Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Иванов Сергей Олегович

Резольвенты и когомологические свойства самоинъективных алгебр

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ГЕНЕРАЛОВ Александр Иванович
Официальные оппоненты:	1) кандидат физико-математических наук, КОСОВСКАЯ Надежда Юрьевна (Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров) 2) доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, ПАНИН Иван Александрович (Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН)
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена”

Защита состоится ____________ 2012 г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9, ауд. 133.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан ____________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одна из целей некоммутативной алгебраической геометрии заключается в том, чтобы понять, как устроены $\boldsymbol{k}$-линейные триангулированные категории над алгебраически замкнутым полем $\boldsymbol{k}$, свойства которых близки к свойствам производных категорий $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh(X)})$ ограниченных комплексов когерентных пучков на проективном многообразии X над $\boldsymbol{k}$. Функтором Серра триангулированной $\boldsymbol{k}$-линейной Hom-конечной категории $\mathcal{T}$, вслед за А.И.Бондалом и М.М.Капрановым, назовем триангулированную автоэквивалентность $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ такую, что имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, S) \cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, F(T)),$$

где $D = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(-, \boldsymbol{k})$. Если функтор Серра существует, то он единственен с точностью до изоморфизма. Тогда для гладкого проективного многообразия X размерности n и канонического пучка $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_X$ классическая двойственность Серра

$$H^i(X, \mathscr{F}) \cong D\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathscr{F}, \omega_X),$$

где $\mathscr{F} \in \mathrm{coh}(X)$, является следствием того, что $F = - \otimes \omega_X[n]$ — функтор Серра на производной категории ограниченных комплексов когерентных пучков $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Если на $\boldsymbol{k}$-линейной Hom-конечной триангулированной категории $\mathcal{T}$ есть функтор Серра, то мы будем говорить, что $\mathcal{T}$ — триангулированная категория с двойственностью Серра.

Важным примером триангулированной категории с двойственностью Серра является производная категория $\mathscr{D}^b(\text{mod-}A)$, где mod-$A$ — категория конечнопорожденных модулей над конечномерной $\boldsymbol{k}$-алгеброй A конечной глобальной размерности. Кроме того, в статье И. Райтен и М. ван ден Берга (2002) дано полное описание нетеровых наследственных абелевых категорий $\mathscr{A}$ таких, что на производной категории $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ имеется двойственность Серра. Таким образом, триангулированные категории с двойственностью Серра вызывают большой интерес.

Следуя Концевичу, триангулированную $\boldsymbol{k}$-линейную Hom-конечную категорию $\mathcal{T}$ назовем категорией Калаби–Яу, если существует такое n, что n-кратный функтор сдвига $[n]$ (рассматриваемый как триангулированный функтор) является функтором Серра. В этом случае наименьшее такое $n \geqslant 0$ называется размерностью Калаби–Яу категории $\mathcal{T}$ и обозначается $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T})$; если категория $\mathcal{T}$ не является категорией Калаби–Яу, то положим $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T}) = \infty$.

В том случае, когда конечномерная алгебра A самоинъективна, кроме производной категории $\mathscr{D}^b(\text{mod-}A)$ этой алгебре можно сопоставить еще одну триангулированную $\boldsymbol{k}$-линейную Hom-конечную категорию — стабильную категорию модулей $\underline{\text{mod}}\text{-}A$, функтором сдвига в которой является обратный Ω_A^{-1} к функтору сизигии Хеллера Ω_A. В этом случае, следуя К.Эрдманн и А.Сковронскому, определим стабильную Калаби–Яу размерность алгебры A как Калаби–Яу размерность стабильной категории $\underline{\text{mod}}\text{-}A$, и обозначим ее $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A)$. К.Эрдманн и А.Сковронски доказали, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = n$ тогда и только тогда, когда n — наименьшее неотрицательное число, для которого $\Omega_A^{n+1} \cong \underline{\nu}^{-1}$, где $\underline{\nu}^{-1} : \underline{\text{mod}}\text{-}A \to \underline{\text{mod}}\text{-}A$ — функтор, индуцированный обратным функтором Накаямы $\nu^{-1} : \text{mod-}A \to \text{mod-}A$. Кроме того, они описали алгебры стабильной Калаби–Яу размерности $0, 1$ и 2, доказали, что для алгебр кватернионного типа $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$, и вычислили стабильные Калаби–Яу размерности для некоторых других классов алгебр.

