САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ДЕНИСОВА Ирина Владимировна

Движение двух вязких несмешивающихся жидкостей

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор *Солонников Всеволод Алексеевич* (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук).
Официальные оппоненты:	член-корреспондент РАН, профессор *Пухначёв Владислав Васильевич* (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН); доктор физико-математических наук, профессор *Пламеневский Борис Алексеевич* (Санкт-Петербургский государственный университет); доктор физико-математических наук, профессор *Мейрманов Анварбек Мукатович* (Белгородский государственный национальный исследовательский университет).
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Защита состоится «___» __________ 2012 г. в ___ час. ___ мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» __________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д. ф.-м.н., профессор Архипова А. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача об эволюции двух вязких несмешивающихся жидкостей с неизвестной поверхностью раздела принадлежит к интенсивно изучаемому в настоящее время классу задач со свободными границами, поскольку в ней наряду с векторным полем скоростей и другими характеристиками обоих жидкостей подлежит определению поверхность их раздела. Теория этих задач для уравнений Навье–Стокса насчитывает в своем развитии лишь около трёх–четырёх десятилетий, хотя их постановка восходит к классическим работам 19-ого века. Большинство авторов, работающих в этом направлении, рассматривает стационарные задачи, исследование которых опирается на теорию эллиптических краевых задач. Это относится и к задаче о движении конечного объема одной жидкости в другой.

Нестационарные задачи о движении жидкостей со свободными границами, более трудные для исследования, изучены в меньшей степени. Проблемой эволюции капли в вакууме много занимался В. А. Солонников. Он доказал локальную разрешимость этой задачи при произвольных гладких данных (вместе с И. Ш. Могилевским[1][2]) и глобальную разрешимость для малых начальных данных в соболевских и гёльдеровских классах функций. Задачу о движении конечной массы сжимаемой жидкости В. А. Солонников рассматривал вместе с А. Тани[3]. Они получили существование единственного решения этой проблемы в соболевских пространствах на малом промежутке времени.

Что касается двухфазной задачи, то для случая несжимаемых жидкостей модельные нестационарные задачи с заданными неподвиж-

[1]Могилевский И. Ш., Солонников В. А., Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гёльдеровских классах функций, *Z. Anal. Anwendungen* **8** (1989), № 4, 329–347.

[2]Mogilevskii I. Sh., Solonnikov V. A., On the Solvability of an Evolution Free Boundary Problem for the Navier-Stokes Equations in Hölder Spaces of Functions, *Math. Prob. Relating to Navier-Stokes Equations*, Ser. Adv. in Math. Appl. Sci., World Sci. Publ., **11** (1992) 105–181.

[3]Solonnikov V. A., Tani A., Free boundary задача for a viscous compressible flow with surface tension, in: *C. Carathéodory: An Internat. Tribute*, World Sci. (1991), 1270–1303.

ными границами раздела изучали В. Я. Ривкинд и Н. Б. Фридман (1973). В частности, ими было доказано существование обобщенного решения нелинейной нестационарной задачи с заданной неподвижной границей раздела двух жидкостей. В полной постановке эта задача впервые была рассмотрена в конце 80-х годов в ранних работах автора, например[4]. В них была установлена локальная однозначная разрешимость задачи в пространствах Соболева – Слободецкого как с учетом поверхностного натяжения, так и без него. Там использовалась техника вышеупомянутых работ для одной жидкости. Чуть позже, также на основе работ В. А. Солонникова, Н. Танака[5] исследовал глобальную разрешимость задачи для малых данных вблизи положения равновесия в тех же пространствах. В гёльдеровских классах эта задача впервые рассматривается в данной диссертации.

Проблему о движении двух сжимаемых жидкостей в упрощённом случае изучал А. Тани в 80-х годах прошлого века. В общей постановке задача с неизвестной границей двух сред впервые исследуется в данной работе как для случая сжимаемых, так и для случая разнородных жидкостей.

Цель работы состоит в представлении общей картины гладкости решений задач для уравнений Навье–Стокса со свободной поверхностью и с неизвестной границей раздела двух сред. Для этого было проведено исследование разрешимости в пространствах Соболева – Слободецкого и Гёльдера различных задач, описывающих одновременное движение двух разных несмешивающихся жидкостей, и сравнение полученных результатов для жидкостей разных типов.

Методика исследования. В работе использованы идеи, берущие начало в работах О. А. Ладыженской по динамике вязкой жидкости, а также методы, разработанные В. А. Солонниковым для изучения движения конечного жидкого объёма в пустоте. Это переход к лагранжевым координатам, исследования линеаризованной задачи,

[4]Денисова И. В., Движение капли в потоке жидкости, *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, СО АН СССР, 1989, **93/94**, 32–37.

[5]Tanaka N., Global existence of two phase nonhomogeneous viscous incompressible fluid flow, *Commun. Partial Diff. Equat.*, **18** (1, 2) (1993), 41-81.

построение оператора–регуляризатора для доказательства разрешимости линейной задачи, нахождение и оценка явного решения модельной задачи с плоской границей раздела после преобразования Фурье–Лапласа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

Для двух несжимаемых жидкостей:

1) Существование глобального решения задачи в полной постановке при малых начальных данных как в случае отсутствия капиллярных сил, так и при их наличии.

2) Существование локального по времени единственного решения задачи в гёльдеровских пространствах со степенным весом на бесконечности, при этом интервал времени, на котором существует решение, зависит от данных задачи.

3) Однозначная разрешимость для линейной задачи с замкнутой границей раздела жидкостей на любом конечном интервале времени в обычных гёльдеровских классах функций.

4) Точные гёльдеровские оценки явного решения на бесконечном промежутке времени для линейной задачи с плоской границей раздела без учёта сил поверхностного натяжения.

5) Локальная однозначная разрешимость задачи термо-капиллярной конвекции для капли в ограниченной и неограниченной жидкой среде.

6) Существование единственного решения двухфазной задачи в ограниченной области в приближении Обербека–Буссинеска на малом интервале времени.

Для одной сжимаемой жидкости:

7) Существование локального по времени единственного решения задачи об эволюции жидкости, ограниченной замкнутой свободной поверхностью, в гёльдеровских классах функций.

8) Существование единственного решения линеаризованной задачи на любом конечном промежутке времени.

Для двух сжимаемых жидкостей:

9) Локальная однозначная разрешимость задачи о движении пу-

зырька в газообразной среде в пространствах Соболева – Слободецкого и в пространствах Гёльдера со степенным весом на бесконечности.

10) Построение и оценка явного решения модельной задачи с плоской границей раздела в соболевских и гёльдеровских пространствах функций на бесконечном промежутке времени.

11) Локальная однозначная разрешимость задачи, моделирующей термо-капиллярную конвекцию для пузырька в сжимаемой среде.

Для двух разнородных жидкостей:

12) Однозначная разрешимость задачи об эволюции капли в газообразной среде, или пузырька в жидкости, на малом промежутке времени в пространствах Соболева – Слободецкого.

13) Существование решения для линеаризованной задачи на любом конечном промежутке времени.

14) Построение и оценка в соболевских пространствах явного решения модельной задачи с плоской границей раздела жидкости и газа на бесконечном промежутке времени.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её методы и результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения дифференциальных свойств решений задач о движении двух жидкостей, для исследования, например, устойчивости движения капли или пузырька в жидкой среде, а также для обоснования численных методов расчёта течений, встречающихся в аэродинамической, космической и других областях техники.

Апробация диссертации. Полученные результаты докладывались на Городском семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, на семинарах в Институте проблем машиноведения РАН, на многочисленных международных и всероссийских конференциях: 8-ой, 9-ой и 10-ой Международных конференциях «Задачи со свободными границами: теория и приложения» (Чиба, Япония, 1999, Тренто, Италия, 2002 и Коимбра, Португалия, 2005), 3-ем Европейском математическом конгрессе (Барселона, 2000), конференции «Уравнения Навье–Стокса и смежные вопросы» (СПб, 2002); конференции «Нелинейные уравнения в частных производных и их приложения» (Хуангшан, Китай, 2001); "Trends in PDE of Mathematical Physics" (Обидош, Португалия, 2003); "Directions on PDE" (Феррара, Италия, 2003); 17-ой Крымской осенней школе–симпозиуме (Батилиман, Украина, 2006); «Геометрические аспекты задач со свободными границами», (СПб, 2006); «Параболические уравнения и уравнения Навье–Стокса» (Бедлево, Польша, 2006, 2008 и 2010); "Fluid-interaction problems and related topics" (Прага, Чехия, 2007); конференции им. И. Г. Петровского «Диф. уравнения и смежные вопросы» (Москва, 2007); 3-ей Международной конференции, "Two-Phase System for Ground and Space Applications", (Брюссель, Бельгия, 2008); Российско–французском совещании по вопросам математической гидродинамики (Байкал, Россия, 2011) и др..

