

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЕФИМОВ Иван Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРИТЕРИЕВ ПЛАСТИЧНОСТИ
АНИЗОТРОПНЫХ РАЗНОПРОЧНЫХ ПЛАСТИН

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2012

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры гидроупругости
ПАВИЛАЙНЕН Галина Вольдемаровна
(Санкт-Петербургский государственный университет)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры вычислительных методов механики де-
формируемого тела
Колпак Евгений Петрович
(Санкт-Петербургский государственный университет);

кандидат технических наук, доцент, заведующий
кафедрой прочности материалов и конструкций
Невзоров Николай Иванович
(Петербургский государственный университет
путей сообщения)

Ведущая организация: Балтийский государственный технический университет
«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

Защита состоится "____" _____ 201__ г. в _____ часов на заседании совета Д212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "____" _____ 201__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор

Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. С каждым годом человечество ставит перед собой все более сложные задачи при проектировании и строительстве. Обычные материалы и сплавы порой не могут справиться с возложенными на них функциями. На замену им приходят новые материалы, полученные различными методами и прошедшие специфические обработки.

Изучение поведения и сопротивляемости таких материалов в конструкциях затрудняется различными видами анизотропии. Кроме того, во время создания и обработки даже изотропного материала могут возникать неточности и внутренние напряжения, которые в дальнейшем окажут существенное влияние на прочность деталей и их поведение под действием нагрузок.

За последние годы круг исследований в этой области значительно расширился в связи с использованием в различных областях техники пластически анизотропных, в частности, текстурированных материалов.

Особый интерес представляет выявление критериев текучести, поскольку они позволяют судить о том, какие нагрузки того или иного рода выдерживает материал прежде, чем начат необратимые деформации. Изучению критериев текучести посвящены работы А.М. Жукова, А.А. Лебедева, Х.Бабела, В. Бэкофена, Д. Драккера, Ф. Ларсона, Н. Окубо, Ф. Стоктона, О.Г. Рыбакиной, Р. Хилла, Р. Мизеса, А. Треска, А.А. Трещева и других.

Многие прикладные задачи механики деформируемого твердого тела, сводятся к задачам двухосного напряженного состояния. В этих случаях поверхность, задаваемая критерием текучести, сводится к контуру текучести в плоскости. В настоящее время предложено множество видов уравнений для описания контуров текучести различных материалов. В современной практике возникает необходимость не только выявления вида этих уравнений, но и определения конкретных значений их коэффициентов по различным экспериментальным данным. В частности, в качестве экспериментальных данных могут быть использованы пределы текучести материала для различных видов нагрузок. Однако для большинства существующих критериев текучести не существует способа определения коэффициентов по таким данным.

Цель работы состоит в разработке общего метода определения коэффициентов для различных моделей контуров текучести по ограниченному числу значений пределов текучести, полученных из эксперимента.

Научная новизна содержащихся в диссертации результатов состоит: в учете различных видов анизотропии и разносопротивляемости материалов, при построении контуров текучести; в универсальности разработанного метода определения коэффициентов контуров для различных моделей; в построении контуров текучести Мизеса, Хилла, Рыбакиной и Трещева для нескольких сплавов по экспериментальным данным и проведении сравнения полученных контуров с точки зрения минимизации целевой функции оптимизации параметров.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Способ определения неизвестных параметров пластически анизотропных разнопрочных пластин по ограниченному числу экспериментальных данных на основе классических и новых математических моделей критериев пластичности и программа для ЭВМ, написанная на языке Delphi, реализующая данный способ.

2. Метод определения константы Липшица целевой функции оптимизации параметров пластически анизотропных разнопрочных пластин.
3. Численный метод определения значения целевой функции оптимизации параметров уравнений контуров текучести для анизотропных разнопрочных пластин.

Теоретическая значимость полученных результатов определяется: вкладом в развитие методов определения значений коэффициентов различных моделей контуров текучести; построением целевой функции оптимизации параметров контуров текучести, способом её вычисления и вычисления её частных производных; доказательством того, что целевая функция имеет глобальный минимум и удовлетворяет условию Липшица первого порядка; аналитическими соотношениями для определения значений констант Липшица, с помощью которых построена последовательность численных методов, позволяющая находить глобальный минимум целевой функции, определяющий искомые значения параметров контура; расширением области применения методов многомерной оптимизации на обработку экспериментальных данных для построения контуров текучести анизотропных материалов.

Практическая значимость полученных результатов заключается в разработанной методике оценки прочности и упруго-пластических свойств анизотропных материалов. На основе экспериментальных результатов создана программа для ЭВМ, реализующая последовательность методов для нахождения коэффициентов контуров текучести. С помощью этой программы построены известные ранее и новые, предложенные автором, контуры для сплавов Цирколой-1, Цирколой-2 и аустенитной нержавеющей стали. Новые контуры текучести могут быть использованы для оценки механических свойств и других сплавов, обладающих существенной анизотропией и разнопрочностью.

В широко распространенных программных инженерных пакетах (ANSYS, ADINA, Kosmos, Maple) отсутствует возможность нахождения коэффициентов контуров текучести по значениям пределов текучести, которые получены из эксперимента, поэтому описываемая в работе программа представляет дополнительное практическое значение. Кроме того, с её помощью можно давать рекомендации по эффективному проведению экспериментов, которые в дальнейшем позволят с меньшей погрешностью прогнозировать момент начала пластического течения материала. Например, сравнение экспериментальных точек и построенной гладкой кривой контура текучести позволяют оценить качество эксперимента и повторить тот, результаты которого вызывают сомнения. Кроме этого с помощью программы можно выявить условия нагружения, при которых эксперимент необходим для корректного построения контура текучести.