Напомним, что К. Эрдманн описала все групповые блоки ручного типа представления, вложив их в три семейства алгебр: алгебры диэрального, полудиэдрального и кватернионного типов. В той же работе К. Эрдманн описала эти классы алгебр с точностью до Морита-эквивалентности, предъявив явно список из нескольких семейств алгебр путей колчанов с соотношениями каждого из типов. Поэтому эти алгебры интересны с точки зрения теории представлений конечных групп.

Кроме стабильной Калаби–Яу размерности нас будет интересовать еще один когомологический инвариант алгебр — алгебра когомологий Хохшильда.

Когомологии алгебр были открыты Дж. Хохшильдом в 1940-х годах. А. Картан и С. Эйленберг в 1956 г. распространили первоначальное определение на случай алгебр над произвольным кольцом. В 1963 г. М. Герстенхабер обнаружил на когомологиях алгебр лиевскую структуру, согласованную с

$\smile$-умножением. Когомологии Хохшильда — тонкий инвариант ассоциативной алгебры, содержащий массу информации о ее структуре. Поскольку ассоциативные алгебры играют ключевую роль во множестве дисциплин, то и когомологии Хохшильда оказываются важнейшими объектами для изучения как в теории представлений ассоциативных алгебр, так и в теории центральных простых алгебр, алгебраической геометрии, некоммутативной геометрии, гомотопической теории деформаций, струнной топологии и функциональном анализе.

Несмотря на то, что определение когомологий Хохшильда было дано больше полувека назад, вычисления этого инварианта алгебр в конкретных примерах стали появляться сравнительно недавно. Здесь необходимо упомянуть целую серию публикаций, в которых исследуются когомологии Хохшильда алгебр из классификации К. Эрдманн (1990). В работах А. И. Генералова в 2006 г. алгебра когомологий Хохшильда описана для одной из серий локальных алгебр кватернионного типа и в 2008 г. для двухвершинных алгебр кватернионного типа серии $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1$ при $k = 1$. Далее, А. И. Генералов в 2004 г. вычислил алгебру когомологий Хохшильда алгебр диэдрального типа семейства $D(3\mathscr{K})$ и в 2010 г. для серии локальных алгебр диэдрального типа. Наконец, в недавних статьях А. И. Генералова 2009–2011 гг. описаны алгебры когомологий Хохшильда для серии локальных алгебр полудиэдрального типа и, в частности, для групповых алгебр полудиэдральных групп. Аналогичные результаты для алгебр уже не ручного, а конечного типа представления были получены С. Зигелем и С. Уизерспун в 2000 г. Они вычислили когомологии Хохшильда циклического блока. Кроме того, А. А. Иванов вычислил аддитивную структуру когомологий Хохшильда алгебр $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1$ над полем характеристики не 2 в 2010 г., и мультипликативную структуру над полем характеристики 3 в 2011 г.

К. Эрдманн в 1990 г. и Т. Хольм в 1999 г. показали, что все алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов имеют ручной тип представления. Классификация с точностью до Морита-эквивалентности алгебр указанных типов, проделанная К. Эрдманн в 1990 г., была уточнена в 1999 г. Т. Хольмом, когда он предъявил список, содержащий представителей всех классов производной эквивалентности из списка К. Эрманн. Однако эти классификации не полны, поскольку не известно, лежат ли различные представители в различных классах эквивалентности. Дополнительным инструментом, позволяющим уточнить эти классификации, могут послужить когомологии Хохшильда.

Цель работы. Основной целью работы является изучение когомологических свойств алгебр кватернионного типа и близких к ним.

