

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАРАВАЕВ Артем Михайлович

ПОДСЧЕТ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ
НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ, ЦИЛИНДРАХ И ТОРАХ
МЕТОДОМ МАТРИЦЫ ПЕРЕНОСА

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2012

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и кибернетики
Петрозаводского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент ПЕРЕПЕЧКО Сергей Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
РОМАНОВСКИЙ Иосиф Владимирович
(Санкт-Петербургский
государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор
ОДИНЕЦ Владимир Петрович
(Коми государственный
педагогический институт)

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
имени В. А. Стеклова РАН

Защита состоится « ___ » _____ 2012 г. в _____ часов на заседании
совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при
Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-
Петербург, Университетская наб., 7/9., ауд. 133.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горь-
кого Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034,
Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан « ___ » _____ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Использование систем компьютерной алгебры и параллельных вычислений является неотъемлемым атрибутом при решении сложных естественно-научных проблем. Перечислительная комбинаторика располагает множеством задач, для которых первостепенный интерес представляют алгоритмы, использующие мощные вычислительные кластеры. Налицо возрождение интереса к тем классам проблем, которые в силу своей сложности на протяжении ряда десятилетий не поддавались решению «ручным» способом. В связи с этим возрастает роль параллельных алгоритмов, поскольку возможность получения новых точных результатов в рамках традиционных однопроцессорных вычислений в значительной степени исчерпана.

Настоящее исследование нацелено именно на разработку эффективного метода подсчета циклов в сеточных графах с применением высокопроизводительных параллельных вычислений. Разработка такого метода имеет большое значение не только по причине нарастания массового интереса к технологиям параллельных вычислений, но и в связи с тем, что для решения перечислительных задач с экспоненциальным ростом потребностей в памяти эффективные параллельные алгоритмы ранее не разрабатывались. Недостаточное освещение в литературе алгоритмов распараллеливания подобных задач является достаточно серьезной и в то же время актуальной проблемой, частичное решение которой предложено в данной работе.

В работах физической направленности возможности точных перечислительных методов использовались крайне редко. Отчасти это могло быть связано с тем, что многие классические решеточные модели были предложены более четверти века назад, то есть до того периода, когда были разработаны мощные гибридные, а именно символично-численные подходы к исследованию перечислительных задач. Для работ этого периода характерно стремление к сведению дискретной задачи к непрерывной в рамках той или иной полевой модели и последующий ее анализ на физическом уровне строгости.

Предложенные в работе параллельные алгоритмы позволяют увеличить порядки графов, допускающих точное определение числа циклов, до такой степени, что из полученных данных удастся реконструировать рекуррентные соотношения, дающие описание количества циклов для всего семейства сеточных графов. Асимптотики этих рекуррентных соотношений могут быть использованы для количественной оценки точности физических моделей.

Основной целью диссертационной работы является развитие численно-аналитических методов перечислительной комбинаторики применительно к классу задач, допускающих решение методом матрицы переноса. Для достижения этой цели была выбрана проблема подсчета гамильтоновых циклов в семействах решеток, цилиндров и торов и, поставлены следующие задачи.

1. Проанализировать и систематизировать известные результаты, выявив их достоинства и недостатки.
2. Разработать параллельную версию алгоритма, объединив достоинства существующих реализаций с новыми методами сжатия матрицы переноса, для максимального расширения набора известных данных.
3. Предложить метод вывода рекуррентных соотношений, допускающий эффективную бинарную реализацию, опираясь на данные, полученные параллельным алгоритмом.
4. Оценить корректность существующих гипотез об асимптотике числа гамильтоновых циклов в сеточных графах высокого порядка и в случае необходимости уточнить их.
5. Существенно увеличить точность определения константы связности по сравнению с известными методами.
6. Проверить корректность выводов полевой $O(n)$ модели среднего поля, предполагающей сворачивание решетки в тор с последующим сведением дискретной задачи к непрерывной.