Основные результаты исследования ориентированы на определение прочностных характеристик деталей и конструкций из анизотропных материалов под действием различных нагрузок.

Достоверность полученных в работе научных результатов определяется корректной постановкой задачи исследования; использованием проверенных методов оптимизации, регрессионного анализа; строгой логикой доказанных утверждений; согласием теоретических результатов с экспериментальными исследованиями; апробациями на конференциях и семинарах, наличием публикаций.

Апробация работы. Основные научные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, на объединенном семинаре СПбГУ и

ПГУПС «Компьютерные методы в механике сплошной среды», на международных конференциях по механике «IV Поляховские чтения», «V Окуневские чтения», на встрече в Дрезденском техническом университете в Германии.

Публикации. По теме диссертации опубликовано четыре работы. Список приведен в конце автореферата. Работа [1] опубликована в журнале из перечня ВАК. Работы [2]-[4] опубликованы в соавторстве: научному руководителю принадлежит общая постановка задачи и указания на идеи исследования, а их реализация принадлежит диссертанту.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 81 страницу, включая 48 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 47 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы основные задачи и цели исследования, дана оценка новизны и практической ценности полученных результатов. Приведен список результатов, выносимых на защиту.

В первой главе дан подробный список рассматриваемых контуров текучести, приводятся два существующих метода определения коэффициентов контуров и формулируется задача исследования.

В первом параграфе содержится обзор основных видов критериев текучести, начиная с первого критерия французского инженера-механика Анри Э. Треска, который пришел к простому выводу, что пластическое течение начинается, когда наибольшее касательное напряжение достигает критической величины τ_Y . Согласно этому условию, для начала пластической деформации необходимо

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_Y. \quad (1)$$

Геометрической интерпретацией этого уравнения в плоскости главных напряжений является шестиугольник, изображённый на рисунке 1.

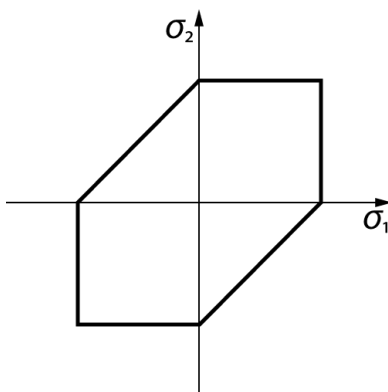


Рис. 1: Шестиугольник Треска

Следующим описывается квадратичное условие текучести Губера-Мизеса, которое, в случае плоского напряжённого состояния представляется следующим уравнением:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2, \quad (2)$$

и описывает эллипс на плоскости главных напряжений, симметричный относительно прямой $\sigma_1 = \sigma_2$ и имеющий центр, совпадающий с центром координат (рисунок 2 а). Шестиугольник Треска является вписанным в этот эллипс.

В 1948 году Р. Хиллом было предложено условие текучести для трансверсально-изотропных материалов, которое, в случае плоского напряжённого состояния принимает вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - A\sigma_1\sigma_2 = \sigma_Y^2, \quad (3)$$

где σ_Y — предел текучести при одноосном растяжении, A — параметр анизотропии. Это равенство определяет контур Мизеса с той разницей, что он может «вытягиваться» вдоль прямой $\sigma_1 = \sigma_2$ в зависимости от параметра A . (рисунок 2 б).

Далее рассматривается контур текучести ортотропных материалов с эффектом SD О.Г.Рыбакиной, уравнение которого имеет вид:

$$\sqrt{F(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)^2 + G(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)^2 + H(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2} + \frac{\alpha_1\sigma_1}{3} + \frac{\alpha_2\sigma_2}{3} + \frac{\alpha_3\sigma_3}{3} = 1. \quad (4)$$

где $F, G, H, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — параметры, определяемые свойствами конкретного материала. В случае плоского напряжённого состояния критерий О.Г. Рыбакиной в преобразованном виде представляет следующее равенство:

$$a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2 + a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33} = 0 \quad (5)$$

Это уравнение является уравнением кривой второго порядка, его геометрической интерпретацией с учётом физического смысла является произвольный действительный эллипс, содержащий внутри себя начало координат (рисунок 2 с)

В ряде работ предлагается определять критерий текучести материала в зависимости от функции вида напряженного состояния. Например, в работах научной школы Трещева А.А. и его учеников предлагается условие пластичности в следующем виде:

$$F(\sigma_{ij}) = \tau f(\xi) = k_\tau, \quad (6)$$

где $f(\xi)$ — функция вида напряжённого состояния, $k_\tau = \sqrt{2/3}\tau_s$ (τ_s - предел текучести при чистом сдвиге), $\xi = \sigma/S_0$, $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, σ - среднее напряжение или нормальное октаэдрическое, τ — касательное октаэдрическое напряжение.

График контуров текучести в этом случае принимает вид, изображённый на рисунке 2 d).

Список критериев пластичности не заканчивается этими пятью. Также известными являются поверхности текучести Мора-Кулона, Друкера-Прагера, Бреселя-Пистера и многих других, но в данной работе наиболее подробно будут рассматриваться именно упомянутые пять критериев, поскольку большинство других контуров являются их частными случаями.