Известно, что алгебры кватернионного типа имеют стабильную Калаби–Яу размерность три. В связи с этим, одна из целей работы заключается в том, чтобы предъявить некоторое легко проверяемое свойство для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями $A = \boldsymbol{k}Q/I$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- Оно должно явно формулироваться на языке колчана Q и идеала соотношений I.
- Из этого условия должно следовать, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$.
- Этому условию должны удовлетворять все известные алгебры путей с соотношениями стабильной Калаби–Яу размерности три. В частности, все алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн.

Таким свойством оказывается наличие у алгебры так называемого DTI-семейства соотношений.

Другой целью работы является вычисление алгебр когомологий Хохшильда для серии алгебр кватернионного типа $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1$ над полем характеристики два при нечетном k и четном s.

Методы исследований. Основным методом исследования является изучение и использование при вычислениях бимодульной резольвенты. Из наличия DTI-семейства соотношений у алгебры путей колчана с соотношениями делаются некоторые выводы о строении минимальной бимодульной резольвенты, на основании которых и доказывается, что ее стабильная Калаби–Яу размерность равна трем.

Вычисления алгебры когомологий Хохшильда в настоящей работе производятся с использованием техники работ А. И. Генералова. Для вычислений используется минимальная проективная резольвента. Основным фактом необходимым для вычисления мультипликативной структуры является совпадение $\smile$-произведения в когомологиях Хохшильда и произведения по Йонеде. Поиск образующих и соотношений, описывающих мультипликативную структуру, производится при помощи минимальной проективной резольвенты. Доказательство достаточности найденных образующих и соотношений выполняется стандартным образом, идеологически близким к технике базисов Гребнера, посредством введения лексикографического порядка и нормальной формы.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

- Получены новые представления для функтора Накаямы для самоинъективной алгебры: $\nu \cong \mathrm{Hom}_A(A^{t^e}, -),\ \nu^{-1} \cong - \otimes_A A^{t^e}$.
- Доказано, что алгебры, допускающие DTI-семейство соотношений, за некоторым исключением, имеют стабильную Калаби–Яу размерность три.
- Доказано, что алгебры кватернионного типа допускают DTI-семейство соотношений.
- Вычислена алгебра когомологий Хохшильда алгебр кватернионного типа серии $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1$ над полем характеристики два при нечетном $k \geq 3$ и четном s.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Исследование алгебр фиксированной стабильной Калаби–Яу размерности представляет интерес с двух точек зрения. С одной стороны, стабильная Калаби–Яу размерность алгебры является важным гомологическим инвариантом алгебры, так как она связана с периодичностью резольвент и со структурой когомологий Хохшильда (особенно очевидна эта связь для симметрических алгебр). Поэтому такое описание представляет интерес с точки зрения теории представлений конечномерных алгебр. С другой стороны, благодаря описанию алгебр фиксированной стабильной Калаби–Яу размерности, мы получаем много примеров триангулированных Калаби–Яу категорий, которые представляют интерес с точки зрения (некоммутативной) алгебраической геометрии.

Вычисления алгебры когомологий Хохшильда алгебр кватернионного типа могут быть применены в теории представлений конечномерных алгебр и в классификационных задачах. Также результаты могут использоваться для дальнейшего исследования строения когомологий Хохшильда.

Аппробация работы. Результаты диссертационной работы неоднкратно излагались на Санкт-Петербургском городском алгебраическом семинаре имени Д.К. Фаддеева и международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы печатных работах автора [1]–[5], приведенных в конце автореферата. Из них три [1]–[3] вышли в журналах, входящих в список ВАК.

Работа [1] написана в соавторстве, в ней диссертанту принадлежит теорема о том, как явно предъявить свободную бимодульную резольвенту групповой алгебры RG (над произвольным коммутативным кольцом R), имея в наличии свободную резольвенту тривиального модуля R (теорема 2).

Работа [4] написана в соавторстве, в ней диссертанту принадлежит вычисление алгебры когомологий Хохшильда алгебр семейства $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1$ для нечетого k и четного s, теорема 1.1 (пункт 3) и предложение 1.2 (частично).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав (первая глава содержит четыре раздела, вторая — три раздела, третья — семь разделов, и четвертая — четыре раздела) и списка литературы, содержащего 44 наименования. Объем диссертации 114 страниц.