Работа была поддержана грантами РФФИ № 01-01-00330а, № 03-01-00638а, № 05-01-00941а, №08-01-00372а, Фондом Дж. Сороса и Фондом гражданских исследований и развития США (CRDF), № RU-M1-2596-ST-04, DFG–Немецким фондом научных исследований, Комитетом Европейского математического общества «Задачи со свободными границами», а также грантом научной школы НШ-4210.2010.1.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 17 работах автора (5 из них в соавторстве). В совместной статье [3] с Солонниковым В. А. схема доказательства принадлежит соавтору, который изучал разрешимость задачи о движении одной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Соискатель перенесла эту технику на всё пространство, заполненное двумя жидкостями, разделёнными неизвестной границей, при этом ей пришлось подбирать функциональные пространства с соответствующим степенным весом на бесконечности. В работе [7], совместной с Солонниковым В. А., построение решения принадлежит соавтору. Оценки гёльдеровских норм полученного решения принадлежат соискателю. В [8] используется схема доказательства, аналогичная той, что предложил В. А. Солонников для изучения задачи о движении изолированной массы несжимаемой жидкости. Денисова И. В. адаптировала эту схему на случай сжимаемой жидкости, причём она получила дополнительную гладкость решения по времени. В статье [14], совместной с Ш. Нечасовой, соавтору принадлежит участие в постановке задачи и оценке давления в параграфе 3, все остальные результаты принадлежат соискателю. В работе [15] (совм. с Солонниковым В. А.) Соавтору принадлежит идея построения функционала обобщённой энергии для получения экспоненциальной оценки решения через начальные данные. Соискатель построила конкретный функционал и получила его оценки. На этой основе ею доказано существование глобального решения задачи в гёльдеровских пространствах с предельной гладкостью по времени.

Список публикаций автора приведён в конце основного текста.

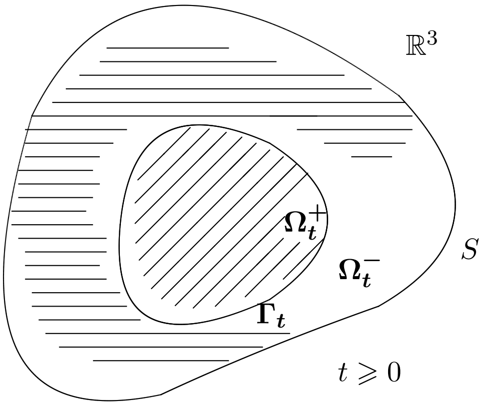
Объём и структура диссертации: Диссертация объёмом 333 страницы машинописного текста состоит из введения и трёх частей, которые разбиты на 16 параграфов. Библиография содержит 89 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении приведён обзор литературы, связанной с диссертацией по предмету или методу исследования, и сформулированы основные результаты.

В **части I** изучается задача о движении двух несжимаемых жидкостей, где получено существование локального по времени единственного решения этой задачи в гёльдеровских пространствах со степенным весом на бесконечности [3, 16]. При условии малости начальных данных мы доказываем существование глобального решения в случае, когда жидкости заключены в контейнер [11, 12, 15]. Кроме того, в конце этой части рассматриваются задачи с учётом температурных зависимостей [10, 14].

Сформулируем задачу для двухфазной жидкости в полной её математической постановке.



Пусть в начальный момент времени $t = 0$ жидкость с вязкостью $\nu^+ > 0$ и плотностью $\rho^+ > 0$ занимает ограниченную область $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$, а жидкость с вязкостью $\nu^- > 0$ и плотностью $\rho^- > 0$ находится в области Ω_0^-, окружающей Ω_0^+. Обозначим $\partial\Omega_0^+$ через Γ_0. Граница $S \equiv \partial(\Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-)$ – заданная замкнутая поверхность, где выполняются условия прилипания, $S \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Она может отсутствовать. Тогда на ∞ ставятся условия убывания.

Пусть S отсутствует. При $t > 0$ необходимо найти границу раздела Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, а также поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, функцию p, отклонение от гидростатического давления P_0, для обеих жидкостей, которые удовлетворяют следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \nu^\pm\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } \Omega_t^\pm,\ t > 0,\\
&\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \boldsymbol{v} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0,\ p \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0, \qquad (1.1)\\
&[\boldsymbol{v}]|_{\Gamma_t} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^+}} \boldsymbol{v}(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^-}} \boldsymbol{v}(x) = 0, \quad [\mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

(Если S присутствует, то $\boldsymbol{v}|_S = 0$.) Здесь $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\nu^\pm, \rho^\pm$ – ступенчатые функции вязкости и плотности, соответственно, $\boldsymbol{f}$ – заданное поле массовых сил, $\boldsymbol{v}_0$ – начальное распределение скоростей, тензор напряжений задаётся формулой $\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p) = -p\mathbb{I} + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$, $\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$ – это удвоенный тензор скоростей деформации с элементами $(\mathbb{S}(\boldsymbol{v}))_{ik} = \partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i,\ i,k = 1,2,3$; $\mathbb{I}$ – это единичная матрица; $\mu^{\pm} = \nu^{\pm}\rho^{\pm},\ \sigma \geqslant 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к Ω_t^+, H – удвоенная средняя кривизна Γ_t ($H < 0$ в точках выпуклости Γ_t в сторону Ω_t^-). Мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^3$ введена декартовая система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Кроме того, относительно поверхности раздела Γ_t предполагается, что на ней находятся все время одни и те же частицы жидкости. С помощью этого предположения исключается возможность переноса массы через поверхность Γ_t. Аналитически это записывается так: Γ_t состоит из таких точек $x(\xi,t)$, соответствующий радиус-вектор которых $\boldsymbol{x}(\xi,t)$ является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(x(t),t), \quad \boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}, \quad \xi \in \Gamma_0, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где $\Gamma_0 = \partial\Omega_0^+$ — заданная в начальный момент поверхность. Значит, $\Gamma_t = \{x(\xi,t)|\ \xi \in \Gamma_0\},\ \Omega_t^{\pm} = \{x(\xi,t)|\ \xi \in \Omega_0^{\pm}\}$.

Перейдём от эйлеровых координат к лагранжевым по формуле

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \boldsymbol{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv X_{\boldsymbol{u}}(\xi,t) \tag{1.3}$$

(здесь $\boldsymbol{u}(\xi,t)$ – поле скоростей в лагранжевых координатах) и воспользуемся хорошо известным соотношением

$$H\boldsymbol{n} = \Delta(t)\boldsymbol{x}, \tag{1.4}$$

где $\Delta(t)$ обозначает оператор Бельтрами-Лапласа на Γ_t. В результате мы придём к задаче для $\boldsymbol{u}$, $q = p(X_{\boldsymbol{u}},t)$ с заданной поверхностью $\Gamma \equiv \Gamma_0$. Если угол между $\boldsymbol{n}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}_0$ к Γ острый, то полученная система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} - \nu^{\pm}\nabla_{\boldsymbol{u}}^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\boldsymbol{u}}q = \boldsymbol{f}(X_{\boldsymbol{u}},t),\\
&\nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times (0,T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \ \text{в} \ \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \boldsymbol{u} \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0, \quad q \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0, \\
&[\boldsymbol{u}]|_{G_T} = 0, \ \ [\mu^\pm \Pi_0 \Pi \mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}]|_{G_T} = 0 \quad (G_T \equiv \Gamma \times (0,T)), \\
&[\boldsymbol{n}_0 \cdot \mathbb{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, q)\boldsymbol{u}]|_{G_T} - \sigma \boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta(t) X_{\boldsymbol{u}}|_{G_T} = 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $\nabla_{\boldsymbol{u}} = \mathbb{A}\nabla$, $\mathbb{A}$ – матрица алгебраических дополнений A_{ij} к элементам $a_{ij}(\xi,t) = \delta_i^j + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \mathrm{d}t'$ якобиевой матрицы преобразования (1.3), вектор $\boldsymbol{n}$ связан с $\boldsymbol{n}_0$ соотношением $\boldsymbol{n} = \mathbb{A}\boldsymbol{n}_0/|\mathbb{A}\boldsymbol{n}_0|$; $\Pi\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega})$, $\Pi_0\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\omega})$ – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на касательные плоскости к Γ_t и к Γ, соответственно; $\mathbb{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}, q) = -q\mathbb{I} + \mu^\pm \mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$, $(\mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}))_{ij} = A_{jk}\frac{\partial w_i}{\partial \xi_k} + A_{ik}\frac{\partial w_j}{\partial \xi_k}$, $i,j = 1,2,3$. Мы подразумеваем суммирование от 1 до 3 по повторяющимся индексам.

Сформулируем теорему о локальной однозначной разрешимости задачи (1.5), полагая $D_T = Q_T^- \cup Q_T^+$, $\mathbb{R}_T^3 = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$.

Теорема 1.1. *Предположим, что для некоторых* $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\gamma \leqslant \alpha$ *и* $T < \infty$ $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\boldsymbol{f}, \mathcal{D}_x \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_2^{\alpha, \frac{1+\alpha-\gamma}{2}}(\mathbb{R}_T^3)$, $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha}(\Omega^- \cup \Omega^+)$, *функция* $\sigma \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ *для* $x \in \Gamma$. *Пусть, кроме того, выполнены условия согласования*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0, \tag{1.6}$$

$$[\boldsymbol{v}_0]|_\Gamma = 0, \quad [\mu^\pm \Pi_0 \mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0]|_\Gamma = 0, \quad \Big[\Pi_0\big(\nu^\pm \nabla^2 \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{\rho^\pm}\nabla q_0\big)\Big]\Big|_\Gamma = 0,$$

где функция $q_0(\xi) \equiv q(\xi, 0)$ *является решением задачи дифракции*

$$\frac{1}{\rho^\pm}\nabla^2 q_0(\xi) = \nabla \cdot (\boldsymbol{f}(\xi,0) + \mathcal{D}_t \mathbb{B}^*(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{v}_0(\xi)), \quad \xi \in \Omega^- \cup \Omega^+, \tag{1.7}$$

$$[q_0]|_\Gamma = \Big[2\mu^\pm \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{n}_0} \cdot \boldsymbol{n}_0\Big]\Big|_\Gamma - \sigma H_0, \quad \Big[\frac{1}{\rho^\pm}\partial q_0/\partial \boldsymbol{n}_0\Big]\Big|_\Gamma = [\nu^\pm \boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0]|_\Gamma.$$

(*Здесь* $\mathbb{B}^*$ *– матрица, транспонированная к* $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ *– единичная матрица, а* $H_0(\xi) = \boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta(0)\boldsymbol{\xi}$ *– удвоенная средняя кривизна поверхности* Γ.)