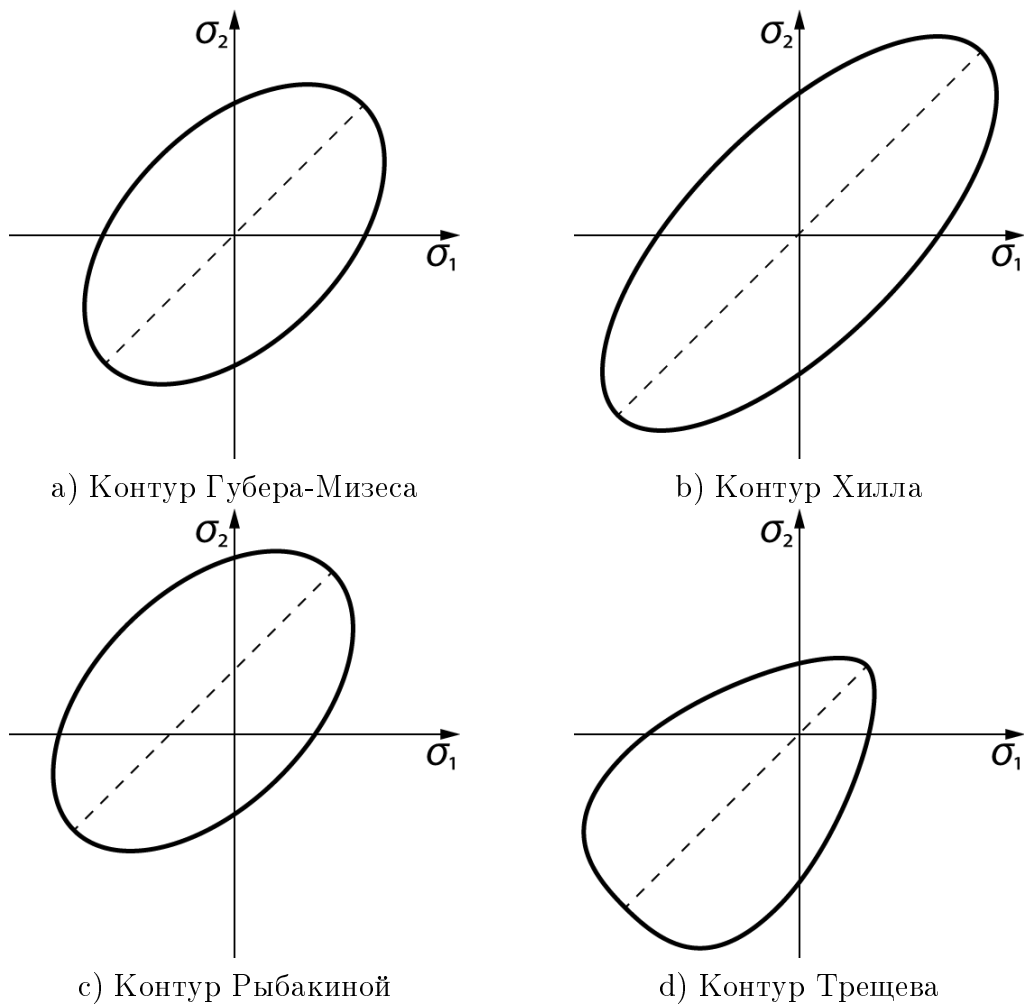


Рис. 2: Различные виды контуров текучести

Во втором параграфе приведены два существующих способа определения коэффициентов контуров текучести. Первый способ позволяет вычислить значение единственного коэффициента контура Мизеса (2) по нескольким пределам текучести, полученным из эксперимента, как среднее арифметическое. Второй способ позволяет строить контуры Трещева и основан на аппроксимации функции вида напряженного состояния.

В третьем параграфе констатируется, что пределы текучести для различного вида нагрузок в различных направлениях определяются уже несколько десятилетий, однако общего метода построения контуров по таким экспериментальным данным не существует.

Связано это, в первую очередь, с тем, что повышенный практический интерес к анизотропным, разносопротивляющимся материалам появился лишь в последние годы. По этой причине для приближенного вычисления пределов текучести по экспериментальным данным используются в основном контуры Мизеса, Хилла и другие, которые содержат не более двух коэффициентов, определяемых свойствами конкретного материала, что недостаточно для прогнозирования механических свойств анизотропных разнородных материалов.

Подобрать значения этих коэффициентов по экспериментальным данным не составляет особого труда. Увеличение числа коэффициентов существенно усложняет задачу их нахождения, однако это позволяет с большей точностью прогнозировать, при каких на-

пряжениях деформация материала перейдет в пластическую стадию.

Задача работы: разработать и реализовать общий математический метод нахождения значений коэффициентов различных видов контуров текучести по экспериментальным данным — пределам текучести при двухосном напряжённом состоянии, а также применить его для построения контуров сплавов Циркалой-1, Циркалой-2 и аустенитной нержавеющей стали.

Вторая глава посвящена методам определения значений коэффициентов контуров текучести анизотропных, разносопротивляющихся материалов.

В первом параграфе формализуется цель исследования. Согласно методу наименьших квадратов определяется целевая функция E оптимизации параметров, которая подлежит минимизации, равная сумме квадратов расстояний от точек-пределов текучести до контура на плоскости главных напряжений:

$$E(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n l_i^2, \quad (7)$$

где x_j — коэффициенты контура, l_i — расстояние от точки i -ого предела текучести до контура, n — количество пределов текучести, известных из эксперимента. Данную формулу иллюстрирует рисунок 3.