Основные результаты диссертационной работы сформулированы в виде **защищаемых положений** и заключаются в следующем:

1. Разработана эффективная схема кодирования состояний для подсчета числа гамильтоновых циклов на прямоугольных решетках $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$, цилиндрах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$ и торах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$, на основе которой предложен новый параллельный алгоритм.
2. Расширен набор точных значений для количества циклов на решетках, цилиндрах и торах.
3. Предложен метод вывода рекуррентных соотношений из набора точных данных, с помощью которого получены новые соотношения для числа циклов в рассматриваемых семействах сеточных графов.
4. Уточнено значение универсальной константы связности для всех трех рассматриваемых семейств графов: $\kappa = 1.472\,799 \pm 0.000\,003$.
5. Показано, что асимптотика количества циклов на торах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет качественно иной вид, нежели на решетках $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ и цилиндрах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$, раздваиваясь при четном m , что свидетельствует о необходимости уточнения основных принципов проведения расчетов в рамках стандартной $O(n)$ модели среднего поля.

Научная новизна работы заключается в том, что полученные в рамках диссертационного исследования результаты являются новыми.

Практическую ценность результатов мы видим в том, что разработанные методы могут оказаться полезными для решения широкого класса аналогичных задач перечислительной комбинаторики. Предлагаемые в работе рекомендации по ускорению вычислений, экономии памяти и распараллеливанию являются универсальными и пригодны в любой другой области, где возникает необходимость использовать метод матрицы переноса.

Достоверность научных положений подтверждается тем, что разработанные методы успешно воспроизводят уже известные результаты, а многие новые результаты остаются в русле прогнозов, сделанных авторами преды-

дущих работ. Достоверность данных, впервые полученных вычислительными методами, не может быть гарантированно подтверждена, однако они получены обоснованными в работе методами и являются целостными и непротиворечивыми, что является существенным критерием в тех задачах, для решения которых требуются масштабные вычислительные эксперименты.

Апробация. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях по параллельным вычислениям «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» (2009) и «Параллельные вычислительные технологии» (в 2010 и 2011 г.), на международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС '2011), на конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л. В. Канторовича», на научном семинаре кафедры исследования операций математико-механического факультета СПбГУ под руководством зав. каф. д. ф.-м. н., профессора Н. Н. Петрова (в 2010 и 2011 г.), а также на научных семинарах кафедры прикладной математики и кибернетики ПетрГУ.

Публикация результатов. Результаты исследований отражены в работах 1–14. В работе 4 соискателю принадлежит вторая часть, посвященная параллельной реализации формул для подсчета циклов на языке «Си» и проведение вычислительных экспериментов. Соавтору принадлежит первая часть работы. В работе 11 соискателю принадлежит разработка алгоритма и проведение всех расчетов с его помощью, а также вывод рекуррентных соотношений и явная формула для случая $m = 3$. Соавтору принадлежат остальные результаты. Статьи 1 и 2 опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных журналов и изданий.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, раздела с терминологией, четырех глав, заключения и списка источников. Общий объем диссертации составляет 145 страниц (включая библиографию из 52 источников). Работа содержит 36 иллюстраций и 21 таблицу.

Содержание работы

В разделе с терминологией вводится понятийный аппарат, требующийся для формального изложения алгоритмов подсчета циклов. Раздел завершается списком наиболее часто используемых обозначений.

Описание главы 1

Глава посвящена обзору источников по теме диссертационного исследования и начинается с обсуждения задачи о подсчете циклов с точки зрения теории вычислительной сложности. Во втором разделе рассматриваются приложения поставленной задачи к некоторым решеточным моделям статистической механики. Достаточно подробно анализируется задача о количестве конформаций плотноупакованных макромолекул, которые в физике полимеров часто моделируются циклами на решеточных графах.

Для больших сеточных графов порядка $N = mn$ считается, что количество циклов можно оценить величиной $\mu^B \kappa^N$, где B — число вершин графа, лежащих на его «границе», а символом κ обозначена универсальная константа связности. В физических приложениях ее вычисление представляет основной интерес, поскольку κ связана с энтропией, приходящейся на один узел решетки. Предполагается, что значение κ для решеток и цилиндров одинаково, однако коэффициент $\mu < 1$ будет для этих семейств графов различным.

В этом же разделе обсуждаются различные подходы к оценке величины κ . Один из них основан на вычислении предела последовательности (κ_m) при $m \rightarrow \infty$, в которой κ_m — значение константы связности для сеточного графа с фиксированным значением параметра m и $n \rightarrow \infty$.