При этих условиях задача (1.5) *однозначно разрешима на некотором конечном интервале времени* $(0, T_0)$, $T_0 \leqslant T$, *величина которого зависит от норм* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{v}_0$ *и от кривизны поверхности* Γ. *Решение* $(\boldsymbol{u}, q)$ *таково, что* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, $q \in C_{1,\gamma}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T)$, $\nabla q \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$.

Здесь мы использовали обозначение $C_{1+\gamma}^{\beta,\beta/2}(D_T)$ для анизотропного гёльдеровского пространства с гладкостью функций порядка β по x и $\beta/2$ по t со степенным весом $|x|^{1+\gamma}$ на бесконечности (более подробное определение этих пространств см. в [3]). В заключении теоремы утверждается, что вектор скорости со своими вторыми производными и градиент давления убывают на бесконечности по пространственным переменным, как $|x|^{-(1+\gamma)}$, а сама функция давления — только, как $|x|^{-1}$.

Исследование задачи (1.5) основано на изучении её линеаризации:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \boldsymbol{w} - \nu^{\pm} \nabla_{\boldsymbol{u}}^2 \boldsymbol{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}} \nabla_{\boldsymbol{u}} s = \boldsymbol{f}, \qquad \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{w} = r \quad \text{в} \quad D_T, \\
\boldsymbol{w}|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0, \quad \boldsymbol{w} \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0, \quad s \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0, \qquad (1.8) \\
[\boldsymbol{w}]|_{G_T} = 0, \quad [\mu^{\pm} \Pi_0 \Pi \mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \boldsymbol{n}]|_{G_T} = \Pi_0 \boldsymbol{a}, \\
[\boldsymbol{n}_0 \cdot \mathbb{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}, s) \boldsymbol{n}]|_{G_T} - \sigma \boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta(t) \int_0^t \boldsymbol{w}\, dt'|_{G_T} = b + \int_0^t B\, dt'.
\end{gathered}
$$

Теорема 1.2. *Допустим, что для некоторых* $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\gamma \leqslant \alpha$, $0 < T < \infty$, *поверхность* $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, *функция* $\sigma \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, *а вектор* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, $[\boldsymbol{u}]|_{G_T} = 0$, *подчиняется неравенству*

$$
(T + T^{\gamma/2}) |\boldsymbol{u}|_{1+\gamma, D_T}^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)} \leqslant \delta
$$

с достаточно малым $\delta > 0$.

Предположим, кроме того, что выполнены четыре группы условий:

1) $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$, $r \in C_{1+\gamma}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(D_T)$, $\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha}(\cup\Omega^{\pm})$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T)$, $b \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(G_T)$, $B \in C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$;

2)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_0(\xi) = r(\xi,0) = 0, \quad [\boldsymbol{w}_0]|_\Gamma = 0,$$
$$[\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0(\xi))\boldsymbol{n}_0]|_{\xi\in\Gamma} = \Pi_0\boldsymbol{a}(\xi,0), \quad \xi \in \Gamma,$$
$$\Big[\Pi_0\Big(\boldsymbol{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla s(\xi,0) + \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{w}_0(\xi)\Big)\Big]\Big|_{\xi\in\Gamma} = 0;$$

3) *существуют вектор* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$ *и тензор* $\mathbb{G} = \{G_{ik}\}_{i,k=1}^3$, $G_{ik} \in C_{1,\gamma}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T) \cap C_{1,\gamma}^{\gamma,0}(D_T)$ *такие, что имеют место представления*

$$\mathcal{D}_t r - \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{g} = \nabla \cdot \mathbb{G} \quad (g_i = \partial G_{ik}/\partial\xi_k, \quad i = 1,2,3),$$

(*эти равенства понимаются в обобщённом смысле*) *и, помимо того,*

$$[(\boldsymbol{g} + \mathbb{A}^*\boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n}_0]|_{G_T} = 0;$$

4) $s_0(\xi) = s(\xi,0)$ *является решением задачи*

$$\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla^2 s_0(\xi) = \nabla \cdot \big(\mathcal{D}_t\mathbb{B}^*|_{t=0}\boldsymbol{w}_0(\xi) - \boldsymbol{g}(\xi,0)\big) \ \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+,$$
$$[s_0]\big|_\Gamma = \Big[2\mu^{\pm}\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{n}_0} \cdot \boldsymbol{n}_0\Big]\Big|_\Gamma - b|_{t=0},$$
$$\Big[\frac{1}{\rho^{\pm}}\frac{\partial s_0}{\partial \boldsymbol{n}_0}\Big]\Big|_\Gamma = \big[\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{f}|_{t=0} + \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{w}_0)\big]\big|_\Gamma.$$

При этих предположениях задача (1.8) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w}, s)$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(D_T)$, $s \in C_{1,\gamma}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_T)$, $\nabla s \in \boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_T)$. *Для него верно неравенство*

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{w}|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} + |\nabla s|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(\alpha,\alpha/2)} + |s|_{t,1,D_{t'}}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})} + \langle s\rangle_{1+\gamma,D_{t'}}^{(\gamma,1+\alpha)} \\
&\quad \leqslant c_1(t')\big\{|\boldsymbol{f}|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |r|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |\boldsymbol{w}_0|_{1+\gamma,\Omega^{\pm}}^{(2+\alpha)} + |\boldsymbol{g}|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \\
&\qquad + |\!|\mathbb{G}|\!|_{1,\gamma,D_{t'}}^{(\gamma,1+\alpha)} + |\mathbb{G}|_{1,\gamma,D_{t'}}^{(\gamma,0)} + |\boldsymbol{a}|_{G_{t'}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |b|_{G_{t'}} \\
&\qquad + |\!|b|\!|_{G_{t'}}^{(\gamma,1+\alpha)} + |\nabla_\Gamma b|_{G_{t'}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + |B|_{G_{t'}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \\
&\qquad + \big(t'^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\boldsymbol{u}|_{1+\gamma,D_{t'}} + |\nabla\boldsymbol{u}|_{1+\gamma,D_{t'}}^{(\alpha,\alpha/2)}\big)|\boldsymbol{w}_0|_{1+\gamma,\Omega^{\pm}}^{(1)}\big\}.
\end{aligned}$$

где $c_1(t')$ *– неубывающая функция* $t' \leqslant T$, $\nabla_\Gamma = \Pi_0 \nabla$.

Техника доказательства теоремы 1.2 основана на методе последовательных приближений и на коэрцитивных оценках для линейной задачи:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t \boldsymbol{v} - \nu^\pm \Delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^\pm} \nabla p = \boldsymbol{f}, \ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = r \quad \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+, \ \ t > 0,\\
&\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \boldsymbol{v} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0,\\
&[\boldsymbol{v}]|_\Gamma = 0, \qquad [\Pi_0 \mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_\Gamma = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\\
&[\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{T}\boldsymbol{n}]\big|_\Gamma - \sigma \boldsymbol{n} \cdot \int_0^t \Delta_\Gamma \boldsymbol{v} \mathrm{d}t' = b' + \sigma \int_0^t B \mathrm{d}t',
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\boldsymbol{f}, r, \boldsymbol{b}, b', B, \boldsymbol{v}_0$ — заданные функции.

Специфика задачи (1.9) заключается в наличии интегрального члена $\sigma \boldsymbol{n} \cdot \int_0^t \Delta_\Gamma \boldsymbol{v} \mathrm{d}t'$. При $\sigma > 0$ эта задача некоэрцитивна, поскольку в последнем краевом условии присутствуют два члена разных порядков, ни один из которых не может быть рассмотрен как старший по отношению к другому. Доказательство разрешимости тем не менее проводится методом построения регуляризатора на основе априорных оценок и существования решения задачи с плоской границей, как и для линейных параболических уравнений. Поэтому в §2 мы анализируем модельную задачу (1.9), где поверхностью раздела жидкостей является плоскость $\{x_3 = 0\}$ [2]. Знак коэффициента σ при этом играет существенную роль: при $\sigma \leqslant 0$ оценки, полученные в п.2.5, становятся невозможными. Основой доказательства служат теоремы о мультипликаторах Фурье в пространствах Гёльдера. В §3 мы изучаем модельную задачу с плоской границей раздела при $\sigma = 0$ [11].

Задача (1.9) с замкнутой границей раздела рассматривается в §4. Там доказывается её разрешимость для любого конечного промежутка времени в гёльдеровских классах функций [1]. Далее, в §5, проводятся оценки для линейной и линеаризованной задач в весовых пространствах Гёльдера [3].

В §5.4 мы доказываем локальную по времени однозначную разрешимость задачи (1.5). На этом основании удаётся получить глобальную разрешимость для малых начальных данных как при отсутствии поверхностного натяжения (§6), так и при его наличии (§7).