Содержание работы

Хорошо известно, что одним из эффективных способов исследования математического объекта, является изучение различных его гомологических инвариантов. В настоящей работе объектами исследования являются некоторые типы самоинъективных алгебр. Оказывается, что большая часть всей (ко)гомологической информации об алгебре A содержится в ее бимодульной резольвенте (проективной резольвенте бимодуля A). Этого принципа — смотреть в первую очередь за поведением бимодульной резольвенты при изучении (ко)гомологических инвариантов алгебры — мы будем придерживаться на протяжении всей работы.

Теперь обсудим каждую главу в отдельности.

В первой главе вводятся необходимые определения и конструкции, которые нам понадобятся в дальнейшем. Кроме того, там есть несколько результатов, полученных автором, но которые уместно было предъявить именно в этой главе. К результатам автора относится теорема 1.5 пункта 1.2.2, который посвящен тому, чтобы научиться явным образом предъявлять свободную бимодульную резольвенту групповой алгебры RG (над произвольным коммутативным кольцом R), имея в наличии свободную резольвенту тривиального модуля R.

Теорема 1.5. *Пусть R — коммутативное кольцо (ассоциативное с 1), G — конечная группа, и $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} R$ — свободная резольвента тривиального G-модуля, для которой $F_\bullet = \Big((RG)^{k_n},\ d_n\Big)_{n\geqslant 0}$, причем $k_0 = 1$ и пополняющий гомоморфизм равен $\varepsilon(\sum r_g g) = \sum r_g$. Тогда если обозначить $\mathbf{F}_n = ((RG)^{\mathrm{e}})^{k_n}$, $(\mathbf{d}_n)_{ij} = \Delta((d_n)_{ij})$ и $\mathbf{F}_\bullet = (\mathbf{F}_n,\ \mathbf{d}_n)_{n\geq 0}$, то $\mathbf{F}_\bullet \xrightarrow{m} RG$ — свободная бимодульная резольвента, где m — гомоморфизм умножения.*

Этот факт напоминает лемму Хаппеля для конечномерных алгебр над полем, но он доставляет больше информации, так как позволяет предъявить не только бимодули бимодульной резольвенты, но и дифференциалы. Кроме того, к результатам автора относятся результаты подпунктов 1.3.3 и 1.3.6. В первом из них обсуждаются свойства функтора:

$$\mathscr{T}^{\mathrm{e}} = (-)^{t^{\mathrm{e}}} = \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(-, A\otimes A) : \mathrm{bimod}\text{-}A \to \mathrm{bimod}\text{-}A,$$

а в подпункте 1.3.6 обсуждаются дополнительные структуры на фробениусовых алгебрах путей колчана с соотношениями и то, какими дополнительными свойствами они обладают в том случае, когда фробениусова форма выбрана удачно. Поясним это более подробно. Пусть $A = \boldsymbol{k}Q/I$ — алгебра путей колчана с соотношениями и $\varepsilon : A \to \boldsymbol{k}$ — фробениусова форма. Фробениусову форму ε назовем Q_0-фробениусовой формой, если существует $\boldsymbol{k}Q_0$-бимодуль $T \leq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ такой, что $A = \mathrm{soc}(A) \oplus T$. Легко проверить, что на любой фробениусовой алгебре путей колчана с соотношениями существует Q_0-фробениусова форма.

Предложение 1.13. *Пусть $A = \boldsymbol{k}Q/I$ — самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, $\varepsilon : A \to \boldsymbol{k}$ — Q_0-фробениусова форма на A, $\tilde{\nu} : A \to A$ — соответствующий автоморфизм Накаямы, и $\varrho : A \to A \otimes A$ — соответствующее фробениусово коумножение. Тогда $\tilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)}$ для любого $i \in Q_0$ и $\mathrm{Im}(\varrho) \leqslant \bigoplus\limits_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i}$, причем*

$$\varrho' : A \to \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i},$$

где $\varrho'(a) = \varrho(a)$, — это инъективная оболочка бимодуля A.