Другой подход основан на полевой $O(n)$ модели среднего поля, трансформирующей решетку $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ в тор $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ путем наложения циклических граничных условий. Вычисления в рамках данной модели позволяют вывести аналитическое выражение для константы связности $\kappa^{(mf)} = 4/e \approx 1.4715$. Точность полученного результата на протяжении ряда лет оставалась неиз-

вестной, и наиболее точное значение, известное в настоящее время, равно¹
 $\kappa = 1.472\,801 \pm 0.000\,010$.

Третий раздел главы посвящен обзору литературы, в которой метод матрицы переноса применялся для подсчета циклов в рассматриваемых семействах графов. Отмечаются недостатки ранних работ, в которых прямолинейное применение метода приводило к тому, что порядок матрицы переноса оценивался сверху числами Моцкина, асимптотика которых имеет вид $\sqrt{3/(4\pi m^3)} \cdot 3^m$. Основным выводом небольшого четвертого раздела является констатация того факта, что параллельных реализаций метода матрицы переноса для задачи подсчета циклов неизвестно.

Первые попытки вывода явных формул и рекуррентных соотношений при фиксированном значении параметра m обсуждаются в пятом разделе. Отмечается быстрый рост сложности проведения расчетов как при использовании техники «оконных» графов, так и в символьном варианте метода матрицы переноса. Обращается внимание на важность минимизации порядка полученного соотношения, которая недооценивалась авторами первых работ.

Завершающий, шестой, раздел описывает методы работы с числовыми последовательностями. Обсуждаются методы экстраполяции и ускорения сходимости, такие как таблицы Невилля и ρ -алгоритм Вайна. Обосновывается выбор этих методов для обработки полученных данных.

Описание главы 2

Глава начинается с изложения теоретических основ метода матрицы переноса. Показывается, что задача подсчета циклов сводится к подсчету маршрутов между заданной парой вершин в некотором псевдографе, множество вершин которого совпадает с множеством всех достижимых состояний. Описанный в разделе 2.3.1 алгоритм CONSTRUCT-GRAPH строит такое множество. В результате работы алгоритма удается получить матрицу, порядок которой в 2-3 раза меньше границы, определяемой числами Моцкина \mathcal{M}_m .

¹ Jacobsen J. L. Kondev J. *Field theory of compact polymers on the square lattice*. Nuclear Physics, 1998. Vol. B532[FS]. P. 635–688.

Вторая важная особенность алгоритма, не использовавшаяся ранее, заключается в отождествлении симметричных состояний. Это позволяет еще вдвое сократить порядок матрицы переноса при подсчете циклов на решетках $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$. Для цилиндров $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$ уменьшение порядка матрицы при учете симметрии варьируется от $m/2$ до m раз. Например, для $m = 12$ количество слов Моцкина равно 15 511. Количество достижимых состояний составляет 7 281, а с учетом симметрии остается всего 3 774, то есть в 4 раза меньше, чем слов Моцкина. Для случая цилиндров число состояний снижается более радикально — до 619 (в 25 раз меньше, чем слов Моцкина).

При $m = 3$ или $m = 4$ метод может быть применен в «ручном» режиме, позволяя в деталях проиллюстрировать все его основные особенности, включая вывод рекуррентных соотношений и нахождение асимптотики числа циклов. Для $m = 3, 4$ подробно изучены все три семейства сеточных графов $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$, $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$ и $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ (теоремы 2.2–2.7). Если для двух первых семейств полученные формулы согласуются с ранее известными, то явные выражения для числа циклов на торах получены впервые. Эти результаты можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.6 *Количество циклов на торе $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_n$ подчиняется формуле*

$$[\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_n] \mathbf{a}_n = 3^n + \frac{3}{4}n \cdot 2^n + \frac{2^n - (-2)^n}{2} + (-1)^n - 4, \quad n \geq 3.$$

Теорема 2.7 *Количество циклов на торе $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_n$ вычисляется по формуле*

$$[\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_n] \mathbf{a}_n = A(n) + \alpha_{n \bmod 2}(\lfloor n/2 \rfloor),$$