Теорема 1.3. *Пусть* $\alpha, \gamma \in (0,1)$. *Предположим, что* $\Gamma \in C^{2+\alpha}$ *и* $\boldsymbol{v}_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega_0^- \cup \Omega_0^+)$, $\boldsymbol{f}, \nabla \boldsymbol{f} \in C^{\alpha, \frac{1+\alpha-\gamma}{2}}(Q_\infty)$ *удовлетворяют условиям согласования* (1.6) *и*

$$\boldsymbol{v}_0\big|_S = 0, \quad \Pi_S\Big(\boldsymbol{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^-}\nabla p_0(\xi) + \nu^-\nabla^2\boldsymbol{v}_0(\xi)\Big)\Big|_{\xi\in S} = 0,$$

где $p_0 = p(\xi, 0)$ *– это решение задачи дифракции* (1.7) *с* $\sigma = 0$ *и*

$$\frac{1}{\rho^-}\frac{\partial p_0}{\partial \boldsymbol{n}_S}\Big|_S = \boldsymbol{n}_S \cdot \big(\nu^-\nabla^2\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{f}\big|_{t=0}\big)\Big|_S.$$

(*Здесь* $\Pi_S \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{n}_S(\boldsymbol{n}_S\cdot\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{n}_S$ *– внешняя нормаль к* S.)

Кроме того, допустим, что данные достаточно малы, т.е.

$$|\boldsymbol{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |\boldsymbol{f}|^{(\alpha, \frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{Q_\infty} + |\nabla f|_{Q_\infty} + \int_0^\infty \|\boldsymbol{f}\|_{L_2(Q)}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \ll 1.$$

Тогда при $\sigma = 0$ *задача* (1.1) *в ограниченной области с* $\mathbf{v}\big|_S = 0$ *однозначно разрешима на всей положительной полуоси* $t > 0$, *а решение* $(\boldsymbol{v}, p)$ *обладает свойствами:* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}$, $p \in C^{(\gamma,1+\alpha)}$, $\nabla p \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}$, *при этом граница* Γ_t *– из класса* $C^{2+\alpha}$. *Это означает, что любом* $t_0 \in (0,\infty)$ *решение* $(\boldsymbol{u}, q)$ *и его производные в лагранжевых координатах лежат в соответствующих пространствах от* $\cup Q^\pm_{(t_0,t_0+\tau)}$ *для достаточно малого временного интервала* $(t_0, t_0+\tau)$.

При достаточно малой начальной скорости и малом отличии начальной поверхности от сферы мы доказываем в §7 однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.2) и при $\sigma > 0$ для всех $t > 0$. Мы показываем с помощью равномерной экспоненциальной оценки решения, что скорость капли в жидкости стремится к нулю, давление – к ступенчатой функции, а её форма – к шару определённого радиуса.

Итак, будем считать, что Ω_0^+ близка к шару B_{R_0}, объём которого равен её объёму. Для удобства оценок решения введём новую функцию давления: $p_1 = p$ в Ω_t^+ и $p_1 = p + \sigma\frac{2}{R_0}$ в Ω_t^-, при этом в системе

(1.1) изменится только последнее краевое условие:

$$[\mathbb{T}(\boldsymbol{v}, p_1)\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\boldsymbol{n}. \tag{1.10}$$

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3 *с* $q_0 = p_1(x, 0)$ *и пусть при* $t = 0$ $\Gamma \in C^{3+\alpha}$ *задаётся уравнением*

$$|x| = R\Big(\frac{x}{|x|}, 0\Big)$$

на единичной сфере S_1. *Предположим, кроме того, что начальные данные достаточно малы, т. е.*

$$|\boldsymbol{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{S_1} \leqslant \varepsilon \ll 1,$$

где $r_0(x/|x|) = R(x/|x|, 0) - R_0$, R_0*– радиус шара* B_{R_0}*:* $|\Omega_0^+| = 4\pi R_0^3/3$.

Тогда задача (1.1), (1.10), (1.2) *в ограниченной области с* $\boldsymbol{v}\big|_S = 0$ *однозначно разрешима на всей положительной полуоси* $t > 0$, *а решение* $(\boldsymbol{v}, p_1)$ *обладает свойствами:* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}$, $p_1 \in C^{(\gamma,1+\alpha)}$, $\nabla p_1 \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}$, *при этом граница* Γ_t *задаётся при каждом* t *функцией* $R(\cdot, t)$ *класса* $C^{3+\alpha}$*:*

$$|x - h(t)| = R\Big(\frac{x - h}{|x - h|}, t\Big)$$

(где $h(t)$ *— положение центра тяжести* Ω_t^+ *в момент времени* t*), и стремится к сфере радиуса* R_0 *с центром в некоторой точке* h_∞*, а давление определяется с точностью до ограниченной функции времени. Это означает, что при любом* $t_0 \in (0, \infty)$ *решение* $(\boldsymbol{u}, q)$ *и его производные в лагранжевых координатах лежат в соответствующих пространствах от* $D_{(t_0,t_0+\tau)} \equiv \cup Q^\pm_{(t_0,t_0+\tau)}$ *для достаточно малого временного интервала* $(t_0, t_0 + \tau)$. *Помимо того, имеет место оценка*

$$|\boldsymbol{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + |\nabla q|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + \| q \|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + \sup_{t\in(t_0,t_0+\tau)} |r(\cdot, t)|^{(3+\alpha)}_{S_1}$$
$$\leqslant c e^{-bt_0}\big\{|\boldsymbol{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{S_1}\big\}, \tag{1.11}$$

где $r(\omega, t) = R(\omega, t) - R_0$, $\omega \in S_1$.

Из этой теоремы следует вывод об единственности тривиального решения в случае, когда отсутствует начальная скорость, а начальная поверхность раздела жидкостей совпадает со сферой. Имеет место и устойчивость этого решения в том смысле, что при малых отклонениях начальных данных от нулевых решение будет мало отличаться от нуля. Тем не менее центр предельной сферы $S_{R_0}(h_\infty)$ может быть смещён относительно исходного центра тяжести Ω_0^+ даже при сколь угодно малых начальных скоростях $\boldsymbol{v}_0$. Неравенство (1.11) даёт возможность оценить сверху необходимое начальное расстояние между внешней поверхностью и границей раздела жидкостей.

В последних параграфах этой части мы рассматриваем движение двух жидкостей с учётом температурного фактора. Сначала мы допускаем зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры (§8). Опираясь на результаты §§2, 4, 5, мы получаем локальную однозначную разрешимость задачи в классах Гёльдера [10], при этом развивается техника М. В. Лагуновой и В. А. Солонникова[6], разработанная ими для изучения эффекта термо-капиллярной конвекции для капли в вакууме. Для двух жидкостей формулировка задачи характеризуется тем, при лучшем описании влияния температуры на поверхностное натяжение в краевых условиях появляются новые члены, которые надо дополнительно оценивать. Заметим также, что результаты по разрешимости задачи без учёта температуры, полученные для всего $\mathbb{R}^3$ в весовых пространствах (§5), позволяют нам доказать существование единственного решения и для задачи термо-капиллярной конвекции во всём пространстве, когда начальная скорость жидкостей убывает, а функция температуры стремится к константе при $|x| \to \infty$ (§8.4), при этом поведение решения на бесконечности будет совпадать с поведением начальных данных.

Пусть при $t = 0$ Γ – заданная замкнутая поверхность. При $t > 0$ нужно найти границу Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, вектор скорости $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, функцию давления p и функцию температуры θ

[6] Lagunova M. V., Solonnikov V. A., Nonstationary problem of thermo-capillary convection, Ленинградское отделение Математического института (ЛОМИ), препринт Е-13-89, Ленинград 1989, 28 с.

для обеих жидкостей, удовлетворяющих следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p=\boldsymbol{f},\;\;\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\
&\mathcal{D}_t\theta+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\theta-k^{\pm}\nabla^2\theta=0\quad\text{в}\quad\Omega_t^{\pm},\;\;t>0,\\
&\boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,\;\;\theta|_{t=0}=\theta_0\quad\text{в}\quad\Omega_0^-\cup\Omega_0^+,\\
&[\boldsymbol{v}]|_{\Gamma_t}=0,\quad[\theta]|_{\Gamma_t}=0,\quad\boldsymbol{v}\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0,\qquad\theta\xrightarrow[|x|\to\infty]{}\theta_\infty,\\
&[\mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t}=\sigma(\theta)H\boldsymbol{n}+\nabla_{\Gamma_t}\sigma(\theta),\quad\Big[k^{\pm}\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{n}}\Big]\Big|_{\Gamma_t}+\varkappa\theta\nabla_{\Gamma_t}\cdot\boldsymbol{v}=0\;\text{ на }\Gamma_t.
\end{aligned}\tag{1.12}$$

Здесь $\boldsymbol{f}$ – заданный вектор массовых сил, $\boldsymbol{v}_0$, θ_0 – начальные распределения скорости и температуры, $\sigma(\theta)=\sigma_1-\varkappa(\theta-\theta_1)>0$, $\sigma_1,\varkappa,\theta_1$ – положительные постоянные, $k^{\pm}$ – ступенчатая функция теплопроводности. Как и раньше, мы предполагаем выполнение (1.2).

