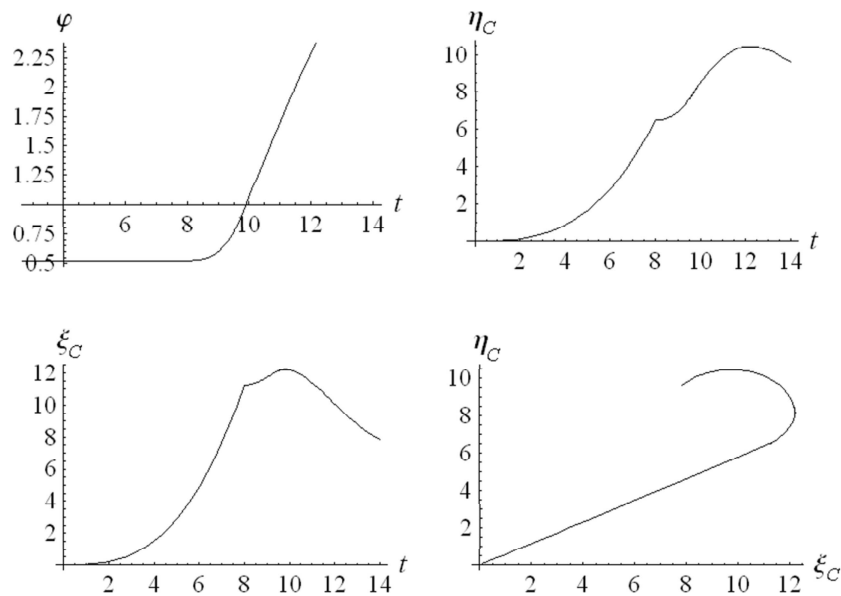


Рис. II.7. Графики изменения координат автомобиля

**Часть III** диссертации содержит приложения, касающиеся некоторых вопросов, изложенных в предыдущем материале диссертации.

Приложение А посвящено нахождению ковариантных компонент вектора реакции при использовании базисов исходной криволинейной системы координат  $q = (q^1, \dots, q^s)$ .

В Приложении В дается краткий критический анализ недостаточно известных и недостаточно оцененных по их научному значению трудов норвежского ученого Л. Юнсена. Л. Юнсен получил целый ряд первостепенных результатов в неголономной механике: он независимо от других авторов и одним из первых написал условия типа Четаева, записал «расширенную» форму принципа Даламбера–Лагранжа, получил основные формы уравнений движения материальных систем при наличии нелинейных неголономных связей. Для нас особенно интересно выделение Л. Юнсенем бесконечно-малого элемента плоскости, перпендикулярного единичной нормали  $\vec{n}$ , задаваемой уравнением нелинейной неголономной связи. Н.Н. Поляхов завершил

идею Л. Юнсена относительно вектора  $\vec{n}$  и ввел в рассмотрение обобщенный оператор Гамильтона.

В Приложении *C* рассматривается научная переписка между Н.Н. Поляховым и В.В. Румянцевым. Приводятся отсканированные письма этих ученых, сохранившиеся в архиве Н.Н. Поляхова. Критический анализ переписки позволил исследовать в части I единство и взаимосвязь дифференциальных вариационных принципов механики.

В Приложении *D* изучается возможность плавного изменения между значениями статического и динамического коэффициентов трения при учете начала и окончания пробуксовки ведущих колес автомобиля. Это позволяет устранить скачок сцепной силы в начале этапа проскальзывания ведущих колес автомобиля. В то же время скачок силы при окончании проскальзывания сохраняется, что имеет принципиальное значение, так как связано с восстановлением связи, сопровождаемым ударом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в представленной работе дается авторская версия некоторых вопросов неголономной механики, базирующаяся на подходе, изложенном в монографии С.А. Зегжда, Ш.Х. Солтаханов, М.П. Юшков «Неголономная механика. Теория и приложения» (М.: Наука. 2009. 344 с). Приводится подробный вывод вариационных дифференциальных принципов механики и исследуется их взаимосвязь и единство. Здесь большую роль играет научная переписка Н.Н. Поляхова и В.В. Румянцева, сохранившаяся в архиве Н.Н. Поляхова. Эта переписка впервые вводится в научный оборот. Дается критический обзор мало известных работ Л. Юнсена по неголономной механике и проследивается их влияние на создание Н.Н. Поляховым обобщенного оператора Гамильтона, имеющего принципиальное значение для описания реакции неголономных связей. В первой части работы получены дифференциальные уравнения движения и выражения реакций связей, наложенных на систему. Они активно используются в дальнейшем при изучении движения автомобиля. Здесь изучаются две математические модели, описывающие продольное и боковое движения автомобиля. Обе они предполагают возможность освобождения от связей, наложенных на движение автомобиля. В результате этого при разгоне автомобиля у ведущих колес удастся найти начало и окончание проскальзывания, а при движении на повороте – возможность заноса или передней, или задней, или обеих осей одновременно. Составлены программы для каждой из моделей и приведены результаты расчетов.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНО В ОПУБЛИКОВАННЫХ НАУЧНЫХ РАБОТАХ АВТОРА