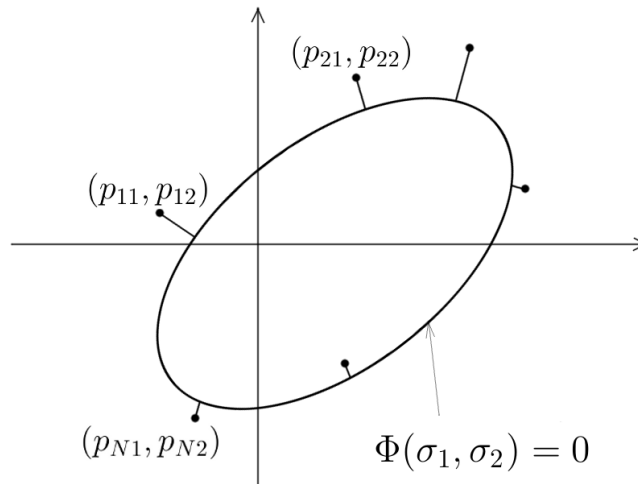


Рис. 3: Контур текучести Φ с точками — экспериментальными данными в плоскости главных напряжений

Во втором параграфе проводится исследование целевой функции E для случая, когда контур представлен действительным эллипсом, и для случая, когда он задан критерием Трещева. Доказывается утверждение, что целевая функция удовлетворяет условию Липшица первого порядка, т.е. существует константа $L \in R$ такая, что для любых $x, y \in X = (x \in R^m | x_i \in [a_i, b_i])$ выполнено условие:

$$|E(x) - E(y)| \leq L \|x - y\|, \quad (8)$$

где

$$\|z\| = \sum_{i=1}^m z_i^2. \quad (9)$$

В ходе доказательства проводится оценка сверху константы L , которая позволит найти минимум целевой функции методом перебора на неравномерной сетке, предложенным академиком РАН Ю.Г.Евтушенко.

В параграфах 3-6 приводятся четыре метода минимизации многомерной целевой функции E : метод ручного подбора, метод координатного спуска, метод градиентного спуска и метод перебора на неравномерной сетке.

Метод ручного подбора основан на том, что любой человек способен решать многие задачи приблизительно, используя ранее приобретённый опыт, а также примерные оценки и сравнения различных величин.

Среди таких задач находятся задачи аппроксимации функцией известного вида методом наименьших квадратов. Для ручного построения контура необходимо предоставить человеку программные инструменты, с помощью которых он мог бы подбирать по визуальной информации форму контура наиболее подходящей к экспериментальным данным, тем самым уменьшая значение целевой функции E .

Субъективность этого метода не позволяет строить решения с какой-либо определенной точностью, однако, в совокупности с другими методами он находит практическое применение.

Поиск минимума целевой функции $E(x)$ методом координатного спуска основан на поочередном фиксировании $m - 1$ коэффициентов контура x_i и нахождении минимума E , как функции одного переменного x_k — единственного не зафиксированного коэффициента. Т.е. спуск по $m + 1$ -мерной поверхности $E = E(x)$ ведется поочередно вдоль каждой из m осей, соответствующей своему коэффициенту контура и продолжается, пока не выполнено условие остановки алгоритма, когда на k -ом шаге изменение целевой функции оказывается меньше заранее заданного числа, то есть выполнено условие:

$$|E(x_k) - E(x_{k-1})| \leq \varepsilon, \quad (10)$$

где ε — требуемая точность.

Поиск минимума целевой функции $E(x)$ методом наискорейшего (градиентного) спуска основан на движении от точки-начального приближения в направлении обратном вектору градиента, вычисляемому по формуле:

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial x_m} \right), \quad (11)$$

то есть в сторону наибольшего уменьшения целевой функции E . На первой итерации вычисляется вектор градиента ΔE функции $E(x)$ в точке $x^{(1)}$, где $x^{(1)}$ — вектор коэффициентов контура начального приближения, которое может быть выбрано произвольно. Каждое следующее приближение $x^{(k+1)}$ вычисляется по формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda \Delta E(x^{(k)}), \quad (12)$$

где λ — параметр, характеризующий скорость спуска. Минимум считается достигнутым, если выполнено условие остановки (10).

Значение параметра λ может быть задано постоянным, или быть адаптивным, то есть вычисляться на каждой итерации заново по некоторому алгоритму. Наиболее эффективный, хотя и наиболее сложный в реализации, метод подбора значения параметра λ связан с направленной минимизацией целевой функции в выбранном направлении вектора $\Delta E(x^{(k)})$.

Целевая функция $E(x)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка на ограниченном множестве $D = (x \in R^m \mid x_i \in [a_i, b_i])$ с константой L , поэтому, для нахождения глобального минимума может быть применен метод перебора на неравномерной сетке Ю.Г. Евтушенко.

Данный метод, называемой также методом неравномерных покрытий, решает задачу нахождения хотя бы одной точки $y \in D$ такой, что для любого $x \in D$ имеет место

$$E(y) - E(x) \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где ε — некоторое заданное число.

Метод основан на ограниченности изменения значения целевой функции и заключается в переборе точек множества D с переменным шагом, обеспечивающим нахождение минимума целевой функции с заданной точностью.

Если в точке $x \in D$ функция E принимает значение E_1 , то в окрестности радиуса r точки x

$$r = \frac{\varepsilon}{L} \quad (14)$$

функция E может принимать только те значения, которые отличаются от E_1 не больше, чем на ε , а значит все точки этой окрестности, кроме x можно не учитывать при поиске минимума E .

Кроме того, если известно, что функция E в какой-то другой точке множества D принимает значение E_2 меньшее, чем E_1 , то ни в одной точке из окрестности x радиуса r

$$r = \frac{\varepsilon + E_1 - E_2}{L} \quad (15)$$

не может быть достигнуто значение функции E меньшее, чем E_2 с точностью до ε , а значит данную окрестность можно не учитывать.