в которой

$$A(n) = (2n + 1) \cdot \operatorname{ch}(2n \cdot \operatorname{Arth} \sqrt{1/3}) - (n/\sqrt{3}) \cdot \operatorname{sh}(2n \cdot \operatorname{Arth} \sqrt{1/3}) + \cos(\pi \cdot n/2) - \sin(\pi \cdot n/2),$$

$$\alpha_0(n) = (4^n - 16 \cdot 3^n - 4)/3 + 8 \cdot 2^{n/2} \cdot \cos(n \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{7}) + 4 \cdot 2^n \cdot \operatorname{ch}(2n \cdot \operatorname{Arth} \sqrt{2/3}) - 2 \cdot \operatorname{ch}(2n \cdot \operatorname{Arth} \sqrt{1/2}),$$

$$\alpha_1(n) = -2 \cdot (n + 1) \cdot (2 - (-1)^n).$$

Асимптотика числа циклов при $n \rightarrow \infty$ раздваивается в зависимости от четности n :

$$[\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_n] \mathbf{a}_n \sim \begin{cases} 2(2 + \sqrt{6})^n, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \left(\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)n + \frac{1}{2} \right) (2 + \sqrt{3})^n, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Предсказать раздвоение асимптотики в рамках полевой $O(n)$ модели никогда ранее не удавалось.

Описание главы 3

Глава начинается с описания схемы кодирования состояний на решетках и цилиндрах. В терминах «правильных скобочных последовательностей, разреженных нулями» (ПСПРН) показывается, что основные принципы кодирования для этих семейств совпадают, что может быть сформулировано как

Теорема 3.3 *Способы кодирования состояний для решеток и цилиндров идентичны в том смысле, что любое допустимое состояние для обоих семейств графов может быть закодировано с помощью ПСПРН.*

Описанная в данной главе модификация метода матрицы переноса не предполагает явного построения всей матрицы, однако для эффективной реализации требуется алгоритм, способный быстро строить списки состояний $\text{To}(\mathbf{s})$, в которые можно перейти из некоторого заданного состояния s .

Отмечается, что существует три типа выбора комбинаций горизонтальных ребер, которые нарушают условие гамильтоновости и, следовательно, являются недопустимыми. Учет таких случаев позволяет сократить перебор с 2^{m-1} вариантов до f_m , где f_m — число Фибоначчи с индексом m .

Рассмотренная в начале главы схема кодирования легла в основу алгоритма подсчета циклов, который можно использовать как в случае решеток, так и цилиндров. Опора на принципы динамического программирования приводит к такой реализации, когда оперативная память компьютера расходует-ся весьма экономно. Однако платой за это является необходимость многократного перевычисления списков $\text{To}(\mathbf{s})$. Сокращение времени расчетов достигается за счет перехода к параллельным вычислениям. Приводимая в тексте оценка сложности $O(n \cdot 6^m / m^{3/2})$ (теорема 3.5) оказывается несколько пессимистичной, поскольку не учитывает серию оптимизаций в коде алгоритма.

Принцип распараллеливания алгоритма оказывается весьма чувствительным к архитектуре вычислительного кластера. Оба рассмотренных в работе метода оптимизированы для случая крайне ограниченного объема памяти на одном узле. В связи с этим основное внимание в разделе 3.1.4 «Оптимизация» уделяется максимально возможному сжатию матрицы переноса.

Кодирование состояний на торах значительно сложнее. В то время как на решетках и цилиндрах построение цикла начинается с нулевого состояния, на торе такое построение должно начинаться с выбора обратных вертикальных ребер, которые будут участвовать в построении цикла. При этом финальное состояние будет зависеть как от сделанного выбора, так и от способа продолжения в будущее цепей, проходящих через обратные вертикальные ребра. Поскольку приходится хранить информацию не только о цепях, проходящих через текущий уровень графа, но и о цепях, начинающихся на самом нижнем уровне, то закодировать такие состояния одной ПСПРН уже невозможно.

Каждое состояние может содержать цепи двух типов. Цепи первого типа обоими концами касаются одного уровня и проходят через прошлое. При изображении состояния они выглядят как дугообразные линии. Цепи второго типа начинаются у первого слоя и заканчиваются у текущего. Они изображаются в виде отрезков, соединяющих вершины нижнего и верхнего слоя на «сжатом» торе. Скобки соответствуют цепям первого типа, а числа — концам цепей второго типа. Пример такого кодирования показан на рис. 1.

