САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЮМАГУЗИН Наиль Юлаевич

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДВУХФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор РАЙТМАНН Фолькер
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ПИЛЮГИН Сергей Юрьевич (Санкт-Петербургский государственный университет, профессор)
	доктор физико-математических наук, профессор БУРКИН Игорь Михайлович (Тульский государственный университет, заведующий кафедрой математического анализа)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Защита состоится ___ ноября 2012 г. в __ часов __ минут на заседании дисссертационного совета Д 212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 29, математико-механический факультет, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “___” ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Архипова А. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию асимптотического поведения решений начально-краевой задачи для системы, описывающей нагрев материала под воздействием микроволнового излучения. Двухфазовость проблемы микроволнового нагрева обусловлена возможностью нахождения материала в одном из двух фазовых состояний, например жидкого и твердого. Основным результатом работы является доказательство сходимости решений системы к стационарному состоянию.

Актуальность темы. Исследование поведения решений двухфазовой проблемы микроволнового нагрева в первую очередь стимулировалось прикладными задачами. В последнее время повышенный интерес в области современной медицины проявляется к новым методам лечения раковых опухлей. В частности, таким методом является гипертермия - нагревание тканей тела под воздействием микроволнового излучения до критической температуры 42 °C, при которой происходит разрушение клеток. Первостепенная задача состоит в том, чтобы уничтожить клетки злокачественной опухли и при этом свести к минимуму повреждения клеток здоровых тканей. Важным в данном процессе является точный контроль за проведением процедуры.

Одним из способов повысить эффективность этой процедуры является совмещение гипертермии с криотерапией - когда перед проведением процедуры гипертермии в ткани злокачественной опухли вживляется криозонд, охлаждающий клетки опухли до температуры ниже 0 °C. Сам процесс охлаждения до такой температуры приводит к разрушению клеток, а в совокупности с последующим нагревом путем гипертермии достигается большая эффективность всей процедуры.

Все это объясняет необходимость рассматривать парную систему из уравнений Максвелла, описывающих распространение микроволнового излучения, и уравнения теплопроводности, учитывающего температурный эффект микроволн. Кроме того моделируется эффект двухфазовости материала.

Актуальность данной темы подтверждается тем, что подобные прикладные задачи изучаются в рамках научного центра G-RISC (German-

Russian Interdisciplinary Science Center). Эта работа была спонсирована программой G-RISC (в период с 1 июля по 31 декабря 2010 г.).

Впервые система микроволнового нагрева была рассмотрена H.-M. Yin[4], где изучалась задача однофазового нагрева материала микроволновым излучением. В работе V.S. Manoranjan, R. Showalter, H.-M. Yin[3] рассматривается задача двухфазового нагрева, без изучения асимптотического поведения решений соответствующей системы.

Работа диссертанта является продолжением данной тематики, в частности, показывается стремление решений к стационарному решению в задаче нагрева.

В отличие от приведенных выше работ, в данной работе рассматривается неоднородный по физическим свойствам материал, что, в частности, выражается в выборе физических коэффициентов, таких как диэлектрическая и магнитная проницаемости, которые полагаются непостоянными.

В данной работе рассматриваются различные особенности задачи нагрева в виде разрывных коэффициентов и использования оператора энтальпии для описания двухфазовости и неоднородности материала. Сама система, описывающая задачу, состоит из уравнений параболического и гиперболического типа. Стандартные методы исследования асимптотики к этой системе неприменимы. Возникает необходимость в методе исследования асимптотического поведения, учитывающего специфику данной задачи.

Цель работы. Целью работы является исследование асимптотического поведения решений однофазовой и двухфазовой задачи нагрева материала под воздействием микроволнового излучения и развитие соответствующего математического аппарата. В частности, работа направлена на получение аналитических результатов об асимптотическом поведении решений задачи нагрева и проведении численных экспериментов, подтверждающих эти аналитические результаты.

Методы исследования. Для исследования асимптотического поведения решений задачи микроволнового нагрева в работе используются следующие методы.