Теорема 1.5. *Допустим, что* $\Gamma\in C^{3+\alpha}$, $\boldsymbol{f},D_x\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}_2^{\alpha,(\alpha+\varepsilon)/2}\big(\mathbb{R}^3\times(0,T)\big)$, $\boldsymbol{v}_0\in\boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha}(\Omega_0^-\cup\Omega_0^+)$, $\theta_0\in C_{1+\gamma}^{2+\alpha}(\Omega_0^-\cup\Omega_0^+)$, $\sigma\in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $\sigma\geqslant\sigma_0>0$, *с некоторыми* $\alpha\in(0,1)$, $\gamma\leqslant\alpha$, $\varepsilon\in(0,1-\alpha)$, $T<\infty$. *Кроме того, пусть выполнены условия согласования*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0,\;[\boldsymbol{v}_0]|_\Gamma=0,\;\boldsymbol{v}_0\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0,\;\theta_0\xrightarrow[|x|\to\infty]{}\theta_\infty,\;[\theta_0]|_\Gamma=0,$$

$$\begin{aligned}
\big[\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0\big]\big|_\Gamma\;&=\;\Pi_0\nabla\sigma(\theta_0),\;\Big[\Pi_0(\nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v}_0-\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q_0)\Big]\Big|_\Gamma=0,\\
\big[k^{\pm}\nabla^2\theta_0\big]\big|_\Gamma\;&=\;0,\quad\Big[k^{\pm}\frac{\partial\theta_0}{\partial\boldsymbol{n}_0}\Big]\Big|_\Gamma+\varkappa\theta_0(\Pi_0\nabla)\cdot\boldsymbol{v}_0=0\quad\textit{на}\quad\Gamma,
\end{aligned}$$

где $q_0(\xi)\equiv q(\xi,0)$ *– решение задачи дифракции* (1.7) *с* $\sigma=\sigma(\theta_0)$.

Тогда существует положительное число $T_0\leqslant T$ *такое, что задача* (1.12) , (1.2) *в лагранжевых координатах имеет единственное решение* $(\boldsymbol{u},q,\hat\theta)$ *со свойствами:* $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_{ST_0})$, $q\in C_{1,\gamma}^{(\gamma,1+\alpha)}(D_{T_0})$ $\nabla q\in\boldsymbol{C}_{1+\gamma}^{\alpha,\alpha/2}(D_{T_0}),\hat\theta-\theta_\infty\in C_{1+\gamma}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_{T_0})$. *Значение* T_0 *зависит от норм заданных функций и от кривизны* Γ.

Далее, в 9-ом параграфе изучается движение двух жидкостей с учётом температурной зависимости массовых сил в приближении Обербека–Буссинеска, при этом используется материал статьи [14]. Жидкости занимают ограниченный объём с твёрдой границей S, $S \cap \Gamma = \emptyset$. На границе раздела Γ_t учитывается сила поверхностного натяжения.

При $t > 0$ необходимо найти границу раздела Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, а также поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, функцию p, отклонение от гидростатического давления P_0, и функцию θ', отклонение от среднего значения температуры, для обеих жидкостей, которые удовлетворяют следующей начально–краевой задаче:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu^{\pm}\nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = \boldsymbol{f}(x,t) - \beta^{\pm}\boldsymbol{g}\theta', \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,\\
&\mathcal{D}_t \theta' + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\theta' - k^{\pm}\nabla^2\theta' = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^- \cup \Omega_t^+, \quad t > 0,\\
&\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \theta'|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^- \cup \Omega_0^+,\\
&[\boldsymbol{v}]|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}|_S = 0, \quad \theta'|_S = a,\\
&[\theta]|_{\Gamma_t} = 0, \qquad \left[k^{\pm}\frac{\partial \theta'}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\bigg|_{\Gamma_t} = 0 \quad \text{на } \Gamma_t.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь мы использовали обозначения, введённые в задачах (1.1) и (1.12), кроме того, $\beta^{\pm} > 0$ – ступенчатая функция коэффициента температурного расширения, $\boldsymbol{g} = g(0,0,1)$, где g – ускорение свободного падения, a – заданная температура на поверхности S, θ_0 – начальное распределение температуры. Замыкает задачу (1.13) условие (1.2).

Результатом исследования (1.13), (1.2) является локальная по времени разрешимость задачи в гёльдеровских классах функций. Основой доказательства служит теорема существования, аналогичная теореме 1.2, для задачи (1.8) в ограниченной области.

В **части II** исследуются задачи о движении одной, а также двух сжимаемых жидкостей и доказывается их локальная однозначная разрешимость. В последнем параграфе изучается модельная задача для термо–капиллярной конвекции в случае двух сжимаемых жидкостей.

В 11-ом параграфе мы рассматриваем задачу о движении в вакууме конечного объёма сжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Жидкость, как и прежде, считается баротропной, на свободной поверхности учитываются силы поверхностного натяжения. Мы доказываем локальную однозначную разрешимость этой задачи в гёльдеровских классах функций. Этот материал опубликован в [7], где доказана разрешимость линейной задачи в полупространстве на любом конечном интервале времени, и в [8], где рассмотрена задача с замкнутой свободной границей. Аналогичный результат в соболевских пространствах был получен В. А. Солонниковым и А. Тани.

Пусть при $t=0$ жидкость заполняет известную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Через Γ обозначим границу этой области $\partial\Omega$. Для $t>0$ нужно найти свободную границу $\Gamma_t=\partial\Omega_t$, поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t)=(v_1,v_2,v_3)$ и функцию плотности $\rho(x,t)>0$ жидкости, удовлетворяющие начально – краевой задаче для системы Навье – Стокса:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v})-\nabla\cdot\mathbb{T} &= \rho\boldsymbol{f},\\
\mathcal{D}_t\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) &= 0 \quad \text{в } \Omega_t,\ t>0, \qquad (2.1)\\
\boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0(x), \qquad & \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\ x\in\Omega,\\
\mathbb{T}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_t} &= \sigma H\boldsymbol{n}-p_e\boldsymbol{n} \quad \text{на } \Gamma_t, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

где тензор напряжений задаётся формулой

$$\mathbb{T}=(-p(\rho)+\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbb{I}+\mu\mathbb{S}(\boldsymbol{v}),$$

а $\mathbb{S}$ – это удвоенный тензор скоростей деформации; μ, μ' – коэффициенты динамических вязкостей; $p(\rho)$ — давление жидкости, заданное известной гладкой функцией плотности; $\boldsymbol{f}$ — заданное поле внешних сил, $p_e=p_e(x,t)$ — функция внешнего давления при $x\in\mathbb{R}^3,\ t>0$, ρ_0 и $\boldsymbol{v}_0$ начальные значения плотности и скорости жидкости, $\boldsymbol{n}$ вектор внешней нормали к Ω_t, $\sigma\geqslant 0$ коэффициент поверхностного натяжения; $H(x,t)$ — удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t. Запись $\nabla\cdot\mathbb{T}$ обозначает вектор с компонентами $(\nabla\cdot\mathbb{T})_j=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$, $j=1,2,3$.

Чтобы исключить потерю массы через свободную границу, предположим, что Γ_t состоит из точек $x(\xi,t)$, удовлетворяющих задаче (1.2). Это условие позволяет нам избавиться от неизвестной границы путём перехода от эйлеровых координат $\{x\}$ к лагранжевым $\{\xi\}$ согласно формуле (1.3), точно так же, как это было сделано в части I.

Только теперь якобиан преобразования (1.3) $J_{\boldsymbol{u}}(\xi,t)=\det\{a_{ij}\}_{ij=1}^{3}$ не равен единице:

$$J_{\boldsymbol{u}}(\xi,t)=1+\int_0^t \mathbb{A}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\tau.$$

Для функций плотности $\widehat{\rho}$ и скорости $\boldsymbol{u}$ в лагранжевых координатах мы получаем задачу, где можно проинтегрировать уравнение для плотности. В результате имеем:

$$\widehat{\rho}(\xi,t)=\rho_0(\xi)\exp\Big(-\int_0^t \nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\tau\Big)=\rho_0(\xi)J_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\xi,t),$$

где $\nabla_{\boldsymbol{u}}\equiv\Big\{\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big\}_{k=1}^{3}=J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\mathbb{A}\nabla$. Мы подставляем это выражение во второе уравнение в системе, пользуемся формулой для удвоенной средней кривизны поверхности (1.4), проектируем затем последнее краевое условие в (2.2) на касательную плоскость сначала к Γ_t, а затем – к Γ. В результате мы получим начально-краевую задачу относительно одной неизвестной функции – скорости $\boldsymbol{u}$, которая эквивалентна (2.1), (2.2) при $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0>0$:

$$\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}-\rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla\cdot\mathbb{T}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}-\rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla p(\rho_0J_{\boldsymbol{u}}^{-1})\quad \text{в } \Omega,\ t>0,$$

$$\boldsymbol{u}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,\ \mu\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_\Gamma=0, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\mathbb{T}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\big|_\Gamma-\sigma\boldsymbol{n}_0\cdot\Delta(t)\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{u}}\big|_\Gamma=(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})\big\{p(\rho_0J_{\boldsymbol{u}}^{-1})-p_e(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{u}},t)\big\}\big|_\Gamma.$$

Здесь $\mathbb{T}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})=(\mu'\nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{w})\mathbb{I}+\mu\mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$.

Сформулируем теорему существования для системы (2.3) пространствах Гёльдера. Положим $\mathbb{R}_T^3=\mathbb{R}^3\times(0,T),\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$.