Количество циклов растет экспоненциально с увеличением параметров сеточных графов. Так, на решетке $\mathcal{P}_{22} \times \mathcal{P}_{22}$ оно составляет (71 знак)

13 404 209 505 893 761 748 339 786 653 564 937 498 745 897 123 531 041 248 680 272 448 954 956.

Чтобы не хранить длинные числа в памяти, использовалась модулярная арифметика. Вычисления проводились по модулю различных простых чисел, близких к $2^{31} - 1$, из-за чего программу приходилось запускать несколько раз. Например, для получения указанного выше числа циклов потребовалось 8 простых чисел от $2^{31} - 151$ до $2^{31} - 1$ включительно.

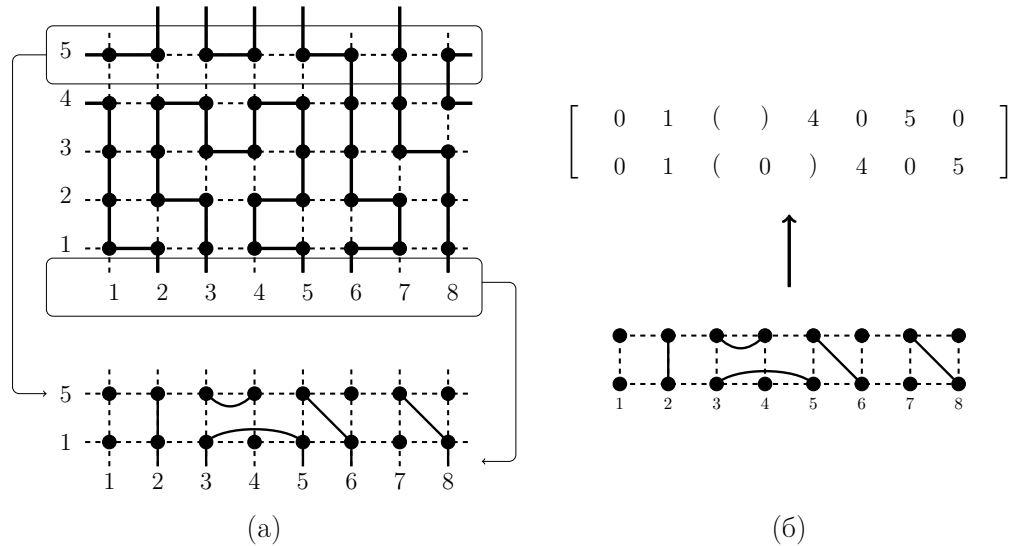


РИСУНОК 1 — Кодирование состояний на торе: (а) Сжатие фрагмента тора; (б) Кодирование сжатого фрагмента двумя строками символов

Результатом работы алгоритма стало точное решение задачи о подсчете циклов на решетках $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ и цилиндрах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$ для всех $3 \leq m \leq 22$ и $1 \leq n \leq 100$, а также для торов $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ для всех $3 \leq m \leq 10$ и $3 \leq n \leq 500$.

Помимо этих численных данных, были получены достаточно длинные числовые последовательности количества циклов на решетках, цилиндрах и торах с фиксированным значением параметра m , необходимые для вывода рекуррентных соотношений. Выводу этих соотношений посвящена первая часть следующей главы.

Описание главы 4

Предельные свойства рассматриваемых моделей изучаются в рамках этой главы. Первая часть посвящена алгоритму вывода рекуррентных соотношений, основанному на p -адической аппроксимации. Описаны достоинства такого подхода и причины, побудившие использовать его для решения задачи.

Применение алгоритма позволило вывести рекуррентные соотношения для числа циклов на решетках $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ для $m \leq 14$, цилиндрах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n$ для $m \leq 16$ и торах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ для $m \leq 8$. Все рекуррентные соотношения и прилагающиеся данные доступны на сайте соискателя <http://flowproblem.ru> в разделе о гамильтоновых циклах.