Множество D делится на квадратные подмножества, частично перекрывающие друг друга, которые являются вписанными в указанные окрестности, внутри которых потенциально может быть достигнут глобальный минимум с учетом требуемой точности ε , константы Липшица L и с учетом ранее достигнутого минимального значения функции $E(x)$ на предыдущих итерациях.

Для примера работы метода в шестом параграфе была взята функция двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (16)$$

на множестве $x, y \in [-10, 20]$. Ясно, что её минимальное значение достигается при $x = 0, y = 0$ и равно -3 (рисунок 4 а).

Рисунок 4 б иллюстрирует перебор на неравномерной сетке для трехмерной поверхности.

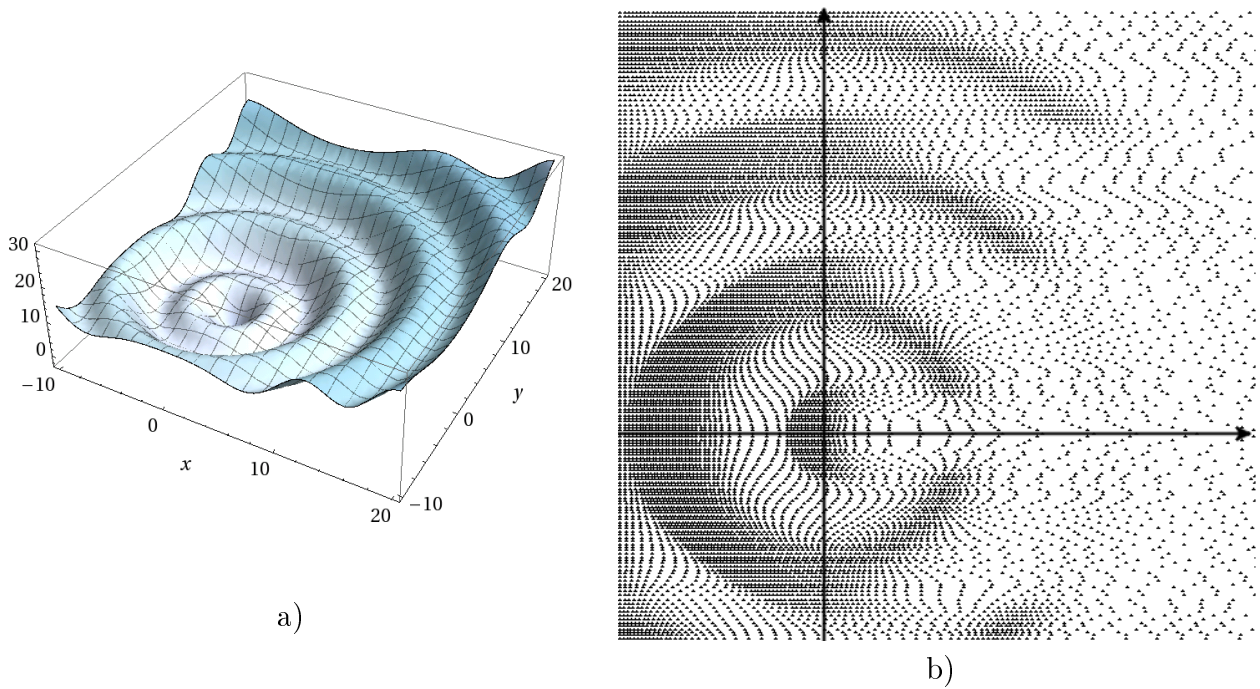


Рис. 4: Иллюстрация метода перебора на неравномерной сетке для нахождения минимума функции двух переменных $f(x, y)$.

Точками отмечаются пары (x, y) , для которых вычислялось значение функции $f(x, y)$. Перебор начинался из левого нижнего угла, то есть из точки $(-10, -10)$. Внешний цикл увеличивает текущее значение x , внутренний - y . Как и следовало ожидать, шаг алгоритма уменьшается вблизи минимумов и увеличивается с удалением от глобального минимума, тем самым ускоряя работу алгоритма. Всего было произведено 13000 итераций, что в 3 раза меньше, чем количество итераций при переборе на равномерной сетке с той же погрешностью и константой Липшица.

В седьмом параграфе, на примере из случайных точек – пределов текучести, проводится анализ и сравнение рассматриваемых методов нахождения значений коэффициентов.

Как и следовало ожидать, метод ручного подбора коэффициентов с использованием визуальной оценки расстояния от экспериментальных данных до контура не дает точные результаты, а лишь приближенное решение без какой-либо гарантии, что необходимая точность будет достигнута. Этот метод применим в качестве инструмента, позволяющего быстро оценить возможные значения коэффициентов, порядок значения целевой функции, определить, какие экспериментальные данные обладают слишком большой погрешностью. Также данный метод позволяет найти начальные приближения для градиентного и координатного спусков и сделать визуальную оценку найденных ими локальных минимумов на предмет соответствия физическому смыслу. Кроме того, визуальные инструменты незаменимы для определения минимальных и максимальных значений коэффициентов контуров, которые используются в качестве входных параметров в алгоритм перебора на неравномерной сетке.