**В журнале, рекомендованном ВАК'ом:**

[1] **Нездеров А.А., Юшков М.П.** Продольное движение автомобиля с ускорением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2006. Вып. 2. С.118–124.

[2] **Нездеров А.А.** Движение переднеприводного автомобиля на повороте // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2007. Вып. 2. С.134–139.

[3] **Нездеров А.А., Юшков М.П.** Взаимосвязь и единство дифференциальных вариационных принципов механики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2010. Сер.1. Вып.1. С.112–126.

### **В научных работах:**

[4] **Nezderov A.A.** Car straight-line motion with acceleration // 7. Magdeburger Maschinenbau-Tage. Magdeburg, 11–12. Oktober 2005. Tagungsband. P. 169–176.

[5] **Нездеров А.А.** О движении автомобиля на повороте // Тезисы докладов Международной научной конференции по механике “Четвертые Поляховские чтения”. СПб, 7–10 февраля 2006 г. СПб: Издательство “ВВМ”. 2006. С. 68.

[6] **Нездеров А.А., Носова Е.М.** К вопросу о движении автомобиля на повороте // Тезисы докладов Международной конференции “Пятое Окуневские чтения”. СПб, 26–30 июня 2006. С. 23.

[7] **Нездеров А.А., Юшков М.П.** О взаимосвязи принципа Сулова-Журдена и обобщенного принципа Даламбера-Лагранжа // Междунар. научн. конференция по механике “Пятое Поляховские чтения”, С.-Петербург, 3–6 февраля 2009 г. СПб: ООО “Пантон”. 2009. С.52.

[8] **Нездеров А.А.** О работах Л. Юнсена по неголономной механике // Пятое Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике. С.-Петербург, Россия, 3–6 февраля 2009 г. СПб: НИИХ СПбГУ. 2009. С.423–428.

[9] **Нездеров А.А., Юшков М.П.** О переписке Н.Н. Поляхова и В.В. Румянцева относительно понятия возможных перемещений при нелинейных неголономных связях // Пятое Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике. С.-Петербург, Россия, 3–6 февраля 2009 г. СПб: НИИХ СПбГУ. 2009. С.429–436.

[10] **Нездеров А.А.** Продольное движение автомобиля с ускорением как пример движения голономной системы с освобождающей связью // В монографии: С.А. Зегжда, Ш.Х. Солтаханов, М.П. Юшков. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука. 2009. С. 43–52.

[11] **Нездеров А.А.** Движение автомобиля на повороте как неголономная задача с неудерживающими связями // В монографии: С.А. Зегжда, Ш.Х. Солтаханов, М.П. Юшков. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука. 2009. С. 272–289.

[12] **Nezderov A.A.** Longitudinal accelerated motion of a car as an example of motion of a holonomic system with a nonretaining constraint // В монографии: Sh.Kh. Soltakhanov, M.P. Yushkov, S.A. Zegzhda. Mechanics of non-holonomic systems. A New Class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. S.15–24.

[13] **Nezderov A.A.** The turning movement of a car as a nonholonomic problem with nonretaining constraints // В монографии: Sh.Kh. Soltakhanov, M.P. Yushkov, S.A. Zegzhda. Mechanics of non-holonomic systems. A New Class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. S. 245–262.

[14] **Бячков А.Б., Нездеров А.А., Панова С.А.** О возможности безударного описания сцепной силы при разгоне автомобиля // Междунар. конференция “Седьмые Окуневские чтения”, 20–24 июня 2011 г., С.-Петерб., Россия. Материалы докладов // Балт. гос. техн. ун-т. СПб. 2011. С. 39.

[15] **Белоусов Ю.А., Бячков А.Б., Нездеров А.А.** Учет плавного изменения силы трения Кулона при исследовании разгона автомобиля с проскальзыванием // Междунар. научн. конференция по механике “Шестые Поляховские чтения”, 31 января – 3 февраля 2012 г. С.-Петерб., Россия. Тезисы докладов. СПб.: ООО “Пантон”. 2012. С.30.