Порядки найденных рекуррентных соотношений указаны в следующей таблице. Символом «*» отмечены те соотношения, которые получены впервые в рамках реферируемой диссертационной работы.

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Решетка	2	4	6	14	36	66	208	*346	*1342	*2086	*8958	*13523		
Цилиндр	1	2	3	*7	*12	*20	*51	*74	*246	*303	*1320	*1514	*7936	*8364
Тор	*6	*28	*84	*257	*856	*2785								

Так, например, рекуррентное соотношение, описывающее число циклов на цилиндре $\mathcal{C}_6 \times \mathcal{P}_n$, имеет порядок 7 и записывается в виде

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1, a_2 = 8, a_3 = 86, a_4 = 776, \\
 a_5 &= 7010, a_6 = 63\,674, a_7 = 578\,090, a_8 = 5\,247\,824, \\
 a_n &= -12a_{n-7} - 32a_{n-6} - 36a_{n-5} - 28a_{n-4} + 10a_{n-3} + 9a_{n-1}, \quad n \geq 9.
 \end{aligned}$$

Вторая часть главы непосредственно связана с изучением предельных свойств последовательностей, получаемых с помощью параллельного алгоритма и рекуррентных соотношений.

Полученные с высокой точностью главные члены асимптотического разложения числа циклов позволяют рассчитать значения константы связности \varkappa_m для решеток и цилиндров с фиксированным значением параметра m . Применение двух методов ускорения сходимости последовательности (\varkappa_m) дает более точное значение универсальной константы связности.

Теорема 4.2 $[\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n]$ $\varkappa = 1.472\,801 \pm 0.000\,003$.

Теорема 4.3 $[\mathcal{C}_m \times \mathcal{P}_n]$ $\varkappa = 1.472\,799 \pm 0.000\,003$.

Третья часть главы посвящена исследованию асимптотического поведения числа циклов на торах $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$. Исследование показало, что для четных значений $4 \leq m \leq 10$ асимптотика раздваивается, а для нечетных значений $3 \leq m \leq 9$ она остается единой. При этом оказывается известным вид асимптотики. Результат сформулирован в виде гипотезы, проверенной и истинной для всех $3 \leq m \leq 10$. Для примера обратимся к рис. 2.

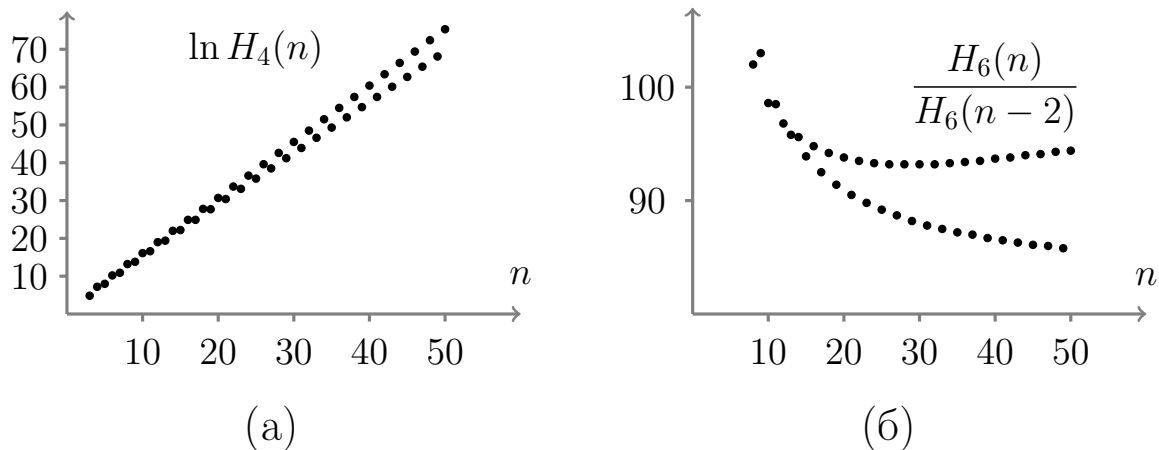


РИСУНОК 2 — Асимптотические свойства числа циклов на торах:

- (а) Число циклов на торе $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_n$ для $n = 3, \dots, 50$;
 (б) Метод отношений для числа циклов на торе $\mathcal{C}_6 \times \mathcal{C}_n$ для $n = 8, \dots, 50$