Глава 2 посвящена различным вариантам теоремы Эйленберга-Уотса и выведению из них некоторого представления обратного функтора Накаямы для самоинъективных алгебр. Теорема Эйленберга–Уотса говорит о том, что точный справа функтор $F : \text{Mod-}A \to \text{Mod-}B$, сохраняющий прямые суммы, представляется в виде $F \cong - \otimes_A X$, где X — некоторый (A, B)-бимодуль, а точный слева функтор, сохраняющий пределы, представляется в виде $F \cong \mathrm{Hom}_A(Y, -)$, где Y — некоторый (B, A)-бимодуль. Причем в первом случае бимодуль X задается явно: $X = F(A)$ с естественной структурой (A, B)-бимодуля. Имеются также аналогичные формулировки для контравариантных точных слева функторов. В главе 2 доказывается, что для категорий конечно порожденных модулей над конечномерными алгебрами все эти теоремы остаются верны, причем бимодуль Y в этом случае можно задать явно $Y = D(F(D(A)))$.

Теорема 2.9. *Пусть A, B — конечномерные алгебры. Если $F : \text{mod-}A \to \text{mod-}B$ — точный слева функтор, то имеет место изоморфизм*

$$F \cong \mathrm{Hom}_A\big(D(F(D(A))),\ -\big).$$

Далее рассмотренные варианты теорем Эйленберга-Уотса позволяют достаточно просто доказать некоторые утверждения в теории представлений конечномерных алгебр (уже известные и новые). В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема 2.17. *Если A — самоинъективная алгебра, то для любого A-модуля M имеют место естественные изоморфизмы*

$$\nu(M) \cong \mathrm{Hom}_A(A^{t^e}, M), \qquad \nu^{-}(M) \cong M \otimes_A A^{t^e}.$$

Глава 3 посвящена алгебрам стабильной Калаби–Яу размерности равной трем. Стабильная Калаби–Яу размерность — это гомологический целочисленный инвариант, который тоже зависит от поведения бимодульной резольвенты.

Мы заметили, что причиной того, что стабильная Калаби–Яу размерность алгебр кватернионного типа равна трем, является некоторое специфическое устройство бимодульной резольвенты, и решили понять, на какой класс алгебр можно обобщить этот эффект. Таким образом, возникло понятие алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений, которое мы обсуждаем в главе 3. Было доказано, что алгебры, допускающие DTI-семейство соотношений, за некоторым исключением, имеют стабильную Калаби–Яу размерность, равную трем, и алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн допускают DTI-семейство соотношений. Кроме того, при помощи техники DTI-семейств соотношений, были описаны алгебры Накаямы, имеющие стабильную Калаби–Яу размерность, равную трем, также приведен пример алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений, не лежащий в уже указанных классах алгебр.

Определение. Пусть $A = \boldsymbol{k}Q/I$ — алгебра путей с соотношениями. Q_1-индексированное семейство $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$, составленное из элементов идеала I, назовем DTI-семейством соотношений (дифференциально twist-инвариантным семейством соотношений), если выполнены следующие три условия.

`(DTI-1)` $r_\alpha \in e_{t(\alpha)} I e_{s(\alpha)}$ для всех $\alpha \in Q_1$.

`(DTI-2)` $\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial \beta}\right)$ для всех $\alpha, \beta \in Q_1$.

`(DTI-3)` Семейство $\pi\mathscr{R} = \{\pi(r_\alpha)\}_{\alpha \in Q_1}$ образует базис в $\mathrm{top}(I)$, где $\mathrm{top}(I) = I/JI + IJ$, и $\pi : I \to \mathrm{top}(I)$ — каноническая проекция.

Теорема 3.9. *Пусть $A = \boldsymbol{k}Q/I$ — самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями.*

1. *Если у алгебры A есть* DTI-*семейство соотношений,*
   то $\Omega^4_{A^{\mathrm{e}}}(A) \cong A^{t^{\mathrm{e}}}$.