- Метод априорных оценок решений, включающий в себя неравенства в пространствах Соболева и обобщенный локальный принцип максимума для параболических уравнений.

- Функционалы типа Ляпунова в виде квадратичных форм в функциональном пространстве.
- Теория многозначных полугрупп и соответствующее понятие аттрактора для изучения асимптотики в условиях неединственности решения системы.
- Численное моделирование решений системы задачи нагрева с использованием пакета Matlab.

Результаты, выносимые на защиту.

- В однофазовом случае получены результаты о сходимости решений системы задачи микроволнового нагрева к стационарному решению. В доказательстве были использованы методы априорных оценок в функциональных пространствах и квадратичный функционал типа Ляпунова в интегральной форме.
- В двухфазовом случае в условиях неединственности решения системы задачи микроволнового нагрева получены аналогичные результаты о сходимости решений системы к стационарному решению. В доказательстве были использованы методы априорных оценок в Соболевских пространствах и квадратичный функционал типа Ляпунова в интегральной форме. Дополнительно была построена многозначная полугруппа системы задачи нагрева.
- На языке теории многозначных полугрупп доказано существование аттрактора.
- Численно смоделированы решения каждой из рассматриваемых систем, в соответствии с аналитическими результатми.

Достоверность результатов. Все полученные аналитические результаты диссертационной работы строго доказаны.

Для однофазового случая результат сходимости решений системы к стационарному решению подтверждается теоретическими исследованиями V. S. Manoranjan, J. Morgan, R. Showalter и H.-M. Yin.

На достоверность результатов дополнительно указывают полученные численные эксперименты, а также непротиворечивость с физической моделью прикладной задачи.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая ценность полученных в диссертации результатов заключается в развитии математического аппарата, необходимого для исследования поведения систем, описывающих сугубо прикладные задачи, осложненные междисциплинарностью, то есть учитыванием, например, медицинской и физической составляющих задачи. Данный математический аппарат должен учитывать классическую теорию физики, представленную, в частности, уравнениями Максвелла, теплопроводности и законом Джоуля-Ленца, для описания процесса нагрева материала микроволновым излучением. Кроме того, классическая теория физики и, как следствие, математический аппарат, усложняются спецификой медицинской задачи ввиду необходимости рассмотрения разрывных коэффициентов системы, что требуется для моделирования микроволнового нагрева органического материала.

Использование аналитических результатов позволяет повысить контроль за проведением процедур типа гипертермии, что представляет непосредственную практическую ценность, особенно с учетом усиленного развития соответствующих направлений в медицине в последнее время и остроте вопроса о лечении раковых заболеваний.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях “The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Германия, Дрезден, 2010), “First Interdisciplinary Workshop of the German-Russian Interdisciplinary Science Center on the Structure and Dynamics of Matter” (Германия, Берлин, 2010), “The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (Россия, Москва, 2011).

Кроме того, в рамках участия в программе научного центра G-RISC была организована научная стажировка в Technische Universität Dresden, где был представлен доклад диссертанта на семинаре профессора R. Picard на математическом факультете в ноябре 2010.

Публикация результатов. Основные результаты диссертации представлены в 4 печатных работах, в том числе в 2 статьях [1],[2], опубликованных в рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

В работах [1],[3],[4] соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, диссертанту принадлежат теоретические результаты и численное моделирование.

В работе [2] соавторам принадлежат постановка задачи и исследование вопроса существования почти периодических решений, диссертанту принадлежат теоретические результаты об асимптотическом поведении решений и соответствующие численные эксперименты.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы, включающего 61 наименование, изложена на 96 страницах машинописного текста и содержит 24 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе описывается устройство генераторов микроволнового излучения, в частности микроволновой печи, и приводится описание прикладной задачи микроволнового нагрева в медицине на примере процедуры гипертермии для лечения раковых заболеваний. Для данной прикладной задачи, с использованием физических законов, выводится система уравнений в частных производных, состоящая из уравнений Максвелла и теплопроводности и описывающая подобную задачу микроволнового нагрева. Кроме того, в данной главе рассматривается комбинирование процедуры гипертермии с криотерапией. Для данной комбинации приводится обобщение выведенных уравнений с учетом двухфазовости материала, путем рассмотрения оператора энтальпии для учитывания эффекта двухфазовости материала. Относительно полученных уравнений в частных производных формулируется начально-краевая задача и рассматривается сведение трехмерной задачи к одномерному случаю по пространственной переменной.