На рис. 2(а) в логарифмическом масштабе отмечено количество циклов на торе $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_n$. Раздваивание асимптотики наблюдается в соответствии с теоремой 2.7. На рис. 2(б) изображен ограниченный значением $n = 50$ пример вычисления наибольшего по модулю корня характеристического полинома рекуррентного соотношения для числа циклов на торе $\mathcal{C}_6 \times \mathcal{C}_n$. Наблюдаются два предела: $\lambda^2 \approx 96.4$ и $\tilde{\lambda}^2 \approx 82.7$ для четных и нечетных n соответственно.

Заключение диссертации содержит анализ полученных результатов, завершающийся выводами и рекомендациями, касающимися возможных вариантов продолжения работы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах и изданиях:

1. **Караваяев А. М.** *Подсчет предгамильтоновых циклов на семействах решеточных графов.* Ученые записки Петрозаводского государственного университета, 2011. №6(119). С. 97–102.
2. **Караваяев А. М.** *Количество гамильтоновых циклов на торе $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_n$.* Естественные и технические науки, 2011. №6(56). С. 30–32.

Другие публикации:

3. **Караваяев А. М.** *Практическое сравнение алгоритмов типа backtrack для перечисления простых циклов в графе.* Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований '2010». Т. 32. Одесса : Черноморье, 2010. С. 9–13.
4. **Караваяев А. М., Воропаев А. Н.** *Эффективность распараллеливания явных формул для подсчета коротких циклов в графе* [электронный ресурс]. Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии '2010». г. Уфа : Уфимский государственный авиационный технический ун-т, 2010. 1 CD-ROM. С. 486–497.
5. **Караваяев А. М.** *Возможности метода динамического программирования для подсчета числа циклов в графе* : тезисы. «Научное творчество молодежи» : XIII Всероссийская научно-практическая конференция, г. Анжеро-Судженск : Томск : Из-во Том. ун-та, 2009. Ч. 1. С. 41–43.
6. **Караваяев А. М.** *Эффективность параллельной реализации метода динамического программирования для подсчета количества простых циклов в графе.* «Научное творчество молодежи» : материалы XIV всероссийской научно-практической конференции, г. Анжеро-Судженск. Томск : Из-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 43–46.
7. **Караваяев А. М.** *Количество простых циклов на двумерной квадратной решетке.* «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» : материалы IX Международной конференции-семинара. Владимир : Владимирский госуниверситет, 2009. С. 202–207
8. **Караваяев А. М.** *Задача о расстановке шахматных королей.* Современные проблемы гуманитарных и естественных наук : материалы II международной научно-практической конференции. М., 2010. Т. II. С. 12–16.

9. **Караваяев А. М.** *Усовершенствованный метод матрицы переноса для подсчета гамильтоновых цепей на прямоугольных решетках и цилиндрах* : труды [электронный ресурс]. Сборник трудов международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии '2011». г. Москва : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. 1 CD-ROM. С. 695.
10. **Караваяев А. М.** *Кодирование состояний в методе матрицы переноса для подсчета гамильтоновых циклов на прямоугольных решетках, цилиндрах и торах.* Информационные процессы, 2011. Т. 11. №4. С. 476–499.
11. **Караваяев А. М., Перепечко С. Н.** *Подсчет гамильтоновых циклов на семействах торов $C_m \times C_n$.* Материалы XVII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС '2011), 25–31 мая 2011 г., Алушта. М : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. С. 243–245.
12. **Караваяев А. М.** *Усовершенствованный метод матрицы переноса для подсчета гамильтоновых циклов на прямоугольных решетках и цилиндрах.* Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2011. №4(27). С. 16–24.
13. **Караваяев А. М.** *Усовершенствованный метод матрицы переноса для подсчета гамильтоновых цепей на прямоугольных решетках и цилиндрах.* Информационные процессы, 2011. Т. 11. №3. С. 336–347.
14. **Караваяев А. М.** *О подсчете гамильтоновых циклов в семействах прямоугольных решеток и цилиндров* Материалы международной конференции «Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л. В. Канторовича». СПб. : ООО «ТАИС», 2012. С. 47-48.