Теорема 2.1. *Предположим, что при $\alpha\in(0,1)$ и $T<\infty$ поверхность $\Gamma\in C^{3+\alpha}$, начальная плотность $\rho_0\in C^{1+\alpha}(\Omega),\rho_0(\xi)\geqslant r_0>0$, константа $\sigma\geqslant 0$, $\boldsymbol{v}_0\in\boldsymbol{C}^{2+\alpha}(\Omega)$, $\boldsymbol{f},\mathcal{D}_x\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T^3)$, давление $p\in C^3(\mathbb{R}_+)$, а внешнее давление $p_e,\mathcal{D}_xp_e\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T^3)$. Пусть, кроме того, выполнено условие согласования:*

$$-p(\rho_0)\boldsymbol{n}_0+\mu'(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0+\mu\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0|_\Gamma=\sigma H\boldsymbol{n}_0-p_e\boldsymbol{n}_0|_{t=0}.$$

Тогда на интервале $(0, T_0)$, $T_0 \leqslant T$ *задача* (2.3) *имеет единственное решение* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$. *Величина* T_0 *зависит от норм* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_0, p, p_e, \rho_0$ *и от кривизны* Γ.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 остаётся справедливой, если σ – неотрицательная функция класса $C^{1+\alpha}(\Gamma)$.

Кроме того, в этой части мы рассматриваем задачу об одновременной эволюции двух сжимаемых капиллярных баротропных жидкостей, заполняющих всё пространство $\mathbb{R}^3$. В параграфе 10 мы доказываем локальную однозначную разрешимость этой задачи в пространствах Соболева – Слободецкого [17, 4], а в 12-ом параграфе – в весовых гёльдеровских классах функций [9]. И, наконец, в §13 мы изучаем проблему, аналогичную задаче (1.12) для несжимаемых жидкостей [13]. Эта задача моделирует эффект Марангони для двух слабо сжимаемых жидкостей. Полная постановка задачи термо-капиллярной конвекции для сжимаемой жидкости очень сложна.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ в ограниченной области Ω_0^+ находится жидкость с динамическими вязкостями $\mu^+ > 0$, $\lambda^+ \equiv \beta^+ \mu^+$, а во "внешней области" $\Omega_0^- \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_0^+}$ находится жидкость с динамическими вязкостями $\mu^- > 0$, $\lambda^- \equiv \beta^- \mu^-$. При $t > 0$ нужно найти свободную поверхность раздела жидкостей $\Gamma_t = \partial\Omega_t^+$, а также их плотность $\rho(x, t) > 0$ и поле скоростей $\boldsymbol{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$, удовлетворяющие начально-краевой задаче для системы Навье — Стокса

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= 0, \ \rho(\mathcal{D}_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}) - \nabla \cdot \mathbb{T} = \rho \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega_t^- \cup \Omega_t^+, \ t > 0, \\
\rho|_{t=0} &= \rho_0(x), \quad \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0(x) \text{ в } \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \boldsymbol{v} \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0, \\
[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t} &= 0, \quad [\mathbb{T}\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H \boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_t,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\mathbb{T} = (-p(\rho) + \lambda^{\pm} \nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbb{I} + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$ – тензор напряжений, $\mu^{\pm}$, $\lambda^{\pm}$ ступенчатые функции динамических вязкостей, равные μ^+, λ^+ в Ω_t^+ и μ^-, λ^- в Ω_t^-, соответственно; $p(\rho)$ — давление жидкостей, заданное известной гладкой функцией плотности; $\boldsymbol{f}$ – заданное поле внешних сил, ρ_0 и $\boldsymbol{v}_0$ – начальные распределения плотности и скорости жидкостей, $\boldsymbol{n}$

– вектор внешней нормали к Ω_t^+, $\sigma \geqslant 0$ коэффициент поверхностного натяжения; $H(x,t)$ — удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t.

Замыкает систему (2.4) кинематическое условие (1.2) на границе Γ_t.

На протяжении всей второй части мы предполагаем, что для вязкостей жидкостей выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\mu^-}{2} \leqslant \mu^+ \leqslant 2\mu^-, \quad 0 < \beta^\pm \leqslant 1. \tag{2.5}$$

На самом деле, полученные результаты будут верны и при более широких предположениях, в частности, при $-1 \leqslant \beta^\pm < 0$. Однако физический смысл вторых вязкостей $\lambda^\pm$, которые должны быть неотрицательными, заставляет нас ограничиться условиями (2.5).

После перехода к лагранжевым координатам и тех же преобразований, что мы проводили для одной жидкости, получаем задачу, аналогичную (2.3). Для этой задачи верна локальная теорема существования.

Теорема 2.2. *Допустим,что при некотором* $l \in (1/2,1)$ $\Gamma \in W_2^{5/2+l}$, $\rho_0 \in W_2^{1+l}(\cup\Omega^\pm)$, $\rho_0(\xi) \geqslant R_0 > 0$, $p \in C^3(\mathbb{R}_+)$*; кроме того,* $\boldsymbol{f}(\cdot,t) \in \boldsymbol{C}^2(\mathbb{R}^3)$ *для* $\forall t \in [0,T]$, $\boldsymbol{f}(\xi,\cdot)$, $\nabla \boldsymbol{f}(\xi,\cdot) \in \boldsymbol{C}^\beta(0,T)$ *для* $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ *при некотором* $\beta \in (1/2,1)$, $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\Omega^i)$, $[\boldsymbol{v}_0]\big|_\Gamma = 0$, *и выполнено условие согласования*

$$[-p(\rho_0)\boldsymbol{n}_0 + \lambda^\pm(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0 + \mu^\pm\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0]\big|_{\xi\in\Gamma} = \sigma H \boldsymbol{n}_0\big|_{t=0}.$$

Тогда существует $T_0 \in (0,T]$ *такое, что задача, аналогичная* (2.3) *для двух жидкостей, однозначно разрешима на промежутке* $(0,T_0)$ *и её решение* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{T_0})$, *при этом величина* T_0 *зависит от норм* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{v}_0$, ρ_0 *и от кривизны поверхности* Γ.

Сформулируем теперь основной результат для линеаризованной задачи. Для этого нам нужны будут нормы, квадраты которых определяются формулами

$$\left(\|u\|_{D_T}^{(l,l/2)}\right)^2 = \|u\|^2_{W_2^{l,l/2}(D_T)} + T^{-l}\|u\|^2_{D_T},$$

$$\left(\|u\|^{(2+l,1+l/2)}_{D_T}\right)^2 = \|u\|^2_{W^{2+l,1+l/2}_2(D_T)}$$
$$+T^{-l}\left\{\|\mathcal{D}_t u\|^2_{D_T} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} \|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}}_x u\|^2_{D_T}\right\} + \sup_{t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|^2_{W^{1+l}_2(\cup_i\Omega^i)}.$$

Заметим, что норма $\|u\|^{(l,l/2)}_{D_T}$ эквивалентна $\|u\|_{W^{l,l/2}_2(D_T)}$ при $l<1$ и при $\forall T<\infty$.

Теорема 2.3. *Предположим, что* $\Gamma\in W^{3/2+l}_2$, $\rho_0\in W^{1+l}_2(\cup\Omega^\pm)$ *при* $l\in(1/2,1)$, $\rho_0(\xi)\geqslant R_0>0$. *Кроме того, пусть для* $T<\infty$ *вектор* $\boldsymbol{u}$ *непрерывен при переходе через границу* Γ *и удовлетворяет неравенству*
$$T^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^{(2+l,1+l/2)}_{D_T}\leqslant\delta \tag{2.6}$$
с некоторым малым числом δ.

Тогда для любых $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}^{l,l/2}_2(D_T)$, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{W}^{l+1/2,l/2+1/4}_2(G_T)$, $\boldsymbol{w}_0\in\boldsymbol{W}^{1+l}_2(\cup\Omega^\pm)$, $b\in W^{l+1/2,l/2+1/4}_2(G_T)$ *и* $B\in W^{l-1/2,l/2-1/4}_2(G_T)$, *подчиняющихся условиям согласования*
$$[\boldsymbol{w}_0]\big|_\Gamma=0,\ [\mu^\pm\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{n}_0]\big|_\Gamma=\Pi_0\boldsymbol{a}\big|_{t=0},\ [\boldsymbol{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{n}_0]\big|_\Gamma=b\big|_{t=0},$$
линеаризованная задача, аналогичная (2.3) *для двух жидкостей, однозначно разрешима в пространстве* $\boldsymbol{W}^{2+l,1+l/2}_2(D_T)$, *и для её решения* $\boldsymbol{w}$ *верна оценка*
$$\|\boldsymbol{w}\|^{(2+l,1+\frac{l}{2})}_{D_T}\leqslant c_2(T)\big\{\|\boldsymbol{f}\|^{(l,\frac{l}{2})}_{D_T}+\|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}^{1+l}_2(\cup\Omega^\pm)}+\|\boldsymbol{a}\|_{W^{l+\frac12,\frac{l}{2}+\frac14}_2(G_T)}$$
$$+\|b\|_{W^{l+\frac12,\frac{l}{2}+\frac14}_2(G_T)}+\sigma\|B\|_{W^{l-\frac12,\frac{l}{2}-\frac14}_2(G_T)}\big\}$$
с неубывающей функцией $c_2(T)$.