Во второй главе исследуется асимптотическое поведение решений однофазовой задачи нагрева, описываемой начально-краевой задачей

$$w_{tt} = w_{xx} - \sigma(\theta) w_t, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{1}$$

$$\theta_t = \theta_{xx} + \sigma(\theta) w_t^2, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{2}$$

$$w(0,t) = 0,\ w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1), \tag{6}$$

где $T > 0$ - произвольное число, $w(x,t)$ - ненулевая компонента некоторого интеграла по времени от вектора электрического поля, $\theta(x,t)$ - температура материала, $\sigma(\cdot)$ - электропроводность среды и w_0, w_1, θ_0 - некоторые заданные функции.

Делаются следующие предположения относительно функции $\sigma(\cdot)$ и начальных данных.

(A1) Функция $\sigma(z)$ удовлетворяет локальному условию Липшица на $[0,\infty)$ и существуют постоянные $0 < \sigma_0 \le \sigma_1$ такие, что $\sigma_0 \le \sigma(z) \le \sigma_1$, для любого $z \geq 0$.

(A2) Функция $\theta_0(x)$ неотрицательна и принадлежит классу $C^2(0,1)$, также выполняются условия согласованности второго порядка начальных и краевых данных в точках $(0,0)$ и $(1,0)$. Функции $w_0(x)$, $w_1(x)$ принадлежат классу $C^4(0,1)$ и выполняются условия согласованности начальных и краевых данных в угловых точках $(0,0)$ и $(1,0)$.

Система вида (1)-(6) рассмотрена в работе H.-M. Yin[4], где доказано существование глобального классического решения $w(x,t) \in C^{3,3}(\bar{Q}_T)$, $\theta(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$. Путем применения энергетических неравенств изучен вопрос асимптотического поведения решений системы.

В настоящей работе для функций $W \in C_0^1(0,1)$, $V, U \in C(0,1)$ строится функционал типа Ляпунова в виде

$$\Phi(W,V,U) = \int_0^1 (W_x^2 + 2\lambda WV + V^2 + aU^2)dx, \tag{7}$$

с некоторыми постоянными параметрами λ, a.

Для заданного таким образом функционала Φ доказывается следующая лемма.

Лемма 2.2 *Пусть выполнены предположения (A1)-(A2) и* (w,θ) *- решение системы* (1)-(6). *Положим* $v = w_t$. *Тогда функционал* Φ *обладает следующими свойствами:*

1) *Существуют постоянные* $C_1, C_2 > 0$*, такие, что*

$$\begin{aligned} &C_1(\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}) \leq \\ &\quad \leq \Phi(w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t)) \leq \\ &\quad \leq C_2(\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}), \end{aligned}$$

для любого $t > 0$.

2) *Существует постоянная* $C_3 > 0$*, такая, что*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq -C_3\Phi(t), \ t > 0,$$

где $\Phi(t) = \Phi(w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$.

С помощью функционала типа Ляпунова (7) и приведенной леммы 2.2 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1 *При выполнении предположений (A1)-(A2) компоненты любого классического решения* (w, θ) *системы* (1)-(6) *и производная* w_t *сходятся в* $L^2(0,1)$ *к нулю при* $t \to \infty$.

В заключение во второй главе приводятся численные эксперименты, показывающие асимптотическое поведение классических решений системы нагрева и подтверждающие полученные аналитические результаты.