Алгоритм координатного спуска вместе с градиентным спуском, в отличие от метода ручного подбора, ищет минимум с заданной точностью. На практике оказывается, что если использовать в качестве начального приближения контур, найденный методом ручного подбора, то координатный и градиентный спуски приводят к искомому глобальному минимуму функции, однако, теоретически есть вероятность, что градиентный или координатный спуски не сойдутся даже в локальном минимуме. Алгоритм градиентного спуска

может остановиться в особой точке целевой функции, где градиент $\Delta E(x) = 0$, но условие $\Delta E(x) = 0$ не является достаточным для того, чтобы говорить о локальном минимуме в точке x . В этом случае лучше справляется алгоритм координатного спуска, поскольку он не зависит от частных производных целевой функции и не прекращает сходиться, когда длина градиента обращается в ноль.

Отрицательной стороной координатного спуска является то, что движение в пространстве коэффициентов контура происходит поочередно вдоль осей. В этом случае, если «овраг» целевой функции вытянут вдоль прямой, не параллельной одной из осей, то спуск может происходить бесконечно долго по времени, или остановиться, не достигнув локального минимума, который находится на дне «оврага». В этом случае предпочтительнее использовать градиентный спуск, поскольку его траектория спуска по поверхности $E(x)$ может быть под углом к координатным осям.

Таким образом, несмотря на то, что градиентный и координатный спуски часто приводят к одним и тем же результатам, применительно к данной задаче они не являются взаимозаменяемыми алгоритмами поиска локальных минимумов.

Последовательное применение ручного подбора, координатного спуска и градиентного спуска на практике приводит к минимуму целевой функции и искомому контуру, но нет гарантии, что найденный минимум будет глобальным. Метод перебора на неравномерной сетке гарантированно находит глобальный минимум с заданной точностью в указанных интервалах коэффициентов, поэтому он способен подтвердить ранее полученный результат или опровергнуть, найдя при этом истинное решение.

В работе не рассматривается время нахождения искомого контура строго в качестве показателя эффективности алгоритмов, однако принимается во внимание то, что построение контура текучести по экспериментальным данным теряет актуальность, если выполняется в неразумные сроки. Слишком большие интервалы, ограничивающие коэффициенты контура и отсутствие начального приближения могут привести к тому, что алгоритму перебора на неравномерной сетке потребуется на несколько порядков больше времени для нахождения глобального минимума, поэтому перед его применением следует с помощью ручного подбора оценить возможные значения, которые могут принимать коэффициенты контура, а в качестве начального приближения взять результат последовательного применения координатного и градиентного спусков.

Таким образом, учитывая особенности рассматриваемых методов построения контура текучести по экспериментальным данным строится следующая последовательность действий, в результате которой будет найден глобальный минимум целевой функции $E(x)$, соответствующий искомому контуру:

1. Нахождение заведомо верных интервалов для коэффициентов контуров $x_i \in [a_i, b_i]$.
2. Метод ручного подбора коэффициентов.
3. Метод координатного спуска.
4. Метод градиентного спуска.
5. Метод перебора на неравномерной сетке в интервалах $x_i \in [a_i, b_i]$.

Коэффициенты контура, найденные методом ручного подбора передаются в качестве начального приближения в алгоритм координатного спуска, который уточняет найденное решение. Полученные коэффициенты передаются далее, в алгоритм градиентного спуска, результат которого передается в алгоритм перебора на неравномерной сетке. На каждом шаге происходит уточнение коэффициентов, а последний пункт гарантирует глобальность найденного решения.

Третья глава посвящена алгоритмам, реализующим методы построения контуров текучести по экспериментальным данным.

Уравнения большинства контуров текучести даны в виде неявных зависимостей

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \quad (17)$$

поэтому, для построения их графиков, в первом параграфе предлагается преобразовать выражения в полярные координаты к явной зависимости $r(\alpha)$ и строить график циклом по α от 0 до 2π с некоторым шагом $d\alpha$, значение которого выбирается в зависимости от требуемой точности построения графика. Приводятся выражения $r(\alpha)$ для каждой из рассматриваемых моделей контуров. В качестве примера, на рисунке 5 изображены графики контура Хилла с различными значениями шага $d\alpha$. На практике оказывается, что $d\alpha = 0.1$ достаточно для того, чтобы график был гладким, без явных углов, что позволяет визуально оценивать расстояние от точек до контура.