Доказательство сформулированных теорем опирается на явное решение модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей, которое мы строим и оцениваем в подпараграфах § 10.2 и 10.3.

В параграфе 12 мы снова обратимся к задаче (2.4). Используя технику предыдущего параграфа, мы докажем локальную разрешимость задачи, аналогичной (2.3) для двух жидкостей, в весовых гёльдеровских классах функций.

Теорема 2.4. *Допустим, что для* $\alpha, \gamma \in (0,1)$ *и* $0 < T < \infty$ *поверхность* $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, *а* $\rho_0 - \rho_\infty \in C_\gamma^{1+\alpha}(\Omega_0^- \cup \Omega_0^+)$, $R_1 \geqslant \rho_0(\xi) \geqslant R_0 > 0$, $\rho_\infty > 0$, $p \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\boldsymbol{f}, \mathcal{D}_x \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_\gamma^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T)$, $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{C}_\gamma^{2+\alpha}(\Omega_0^- \cup \Omega_0^+)$, $\sigma \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$ *при* $x \in \Gamma$. *Кроме того, пусть динамические вязкости и константы* R_1, R_0 *удовлетворяют неравенствам* (2.5) *и* $R_1 \leqslant 2R_0$. *Предположим также, что выполнены условия согласования*

$$[\boldsymbol{v}_0]|_\Gamma = 0, \quad \Big[\rho_0^{-1}(\xi)\nabla \cdot \mathbb{T}(\boldsymbol{v}_0, \rho_0)\Big]\Big|_\Gamma = 0, \quad [\mathbb{T}(\boldsymbol{v}_0, \rho_0)\boldsymbol{n}_0]|_\Gamma = \sigma H_0 \boldsymbol{n}_0.$$

Здесь $H_0(\xi) = \boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta(0)\boldsymbol{\xi}$ *– удвоенная средняя кривизна поверхности* Γ.

Тогда задача, аналогичная (2.3) *для двух жидкостей, однозначно разрешима на некотором конечном интервале* $(0, T_0)$, $T_0 \leqslant T$, *длина которого зависит от норм* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{v}_0, p, \rho_0$ *и от кривизны* Γ. *Решение* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}_\gamma^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_{T_0})$.

Эта теорема доказывается на основании теоремы Банаха, при этом задача, аналогичная (2.3) для двух жидкостей, рассматривается как возмущение линейных систем, существование решения которых устанавливается путём построения регуляризатора, в то время как единственность следует из коэрцитивных априорных оценок, полученных по методу Шаудера. Доказательство, как всегда, начинается с оценок решения модельной задачи (§12.2 и §12.3).

Третья часть посвящена исследованию задачи о движении двух разнородных жидкостей, при этом сжимаемая жидкость может быть как внутри, так и снаружи несжимаемой. Изучение задач такого типа интересно, во-первых, с точки зрения чистой математики, так как они занимают промежуточное положение между задачами об эволюции жидкостей одного типа. Для модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей даже возможно сделать предельный переход в уравнениях и в формулах для решения от сжимаемой к несжимаемой жидкости. Во-вторых, эта задача возникает из многих физических явлений. Эволюция пузырька в несжимаемой жидкости появляется, например, в случае впрыскивания газа в воду, или после взрыва в океане, или после извержения вулкана на морском дне. Другой пример физической интерпретации нашей задачи может дать присутствие множества маленьких пузырьков в большом объёме жидкости, когда расстояния между ними много больше их размеров. Тогда мы тоже можем рассматривать это локально как отдельное движение одного пузырька в бесконечной жидкой среде. Аналогичная ситуация возникает при появлении капель в газе.

К сожалению, мы получаем наши результаты при некоторых ограничениях на коэффициенты вязкости жидкостей, которые возникают из математических соображений и реализуются для жидкостей со слабой вязкостью.

Материал данной части опубликован в [5, 6]. Как и в предыдущих частях, мы изучаем задачу о движении двух различных жидкостей в полной постановке. Главный результат – это локальная однозначная разрешимость задачи в пространствах Соболева – Слободецкого. Существенное отличие в доказательстве существования решения задачи содержится в анализе линейной модельной задачи с плоской границей раздела между жидкостями, поэтому в §15.1 мы подробно разбираем однородную модельную задачу, получаем для неё явное решение в пространстве образов Фурье–Лапласа, выводим оценки для него, а в §15.2 анализируем неоднородную задачу. В 16-ом параграфе мы кратко приводим доказательство разрешимости нелинейной задачи.

Итак, рассмотрим, для определённости, случай, когда в начальный момент $t = 0$ сжимаемая жидкость находится внутри ограниченной области $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $\mu^+ > 0,\ \lambda^+ > 0$ – динамические вязкости. Допустим, что внешняя область $\Omega_0^- \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_0^+}$ занята несжимаемой жидкостью с кинематической вязкостью $\nu^- > 0$ и плотностью $\rho^- > 0$. Мы предполагаем сжимаемую жидкость баротропной.

При $t > 0$, нужно определить поверхность Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, найти функцию плотности $\rho^+(x, t) > 0$ сжимаемой жидкости, функцию давления $p^-(x, t)$ несжимаемой жидкости, а также поле скоростей для обеих жидкостей $\boldsymbol{v}(x,t)=(v_1,v_2,v_3)$, удовлетворяющие начально–краевой задаче для системы Навье–Стокса:

$$\begin{aligned}
\rho^+(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v})-\nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p) &= \rho^+\boldsymbol{f},\\
\mathcal{D}_t\rho^+ +\nabla\cdot(\rho^+\boldsymbol{v}) &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^+, \quad t>0,\\
\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\frac{1}{\rho^-}\nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)=\boldsymbol{f}, &\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^-, \quad t>0,\\
\rho^+|_{t=0}=\rho_0^+, \quad \boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0 &\quad \text{в} \quad \Omega_0^+, \qquad\qquad (3.1)\\
\boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^-; &\qquad \boldsymbol{v}\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0, \quad p^-\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0;
\end{aligned}$$

$$[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t}=0, \quad [\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma_t}=\sigma H\boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad t>0. \tag{3.2}$$

Здесь тензор напряжений задаётся формулой

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)=\begin{cases}\big(-p^+(\rho^+)+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v}\big)\mathbb{I}+\mu^+\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^+,\\ -p^-\mathbb{I}+\mu^-\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^-,\end{cases}$$

$\mu^-=\nu^-\rho^-$; $p^+(\rho^+)$ давление сжимаемой жидкости, задаваемое гладкой функцией плотности; $\boldsymbol{f}$ – заданное поле внешних сил; $\boldsymbol{v}_0$ – начальное поле скоростей; ρ_0^+ – начальное распределение плотности сжимаемой жидкости; $\sigma\geqslant 0$ – коэффициент поверхностного натяжения и т. д. Мы сохраняем предыдущие обозначения.

Пусть B_d – это шар $\{x:|x|<d\}$. Выберем координатную систему $\{x\}$ так, чтобы область Ω_0^+ содержала B_d, $d<\infty$, и положим $B_{dT}^-\equiv(B_d\setminus\overline{\Omega_0^+})\times(0,T)$.

Теорема 3.1. *Предположим, что для некоторого* $l\in(1/2,1)$ *поверхность* $\Gamma\in W_2^{5/2+l}$, *а* $\rho_0^+\in W_2^{1+l}(\Omega_0^+)$, $0<R_0\leqslant\rho_0^+(\xi)\leqslant R_\infty<\infty$, $\xi\in\Omega_0^+$, $p^+\in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\mathbb{R}_T^3)$, $0<T<\infty$, $\boldsymbol{f}(\cdot,t)\in\boldsymbol{C}^2(\mathbb{R}^3)$ *при* $\forall t\in[0,T]$, $\boldsymbol{f}(\xi,\cdot)$, $\nabla\boldsymbol{f}(\xi,\cdot)\in\boldsymbol{C}^\beta(0,T)$ *при* $\forall\xi\in\mathbb{R}^3$ *с некоторым* $\beta\in(1/2,1)$. *Кроме того, допустим, что начальная скорость* $\boldsymbol{v}_0\in\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup_{i=-,+}\Omega_0^i)$ *удовлетворяет условиям согласования*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^-, \qquad [\boldsymbol{v}_0]\big|_\Gamma=0, \quad [\mu^\pm\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}_0]\big|_\Gamma=0,$$

а вязкости жидкостей подчиняются неравенствам

$$\mu^- > \mu^+, \quad \nu^- < \mu^+/R_\infty. \tag{3.3}$$

При выполнении всех этих условий существует число $T_0 \in (0,T]$ *такое, что задача* (3.1), (3.2) *после перехода к лагранжевым координатам однозначно разрешима на интервале* $(0,T_0)$, *и её решение* $(\boldsymbol{u},q)$ *обладает свойствами:* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{T_0})$, $q \in W_{2,loc}^{l,l/2}(Q_{T_0}^-)$, $\nabla q \in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0}^-)$, $q|_{G_{T_0}} \in W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_{T_0})$ *и*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}\|_{D_{T_0}}^{(2+l,1+l/2)} + \|\nabla q\|_{Q_{T_0}^-}^{(l,l/2)} + \|q\|_{B_{dT_0}^-}^{(l,l/2)} + \|q\|_{W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_{T_0})} \leqslant \\
&\quad \leqslant c_1(c_2 + c_3 T_0^{\frac{1-l}{2}} \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup_i \Omega_0^i)}) \Big\{ |\boldsymbol{f}|_{\mathbb{R}_{T_0}^3}^{(1,\beta)} + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup_i \Omega_0^i)} + \\
&\qquad + \sigma \|H_0\|_{W_2^{l+1/2}(\Gamma)} + \|\frac{1}{\rho_0^+}\nabla p^+\|_{W_2^l(\Omega_0^+)} + \|p^+(\rho_0^+)\|_{W_2^{1+l}(\Omega_0^+)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Величина T_0 *зависит от норм* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{v}_0$, ρ_0, p^+ *и от кривизны* Γ.