2. *Если, кроме того, алгебра A связна и не изоморфна алгебрам $\boldsymbol{k}[x]/(x^n)$ и $A^{\mathrm{Nak}}_{3,2}$, то $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3$.*

Через $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ мы обозначаем следующую алгебру путей колчана с соотношениями

$$\begin{tikzcd}
Q: & & 0 \arrow[r, "\alpha_0"] & 1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& n-1 \arrow[ur, "\alpha_{n-1}"] & & & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& \vdots \arrow[u, "\alpha_{n-2}"] & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\alpha_i \ldots \alpha_{i+m-1} = 0.$$

В последнем соотношении индексы рассматриваются по модулю n.

Предложение 3.10. *Алгебра $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ допускает* DTI-*семейство соотношений тогда и только тогда, когда $n \mid m+1$.*

Теорема 3.12. *Алгебры кватернионного типа из списка К.Эрдманн допускают* DTI-*семейство соотношений.*

Кроме того, для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями, допускающих DTI-семейство соотношений, строится минимальная бимодульная резольвента (теорема 3.16).

Глава 4 посвящена вычислению алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(A)$ для алгебр кватернионного типа $A = Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c)$ при нечетном $k \geq 3$ и четном s над алгебраически замкнутым полем характеристики два. Из этих вычислений выводится, что алгебры $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,c)$ при $c \neq 0$ и $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,0)$ не производно эквивалентны. Причем это доказывается это доказывается именно с использованием мультипликативной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(A)$. Алгебры $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,c)$ задаются следующим колчаном с соотношениями.

$$Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,c)$$

$$\begin{gathered} k \geqslant 1, s \geqslant 3 \\ k+s>4 \\ c \in \boldsymbol{k} \end{gathered} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \eta\beta &= \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1}, \\ \gamma\eta &= \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1}, \\ \alpha^2 &= \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k, \\ \beta\gamma &= \eta^s, \\ \beta\alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

(Здесь произведение путей в алгебре записывается справа налево).

Для описания алгебры $\mathrm{HH}^*(A)$ для указанных алгебр серии $Q(2\mathscr{B})_1$ мы построим градуированную алгебру $\mathcal{A}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2', u_3, v_1, v_2, v_3, w_2, w_3, t\} \tag{0.1}$$

и на алгебре $\boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$ введем градуировку:

$$\deg(p_i) = 0,\ \deg(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2', u_3) = 1,$$

$$\deg(v_j) = 2,\ \deg(w_l) = 3,\ \deg(t) = 4,$$

для всех возможных i, j, l. Определим алгебру $\mathcal{A} = \boldsymbol{k}[\mathcal{X}]/I$, где идеал I алгебры $\boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$ порожден следующими элементами:

$$p_ip_j \text{ для } 1 \le i < j \le 4;\ p_1^k + p_2^s,\ p_3^2,\ p_4^2$$

$$p_1\tilde{u}_1 + p_2^{s-2}\tilde{u}_2',\ p_2\tilde{u}_1 + c\tilde{u}_2' + p_1^{k-2}u_3,\ p_2^{s-1}\tilde{u}_2',$$
$$p_1^{k-1}u_3,\ p_1\tilde{u}_2',\ p_3\tilde{u}_2',\ p_4\tilde{u}_2',\ p_2u_3,\ p_3u_3,\ p_4u_3;$$
$$p_3v_1,\ p_4v_1,\ p_3v_3,\ p_4v_3,\ p_1v_2,\ p_2v_2,\ p_4v_2,\ p_1v_1 + p_3v_2,\ p_3v_2 + p_2v_3;$$
$$p_2^{s-1}v_1 + cp_2v_3,\ p_1^{k-1}v_3,\ p_3\tilde{u}_1^2,\ p_4\tilde{u}_1^2 + p_3v_2,$$
$$\tilde{u}_1\tilde{u}_2',\ (\tilde{u}_2')^2,\ \tilde{u}_1u_3,\ u_3^2,\ \tilde{u}_2'u_3;$$