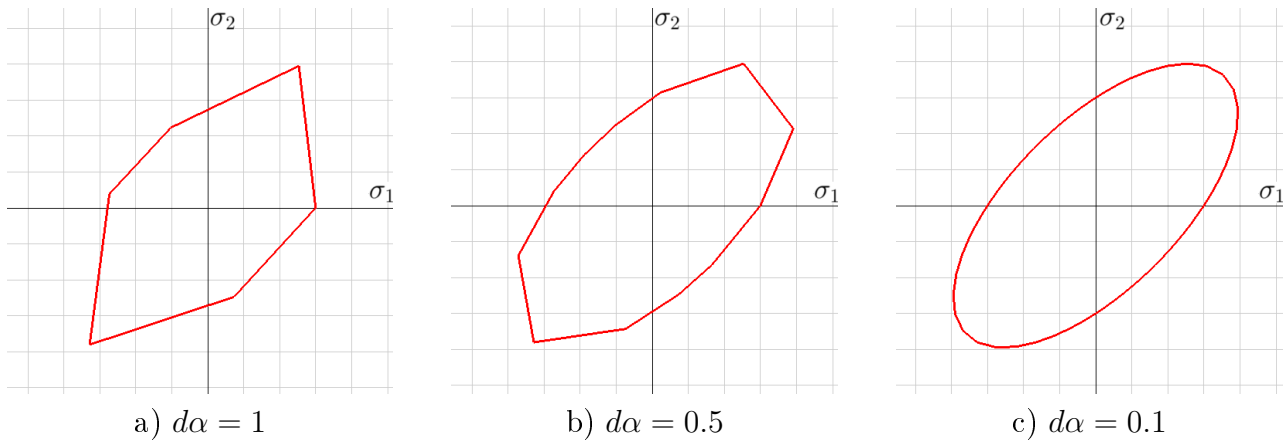


Рис. 5: График контура Хилла при различных значениях шага $d\alpha$

Во втором параграфе приводится метод вычисления значения целевой функции в зависимости от коэффициентов контуров и экспериментальных данных. Метод основан на приближенном вычислении расстояния от точки до контура и иллюстрируется рисунком 6, на котором для наглядности увеличено значение шага $d\alpha$. Частные производные целевой функции $\frac{\partial E(x_i)}{\partial x_i}$, используемые в методе градиентного спуска, так же определяются численно с использованием известного двухточечного метода, описываемого формулой:

$$\frac{\partial E(x_i)}{\partial x_i} \approx \frac{E(x_i + \Delta x_i) - E(x_i - \Delta x_i)}{2\Delta x_i}. \quad (18)$$

Таким образом, значение целевой функции $E(x)$ вычисляется, как сумма квадратов приближенных расстояний, а частные производные E вычисляются двухточечным методом.

В параграфах 3,4,5,6 рассказывается о том, как программно реализованы 4 метода минимизации целевой функции: метод ручного подбора, метод координатного спуска, метод градиентного спуска и метод перебора на неравномерной сетке. Приводятся снимки соответствующих программных визуальных инструментов. Особенностью перебора на неравномерной сетке в данном случае является то, что его выполнение может затянуться на длительное время. Для того, чтобы сократить время перебора было решено использовать параллельные вычисления на многоядерных системах. Для этого область допустимых значений коэффициентов делится на несколько равных частей и поиск минимума осуществляется параллельно и независимо на каждой области.

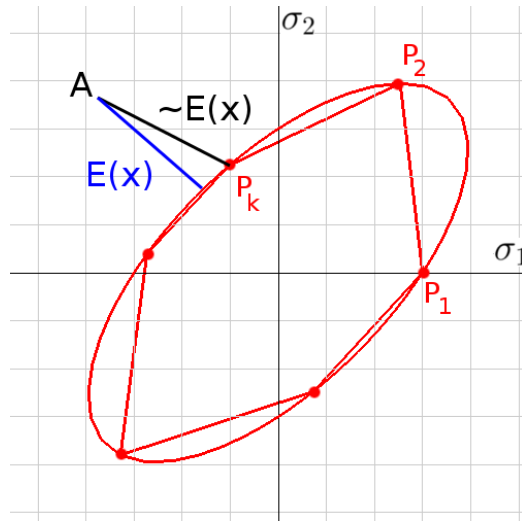


Рис. 6: Приближенное вычисление расстояния от точки A до контура

Четвертая глава посвящена построению контуров текучести по экспериментальным данным предложенным способом, заключающимся в последовательном применении трех методов минимизации целевой функции.

В первом параграфе проверяется достоверность способа построения путем сравнения с результатами уже существующего способа построения контура Губера-Мизеса.

Выбираются несколько случайных точек имитирующих экспериментальные данные. По ним находится предел текучести при одноосном растяжении, как среднее арифметическое пределов, вычисленных по формуле

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}, \quad (19)$$

для всех точек. По найденному пределу текучести строится контур Губера-Мизеса.

Далее, по тем же самым точкам, с помощью предлагаемого в работе способа строится контур Губера-Мизеса.

Как и следовало ожидать, применение рассматриваемых методов для нахождения коэффициента (предела текучести при одноосном растяжении) контура текучести Губера-Мизеса приводит к тому же контуру, что и ранее известный метод с относительной разницей 0.01% между значениями целевой функции.

Во втором параграфе строятся контуры текучести Мизеса, Хилла, Трещева и Рыбакиной для аустенитной нержавеющей стали по экспериментальным данным, полученным в ходе сотрудничества с Фрайбургским институтом конструкционных материалов, Миттвайдским институтом строительной механики (ФРГ). Были достигнуты следующие значения целевой функции E : контур Губера-Мизеса сообщает значение целевой функции $E = 21001 \text{ МПа}^2$, контур Трещева – $E = 19999 \text{ МПа}^2$, контур Хилла – $E = 18642 \text{ МПа}^2$, контур Рыбакиной – $E = 14029 \text{ МПа}^2$.

Как и следовало ожидать, контур Рыбакиной обеспечивает наименьшее значение целевой функции, поскольку содержит 5 независимых коэффициентов и позволяет учитывать внутренние напряжения материала и разнопрочность. Однако, статистический анализ отклонения контуров от экспериментальных данных выявил, что для аустенитной нержавеющей стали контур Мизеса обеспечивает минимальную погрешность при прогнозировании текучести материала. Это означает, что данный материал не имеет выраженной анизотропии. Данный факт подтверждают и авторы экспериментальных исследований научно-

исследовательских институтов Фрайбурга и Миттвайда Д. Кулавинский, К. Нагель, С. Хенкель, Р. Хюбнер, Х. Фишер, М. Кюне, Г. Бирман.

В третьем параграфе по экспериментальным данным, приведенным в диссертации Пачулий В.Ш. в безразмерных единицах, построены контуры текучести для сплавов Циркалой-1 и Циркалой-2.