Эта теорема доказывается методом последовательных приближений подобно тому, как были доказаны аналогичные теоремы в случае несжимаемых жидкостей или в случае одной сжимаемой жидкости. Мы рассматриваем основные этапы доказательства в §16. Важную роль при этом играет следующая линеаризованная задача:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t \boldsymbol{w} - \frac{1}{\rho_0^+(\xi)} \mathbb{A}\nabla \cdot \mathbb{T}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f} \ \text{ в } Q_T^+, \\
&\mathcal{D}_t \boldsymbol{w} - \nu^- \nabla_{\boldsymbol{u}}^2 \boldsymbol{w} + \frac{1}{\rho_0^-} \nabla_{\boldsymbol{u}} s = \boldsymbol{f}, \quad \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{w} = r \ \text{ в } Q_T^-, \\
&\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \boldsymbol{w} \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0, \ s \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0, \\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{G_T} = 0, \quad [\mu^\pm \Pi_0 \Pi \mathbb{S}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}]\big|_{G_T} = \Pi_0 a, \\
&[\boldsymbol{n}_0 \cdot \mathbb{T}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w},s)\boldsymbol{n}]\big|_\Gamma - \sigma \boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta(t) \int_0^t \boldsymbol{w}\big|_\Gamma \mathrm{d}\tau = b + \sigma \int_0^t B \,\mathrm{d}\tau, \ \ t \in (0,T).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $\Gamma \in W_2^{3/2+l}$, $\rho_0^+ \in W_2^{1+l}(\Omega_0^+)$ *для некоторого* $l \in (1/2, 1)$ *и пусть* $0 < R_0 \leqslant \rho_0^+(\xi) \leqslant R_\infty < \infty$, $\xi \in \Omega_0^+$. *Кроме того, допустим, что векторное поле* $\boldsymbol{u}$ *непрерывно при переходе через границу* Γ *и для некоторого* $T < \infty$ *удовлетворяет неравенству* (2.6) *с малым* δ. *Предположим также, что для вязкостей* $\mu^\pm$, ν^- *выполняются неравенства* (3.3).

Тогда для любых $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)$, $r \in W_2^{1+l,1/2+l/2}(Q_T^-)$, $r = \nabla \cdot \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{W}_2^{0,1+\frac{l}{2}}(Q_T^-)$, $\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup_i \Omega_0^i)$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{W}_2^{l+\frac{1}{2},\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}(G_T)$, $b \in W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$ *и* $B \in W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)$, *для которых выполнены условия согласования*

$$[\boldsymbol{w}_0]\big|_\Gamma = 0, \quad [\mu^\pm \Pi_0 \mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{n}_0]\big|_\Gamma = \Pi_0 \boldsymbol{a}\big|_{t=0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{w}_0 = r\big|_{t=0} \quad \text{в} \quad \Omega_0^-,$$

существует единственное решение $(\boldsymbol{w}, s)$ *задачи* (3.4) *такое, что* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_T)$, $s \in W_{2,loc}^{l,\frac{l}{2}}(Q_T^-)$, $\nabla s \in \boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(Q_T^-)$, $s\big|_{G_T} \in W_2^{l+\frac{1}{2},\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}(G_T)$ *и*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{w}\|_{D_T}^{(2+l,1+l/2)} + \|\nabla s\|_{Q_T^-}^{(l,l/2)} + \|s\|_{B_{dT}^-}^{(l,l/2)} + \|s\|_{W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} \leqslant \\
&\quad \leqslant c_1(T)\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{D_T}^{(l,l/2)} + \|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup_i \Omega_0^i)} + \|r\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^-)} + \\
&\quad + \|\boldsymbol{R}\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,1+l/2}(Q_T^-)} + T^{-\frac{l}{2}}\|\mathcal{D}_t \boldsymbol{R}\|_{Q_T^-} + \|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} \\
&\quad + \|b\|_{W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + T^{-l/2}\|b\|_{W_2^{1/2,0}(G_T)} + \\
&\quad + \sigma\|B\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)}\Big\},
\end{aligned}$$

причём $c_1(T)$, *если* $\boldsymbol{w}_0 \neq 0$, *имеет вид:* $c_2 + c_3 T^{\frac{1-l}{2}} \|\boldsymbol{u}(\cdot, 0)\|_{\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0^-)}$, *где* c_2, c_3 — *неубывающие функции от* T, *в противном случае* — $c_1(T) = c_2(T)$.

Доказательство существования единственного гладкого решения задачи (3.4) основано на анализе модельной задачи, когда $\boldsymbol{u} \equiv 0$ и граница раздела Γ совпадает с плоскостью (§15):

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}-\nu^+\nabla^2\boldsymbol{w}+\frac{1}{\rho_0^+}\nabla q=\boldsymbol{f},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{w}=g \quad \text{в} \quad D_T^+=\mathbb{R}^3_+\times(0,T),\\
\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}-\nu^-\nabla^2\boldsymbol{w}-(\nu^-+\kappa^-)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})=\boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad D_T^-=\mathbb{R}^3_-\times(0,T),\\
\boldsymbol{w}\big|_{t=0}=0,\quad \boldsymbol{w}\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0,\quad q\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0,\qquad [\boldsymbol{w}]\big|_{x_3=0}=0, \qquad (3.5)\\
-\left[\mu^\pm\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_3}+\frac{\partial w_3}{\partial x_\alpha}\right)\right]\bigg|_{x_3=0}=a_\alpha(x',t),\qquad x'=(x_1,x_2),\ \alpha=1,2;\\
-(q+\lambda^-\nabla\cdot\boldsymbol{w})\big|_{x_3=0}+\left[2\mu^\pm\frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=0}+\ \sigma\Delta'\int\limits_0^t w_3\big|_{x_3=0}\mathrm{d}\tau=\\
=a_3+\sigma\int\limits_0^t A\,\mathrm{d}\tau \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^2_T\equiv\mathbb{R}^2\times(0,T).
\end{gathered}$$

Неоднородная задача (3.5) сводится к однородной, решение которой находится явно в пространстве образов Фурье–Лапласа.

Статьи в рецензируемых журналах и изданиях:

1. Разрешимость в гёльдеровских пространствах линейной задачи о движении двух жидкостей, разделённых замкнутой поверхностью, *Алгебра и анализ*, **5** (1993), № 4, 122–148.

2. Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface, *Acta Appl. Math.* **37** (1994), 31–40.

3. (совм. с Солонниковым В. А.) Классическая разрешимость задачи о движении двух вязких несжимаемых жидкостей, *Алгебра и анализ*, **7** (1995), № 5, 101–142.

4. Задача о движении двух сжимаемых жидкостей, разделённых замкнутой свободной поверхностью, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **243** (1997), 61–86.

5. Evolution of compressible and incompressible fluids separated by a closed interface, *Interfaces Free Bound.*, **2**(3) (2000), 283–312.

6. Evolution of closed interface between two liquids of different types, Proc. 3ECM, Barcelona, 2000, Progress in Maths, **202** (2001), 263–272.

7. (совм. с Солонниковым В. А.) Классическая разрешимость модельной задачи в полупространстве, связанной с движением изолированной массы сжимаемой жидкости, *Зап. научн. семин. ПОМИ* , **271** (2000), 92–113.

8. (совм. с Солонниковым В. А.) Классическая разрешимость задачи о движении изолированной массы сжимаемой жидкости, *Алгебра и анализ*, **14** (2002), № 1, 71–98.

9. Solvability in weighted Hölder spaces of a problem governing the evolution of two compressible fluids, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **295**, 57–89 (2003).

10. On the problem of thermocapillary convection for two incompressible fluids separated by a closed interface, *Progr. Nonlin. Diff. Eq. and Their Appl.*, **61**, 45–64 (2005).

11. Model problem connected with the motion of two incompressible fluids, *Adv. in Math. Sci. Applic.*, **17** (2007), No.1, 195–223.

12. Global solvability of a problem on two fluid motion without the surface tension, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **348**, 2007, 19–39.

13. Thermocapillary convection problem for two compressible immiscible fluids, *Microgravity Sci. Tec.* **20**(3–4) (2008), 287–291.

14. (совм. с Нечасовой Ш.) Движение двух несжимаемых жидкостей в приближении Обербека–Буссинеска, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **362** (2008), 92–119.

15. (совм. с Солонниковым В. А.) Глобальная разрешимость задачи о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей в контейнере, *Зап. научн. семин. ПОМИ* , **397** (2011), 20–52.

Другие публикации автора по теме диссертации:

16. Classical solvability of the problem describing the evolution of a drop in a liquid medium, *Navier–Stokes Equations and Related Nonlinear Problems* ed. A. Sequeira, Plenum Press, New York, 1995, 191–199.

17. Motion of two compressible fluids separated by a free closed interface, *Free Boundary Problems News* (Europ. Sci. Foundation) **10**, April 1996, 5–6.