В третьей главе рассматривается двухфазовая задача микроволнового нагрева с учетом разрывных коэффициентов, учитывающих физические свойства материала:

$$\varepsilon(x)w_{tt} = (\frac{1}{\mu(x)}w_x)_x - \sigma(\theta)w_t, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{8}$$

$$b(\theta)_t = \theta_{xx} + \sigma(\theta)w_t^2, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{9}$$

$$w(0,t) = 0,\ w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1). \tag{13}$$

Здесь $T > 0$ - произвольное число, $w(x,t)$ - ненулевая компонента некоторого интеграла по времени от вектора электрического поля, $\theta(x,t)$ - температура материала, $\sigma(\cdot)$ - электропроводность среды, $\varepsilon(\cdot)$ - диэлектрическая проницаемость, $\mu(\cdot)$ - магнитная проницаемость, $b(\cdot)$ - оператор энтальпии и w_1, θ_0 - некоторые заданные функции.

Предполагается, что функции b, σ, ε и μ имеют следующий вид:

$$b(z) = \begin{cases} z-1, & z < m, \\ [m-1, m], & z = m, \\ z, & z > m, \end{cases} \qquad \sigma(z) = \begin{cases} \sigma_s(z), & z < m, \\ \sigma_l(z), & z > m, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1, & x \in (0,x_0), \\ \varepsilon_2, & x \in (x_0,1), \end{cases} \qquad \mu(x) = \begin{cases} \mu_1, & x \in (0,x_0), \\ \mu_2, & x \in (x_0,1). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ - константы, $\sigma_s(z)$ и $\sigma_l(z)$ - гладкие вещественные функции на $\mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}_+$ - температура плавления материала и $x_0 \in (0,1)$ - точка, обозначающая границу сред в нагреваемом материале.

Считается, что $\sigma(m) \in \big[\min\{\sigma_s(m), \sigma_l(m)\}, \max\{\sigma_s(m), \sigma_l(m)\}\big]$.

Определение 3.1 Пара функций $(w(x,t), \theta(x,t))$ называется *слабым решением системы* (8)-(13), если $w \in C^1(0,T; H_0^1(0,1))$ и $\theta \in L^2(0,T; H_0^1(0,1)) \cap C(0,T; L^2(0,1))$, причем удовлетворены интегральные тождества

$$\int_0^T \int_0^1 -\varepsilon(x) w_t \phi_t + \frac{1}{\mu(x)} w_x \phi_x + \sigma(\theta) w_t \phi dxdt =$$

$$= \int_0^1 \varepsilon(x) w_1(x) \phi(x,0) dx,$$

$$\int_0^T \int_0^1 -b(\theta)\psi_t + \theta_x \psi_x - \sigma(\theta) w_t^2 \psi dxdt = \int_0^1 b(\theta_0(x))\psi(x,0)dx,$$

для любых тестовых функций $\phi \in L^2(0,T; H_0^1(0,1)) \cap C(0,T; L^2(0,1))$ и $\psi \in H^1(0,T; H^1(0,1))$, таких, что $\phi(x,T) = \psi(x,T) = 0$ для $x \in (0,1)$. $\square$

Для системы (8)-(13) делаются следующие предположения.

(A3) Положительные параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2$, определяющие функции $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ согласно (14) удовлетворяют неравенству

$$\min\Big\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\Big\} \le 1.$$

(A4) w_1 - функция класса $L^2(0,1)$, θ_0 - неотрицательная функция класса $L^2(0,1)$.

(A5) Существуют числа $\sigma_0 > 0$ и $\sigma_1 > 0$, такие, что

$$0 < \sigma_0 \le \sigma(z) \le \sigma_1, \qquad z \in [0,\infty).$$

Из работы Manoranjan V.S., Showalter R., Yin H.-M.[3] следует, что с учетом предположений (A3)-(A5) система (8)-(13) имеет хотя бы одно слабое решение для заданных начальных данных, при любом $T > 0$.