$$p_1w_2,\ p_3w_2,\ p_4w_2,\ p_2w_3,\ p_3w_3,\ p_4w_3,\ u_3v_1,\ u_2'v_2,\ u_3v_2,\ u_2'v_3,$$
$$u_3v_3 + p_1w_3,\ u_1v_1 + p_1^{k-2}w_3,\ u_2'v_1 + p_2w_2,\ p_2^{s-3}u_2'v_1 + u_1v_3 + cw_3$$

$$u_3v_1,\ \tilde{u}_2'v_2,\ u_3v_2,\ \tilde{u}_2'v_3,\ \tilde{u}_1v_1 + cw_2 + p_1^{k-2}w_3,$$
$$\tilde{u}_2'v_1 + p_2w_2,\ \tilde{u}_1v_3 + p_2^{s-3}\tilde{u}_2'v_1,\ u_3v_3 + p_1w_3,$$
$$v_1^2 + p_2^2(1+cp_2)t,\ v_3^2 + p_1^2t,\ v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_2^2,\ v_2v_3,$$
$$p_2^st,\ \tilde{u}_1w_i,\ \tilde{u}_2'w_i,\ u_3w_i \text{ для } i \in \{2,3\};\ \tilde{u}_1^4,\ \tilde{u}_1^2v_2,$$
$$v_1w_3,\ v_2w_2,\ v_2w_3,\ v_3w_2,\ v_1w_2 + (p_2 + cp_2^2)u_2't;$$
$$v_3w_3 + p_1u_3t,\ w_2^2,\ w_3^2,\ w_2w_3;$$
$$v_1w_2 + (p_2 + cp_2^2)\tilde{u}_2't.$$

В силу однородности идеала I алгебра $\mathcal{A}$ наследует градуировку с алгебры $\boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$.

Теорема 4.1. *Пусть $\boldsymbol{k}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики два, $A = Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,c)$, $k \ge 3$ нечетно и s четно. Тогда $\mathrm{HH}^*(A)$ как градуированная $\boldsymbol{k}$-алгебра изоморфна $\mathcal{A}$.*

В процессе доказательства теоремы 4.1 мы вычисляем пространства $\mathrm{HH}^n(A)$. Соответствующие результаты представляют самостоятельный интерес:

Предложение 4.2. *В предположениях предыдущей теоремы*

$$\dim_{\boldsymbol{k}} \mathrm{HH}^0(A) = k+s+2, \quad \dim_{\boldsymbol{k}} \mathrm{HH}^t(A) = k+s+1$$

для $t \ge 1$.

Из описания алгебры $\mathrm{HH}^*(A)$ на языке образующих и определяющих соотношений мы получаем следующее следствие, дополняющее классификацию К. Эрдманн.

Следствие 4.3. *В предположениях предыдущей теоремы алгебра* $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,c)$*, где* $c \neq 0$*, не является производно эквивалентной* (*и, в частности, не Морита-эквивалентна*) *алгебре* $Q^{k,s}(2\mathscr{B})_1(1,0)$.

Работы автора по теме диссертации

[1] Генералов А. И., Иванов С. О. Бимодульная резольвента групповой алгебры, // Зап. научн. семин. ПОМИ т. 365 (2009), 143–151.

[2] Иванов С. О., Функоры Накаямы и теоремы Эйленберга–Уотса. // Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 388 (2011), 179–188.

[3] Иванов С. О. Самоинъективные алгебры стабильной Калаби–Яу размерности три. // Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 394 (2011), 226–261.

[4] Генералов А. И., Иванов А. А., Иванов С. О., Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа. II. Серия $Q(2\mathscr{B})_1$ в характеристике 2. // Зап. науч. семин. ПОМИ, т. 349 (2007), 53–134.

[5] A. I. Generalov, A. A. Ivanov, S. O. Ivanov, On Hochschild cohomology of algebras of quaternion type with two vertices. // Межд. алг. конференция, посв. 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева. Тезисы докладов (2007), 114.