Учет ортотропии, разнопрочности и начальных напряжений в данном случае позволил существенно уменьшить значение целевой функции и для сплава Циркалой-1 и для сплава Циркалой-2. В обоих случаях статистический анализ отклонений контуров от экспериментальных исследований выявил, что контур Рыбакиной обеспечивает минимальную погрешность при прогнозировании текучести материала и что данные материалы проявляют выраженную анизотропию.

В четвертом параграфе приводятся условия на контуры, достаточные для того, чтобы к ним можно было применять предложенный способ нахождения коэффициентов по экспериментальным данным. В качестве примеров таких контуров приводятся два обобщения контуров Рыбакиной (рисунок 7) и Хилла (рисунок 8).

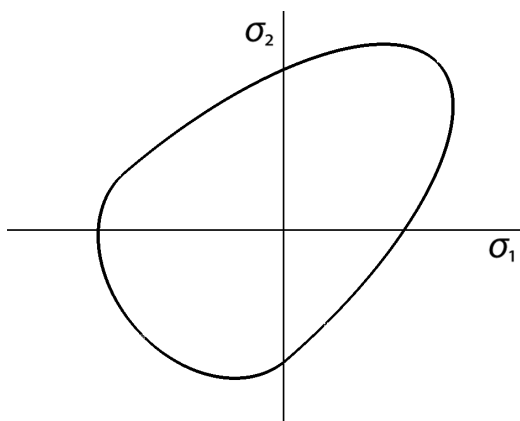


Рис. 7: Обобщение контура Рыбакиной

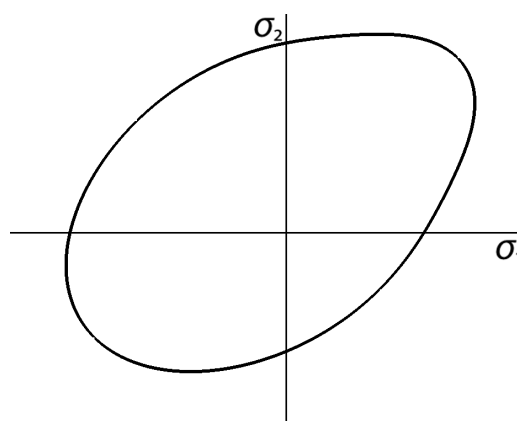


Рис. 8: Обобщение контура Трещева

Представленные в работе методы построения контуров легко применяются к данным обобщениям, поскольку они удовлетворяют всем достаточным условиям. Как и следовало ожидать, добавление дополнительных параметров приводит к уменьшению минимального значения целевой функции. В случае на рисунке 7, для аустенитной нержавеющей стали, минимум целевой функции упал со значения 14029 МПа^2 до 10403 МПа^2 , а в случае на рисунке 8 — со значения 19999 МПа^2 до 16173 МПа^2 .

В заключении даны основные выводы по диссертации и сформулированы результаты работы.

Предложен способ определения неизвестных параметров пластически анизотропных разнопрочных пластин по ограниченному числу экспериментальных данных на основе классических и новых математических моделей критериев пластичности.

Разработана программа для ЭВМ, написанная на языке Delphi, реализующая построение классических и новых контуров текучести для различных материалов и обеспечивающая минимизацию целевой функции оптимизации параметров.

Проведено исследование многомерной целевой функции и произведена оценка сверху константы Липшица, обеспечивающая нахождение глобального минимума.

Построены известные ранее и новые контуры текучести для конструкционных сплавов Циркалой-1, Циркалой-2 и аустенитной нержавеющей стали. Проведена статистическая оценка точности построения всех контуров по экспериментальным данным, что позволило выявить наиболее подходящие модели контуров текучести для каждого из рассмотренных материалов (рисунок 9).

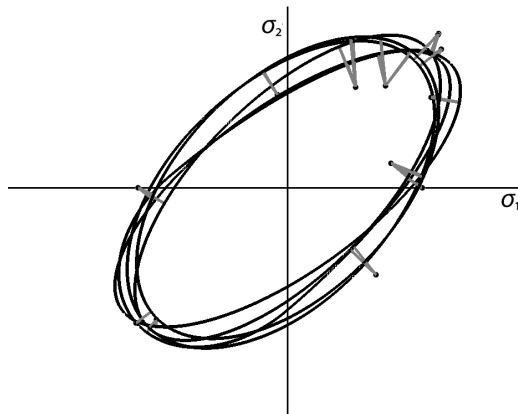


Рис. 9: Различные контуры текучести для аустенитной стали

С помощью представленной программы обеспечена возможность оценки достоверности и достаточности экспериментальных данных для прогнозирования анизотропии и разнородности современных конструкционных материалов.

Публикации автора по теме диссертации

Статья в журнале, рекомендованном ВАК:

1. Ефимов И.В. Математическая модель контура текучести анизотропных материалов. // «Вестник СПбГУ (Серия 1): математика, механика, астрономия», СПбГУ, 2011, №1, с. 59-65.

Другие публикации:

2. Ефимов И.В., Павилайнен Г.В. Выбор критерия текучести текстурированных сплавов. // Тезисы докладов международной научной конференции «IV Поляховские чтения», СПбГУ, 2006, с. 194, 195.

3. Ефимов И.В., Павилайнен Г.В. Визуализация и выбор оптимального критерия текучести текстурированных сплавов. // Международная конференция «V Окуневские чтения», тезисы докладов, СПбГУ, 2006, с. 156, 157.

4. Ефимов И.В., Павилайнен Г.В. Статистический анализ и математическое моделирование при обработке экспериментов. // Моделирование и анализ массовых событий в экономике и социуме, 2010, с. 76-80.