Для изучения асимптотики в работе рассматривается последовательность аппроксимирующих задач вида

$$\varepsilon(x) w_{tt} = (\frac{1}{\mu(x)} w_x)_x - \sigma_n(\theta) w_t, \qquad (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&b_n(\theta)_t = \theta_{xx} + \sigma_n(\theta)w_t^2, && (x,t) \in (0,1)\times[0,T], && (16)\\
&w(0,t) = 0,\ w(1,t) = 0, && t \in [0,T], && (17)\\
&\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, && t \in [0,T], && (18)\\
&w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = w_1(x), && x \in (0,1), && (19)\\
&\theta(x,0) = \theta_0(x), && x \in (0,1), && (20)
\end{aligned}
$$

где функции $b_n(\cdot)$ и $\sigma_n(\cdot)$ есть C^1-гладкие аппроксимации $b(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$
\begin{aligned}
&b_n(z) = b(z), \quad \sigma_n(z) = \sigma(z), && \text{если } |z-m| \geq \frac{1}{n},\\
&b_n'(z) \geq \frac{1}{2}, && z \in [0,\infty),\\
&a_1 z \leq b_n(z) \leq a_2 z + a_3, && z \in [0,\infty),\\
&0 < \sigma_0 \leq \sigma_n(z) \leq \sigma_1, && z \in [0,\infty),\\
&b_n \to b, \quad \sigma_n \to \sigma, && \text{сильно в } L^2([0,\infty]) \text{ при } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 \geq 0$ - некоторые фиксированные числа, а постоянные σ_0, σ_1 задаются предположением (A5).

Строится функционал типа Ляпунова следующего вида

$$
\Phi(W,V,U) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{\mu(x)}W_x^2 + 2\lambda\varepsilon(x)WV + \varepsilon(x)V^2 + ab_n^2(U)\Big)dx, \qquad (21)
$$

где $W,V,U \in H_0^1(0,1)$ и $\lambda > 0$, $a > 0$ некоторые постоянные.

С помощью обобщенного локального принципа максимума[1] для параболических уравнений, показывается, что для компоненты $\theta(x,t)$ решения системы (15)-(20) верна оценка

$$
\theta(x,t) < C, \text{ для почти всех } x \in (0,1) \text{ и } t > 0,
$$

причем постоянная C зависит только от начальных данных и коэффициентов системы.

С учетом ограниченности θ в норме $L^\infty((0,1)\times(0,\infty))$ рассматривается для произвольного $r > 0$ класс решений (w,θ) системы (15)-(20)

$$
F(r) = \{(w,\theta)\,|\,(w,\theta) - \text{ решение (15)-(20)}, \|\theta\|_{L^\infty((0,1)\times(0,\infty))} < r\}.
$$

С учетом r подбираются параметры λ, a функционала типа Ляпунова (21), для которого доказывается выполнение неравенств

$$c_1(\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|w_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}) \leq \\ \leq \Phi(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t), \theta(\cdot,t)),$$

$$\Phi(w(\cdot,t), w_t(\cdot,t), \theta(\cdot,t)) \leq \Phi(0, w_1, \theta_0) - \\ - c_2 \int\limits_0^t \big(\|w_x(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(0,1)}\big) d\tau,$$

где $t > 0$, $(w,\theta) \in F(r)$ и $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ некоторые постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнений системы (кроме того c_2 зависит от r).

С помощью выше приведенных неравенств показывается сходимость компонент решений аппроксимационной задачи (15)-(20) к нулю в норме $L^2(0,1)$ при $t \to \infty$.

В заключение приведенным выше результатам, доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2 *Пусть выполнены условия (A3)-(A5). Тогда любое слабое решение* (w,θ) *исходной системы* (8)-(13) *и производная* w_t *сходятся к нулю в норме* $L^2(0,1)$ *при* $t \to \infty$.

Во второй половине третьей главы для системы вида (8)-(11) с начальными данными

$$w(x,0) = w_0,\ w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in (0,1), \tag{22}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1), \tag{23}$$

используется метод многозначных полугрупп[2]. Для этого строится функция $S : [0,T] \times D \to 2^D$ следующим образом

$$S(t, w_0, w_1, \theta_0) := \Big\{ \{\tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\theta}\} \in D \Big| \exists\{w,\theta\} \text{ решение } (8)-(11),\ (22)-(23) \\ \text{для начальных данных } w_0, w_1, \theta_0 \text{ и } w(\cdot,t) = \tilde{w}, w_t(\cdot,t) = \tilde{v}, \theta(\cdot,t) = \tilde{\theta} \Big\}, \tag{24}$$

где $D = H^1_0(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ пространство с нормой $\|(u,v,w)\|_D = \max\{\|u\|_{L^2(0,1)}, \|v\|_{L^2(0,1)}, \|w\|_{L^2(0,1)}\}$.

Можно показать, что для S выполняется следующее свойство

$$S(t+s, w_0, w_1, \theta_0) = S(t, S(s, w_0, w_1, \theta_0)), \tag{25}$$

для любых $t, s > 0$ и w_0, w_1, θ_0 - начальных данных системы (8)-(11), (22)-(23).

Далее для S вводятся следующие определения.

Определение 3.2 Предположим, что есть последовательности $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{w_{n0}\} \subset H_0^1(\Omega)$, $\{w_{n1}\} \subset L^2(\Omega)$, $\{\theta_{n0}\} \subset L^2(\Omega)$, такие, что $t_n \to t$, $w_{n0} \to w_0$, $w_{n1} \to w_1$, $\theta_{n0} \to \theta_0$ при $n \to \infty$ для некоторых $t \in \mathbb{R}_+$, $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. Допустим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует тройка функций $\{\tilde{w}_n, \tilde{v}_n, \tilde{\theta}_n\}$ обладающая свойствами:

$$\{\tilde{w}_n, \tilde{v}_n, \tilde{\theta}_n\} \in S(t_n, w_{n0}, w_{n1}, \theta_{n0}),$$

$$\{\tilde{w}_n, \tilde{v}_n, \tilde{\theta}_n\} \to \{\tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\theta}\}, \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда *непрерывность S относительно начальных данных* означает, что $\{\tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\theta}\} \in S(t, w_0, w_1, \theta_0)$. $\square$

Определение 3.3 Многозначная функция S, обладающая свойствами (24)-(25) и удовлетворяющая определению непрерывности относительно начальных данных, называется *многозначной полугруппой системы* (8)-(11), (22)-(23). $\square$

Доказывается, что построенная в (24) многозначная функция S действительно является многозначной полугруппой системы (8)-(11), (22)-(23).

Далее рассматривается подпространство $D' \subset D$ и для S строится поглощающее множество B_0, такое, что для некоторого $t_0 > 0$, $S(t, D') \subset B_0, \ \forall t \geq t_0$.

С помощью поглощающего множества B_0 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3 *Для многозначной полугруппы S системы* (8)-(11), (22)-(23) *существует множество $\mathcal{A} \subset D'$, такое, что*

- *$\mathcal{A}$ - непусто и компактно;*

- *для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon)$, такое, что*

$$dist_D(S(t, y), \mathcal{A}) < \varepsilon, \ y \in D' \text{ и } t \geq T(\varepsilon);$$

- $S(t, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ *для любого* $t \geq 0$.

Множество $\mathcal{A}$ *называется аттрактором для многозначной полугруппы* S.

В заключение в третьей главе приводятся численные результаты, полученные с использованием пакета Matlab, которые демонстрируют доказанное аналитически асимптотическое поведение решений системы типа (8)-(13).

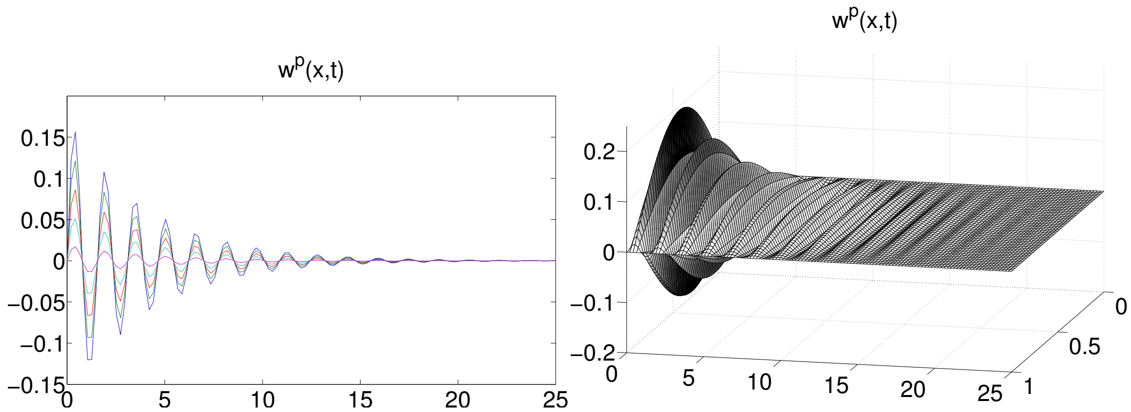

Рис. 1. Асимптотическое поведение компоненты решения w. Слева – проекция при $x = 0.5$ различных решений для множества начальных данных, справа – одно решение $w(x, t)$.

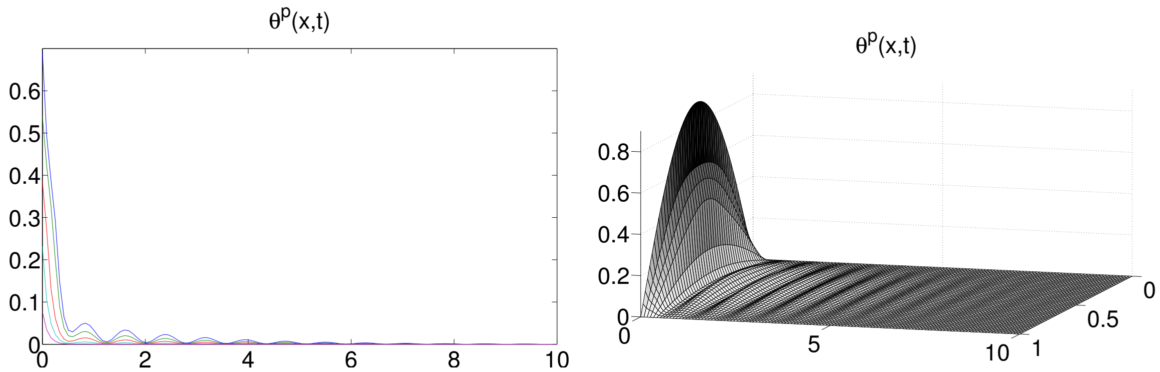

Рис. 2. Асимптотическое поведение компоненты решения θ. Слева – проекция при $x = 0.5$ различных решений для множества начальных данных, справа – одно решение $\theta(x, t)$.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

[1] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[2] Kenmochi N., Yamazaki N. Global attractor of the multivalued semigroup associated with a phase-field model of grain boundary motion with constraint // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Supplement 2011. 2011. Vol. 2. P. 824–833.

[3] Manoranjan V. S., Showalter R., Yin H.-M. On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2006. Vol. 4, № 15. P. 1155–1168.

[4] Yin H.-M. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect // SIAM J. of Mathematical Analysis. 1998. Vol. 29. P. 637–651.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. Райтманн Ф., Юмагузин Н. Ю. Асимптотическое поведение решений двухфазовой задачи микроволнового нагрева в одномерном случае // Вестник Санкт-Петербургского Университета. 2012. Сер. 1. Вып. 3. С. 59–62.

2. Kalinin Y. N., Reitmann V., Yumaguzin N. Y. Asymptotic behavior of Maxwell's equation in one-space dimension with thermal effect // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Supplement 2011. 2011. Vol. 2. P. 754–762.

3. Reitmann V., Yumaguzin N. Y. Frequency-domain conditions for convergence to the stationary set in coupled PDEs / Abstracts of "The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications". 2010. Dresden. Germany. P. 305.

4. Reitmann V., Yumaguzin N. Y. Stability analysis for Maxwell's equation with a thermal effect in one spatial dimension / Abstracts of "The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations", international workshop "Spatio-temporal dynamical systems". 2011. Moscow. Russia. P. 57.