САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Викторов Иван Викторович

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНАМИ

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Товстик Пётр Евгеньевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Иванова Елена Александровна (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

кандидат физико-математических наук доцент Михеев Артём Валерьевич (Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики")

Ведущая организация: Южный федеральный университет

Защита состоится "___"__________201_ г. в __ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "____" ____________ 201_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета Кустова Е.В.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Оболочечные конструкции широко применяются в судостроении, авиастроении, приборостроении, ракетной технике, строительстве, машиностроении и во многих других отраслях промышленности. Использование композиционных материалов позволяет усилить одно из главных их преимуществ — сочетание лёгкости с высокой прочностью. При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций одним из основных шагов является расчёт на устойчивость. В наше время решение этой задачи при помощи одного из численных методов непосредственно или с помощью прикладных программ, их реализующих, не является неразрешимой задачей. Однако аналитические методы дают качественное понимание вопроса, что помогает контролировать результаты и корректно формулировать задачи численного моделирования.

Вопросам теории оболочек посвящено много научных трудов. Фундаментальными в этой области являются монографии В.З. Власова, А.Л. Гольденвейзера, И.В. Лурье, В.В. Новожилова, К.Ф. Черныха и других. Существует большое количество работ посвящённых исследованию конструктивно анизотропных материалов, среди которых назовем работы Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова, В.Л. Нарусберга и Г.А. Тетерса, Ю.В. Немировского и А.П. Янковского. Общие вопросы устойчивости изложены в работах Н.А. Алфутова, А.С. Вольмира, Э.И. Григолюка и В.В. Кабанова, С.П. Тимошенко, П.Е. Товстика и многих других.

Теоретические методы исследования, которые используются для анализа устойчивости оболочек, можно условно разделить на две группы: аналитические и численные. Поведение оболочек описывается довольно сложными дифференциальными уравнениями и на первых этапах развитие методов их решения шло по пути упрощений, введения различных предположений, гипотез исходя из физических, геометрических и других соображений. Но в настоящее время широкое распространение получили многие численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие, что связано с наличием быстродействующих вычислительных машин. Также для исследования устойчивости оболочек используется ряд пакетов прикладных программ, таких как ANSYS, ABAQUS и другие, основанных на методе конечных элементов.

Однако не следует пренебрегать и развитием аналитических методов и, в частности, асимптотических. В уравнения теории оболочек входит толщина h, которая мала по сравнению с другими размерами оболочки. Это позволило применить асимптотические методы к исследованию поведения оболочек. Асимптотические методы позволяют достаточно быстро провести расчёты, как на устойчивость, так и на колебания, прочность, дать качественный анализ этих явлений. Также они полезны при выборе эффективных численных методов и позволяют упростить анализ численных результатов. Весьма эффективным аналитическим методом решения задач устойчивости оболочек является используемый в настоящей работе локальный подход, заключающийся в том, что переменные коэффициенты замораживаются, а граничные условия игнорируются. Первоначально этот подход был предложен Ю.Н. Роботновым, а затем развит В.П. Ширшовым, П.Е. Товстиком, Г.И. Михасевым, А.В. Михеевым и другими.

Приведённый анализ литературы показывает, что проводимые ниже исследования по устойчивости оболочек, подкреплённых волокнами, с одной стороны находятся в русле работ по устойчивости, а с другой — дополняют полученные ранее результаты. Тем самым обоснованна актуальность темы диссертации.

Целью работы является исследование устойчивости оболочек вращения, подкреплённых системами нитей, в зависимости от характера армирования.

Методы исследования. В работе приводятся двухмерные уравнения теории оболочек, получающиеся при использовании методов гипотез Кирхгофа-Лява и Тимошенко. Соотношения упругости, описывающие жесткость элемента оболочки на растяжение, изгиб (и сдвиг) получаются осреднением жесткости матрицы и нитей по толщине оболочки. Анализ уравнений устойчивости осуществляется локальным подходом и контролируется численным методом ортогональной прогонки.

Новые результаты, выносимые на защиту, заключаются в следующем:

1. С применением локального подхода получены явные приближенные формулы для критической нагрузки и формы выпучивания в задаче устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии с винтовой анизотропией, появляющейся при армировании одной системой нитей. Найдена зависимость критической нагрузки от угла армирования и распределения нитей по толщине оболочки.

2. Проведён анализ устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки, полученной путём симметричного армирования двумя системами нитей. Найдена критическая нагрузка и форма потери устойчивости в зависимости от угла армирования. Проведена оценка точности локального подхода путём сравнения с результатами метода ортогональной прогонки для различных граничных условий. Проведено сравнение результатов в рамках гипотез Кирхгофа-Лява и Тимошенко.

3. Решён ряд задач устойчивости сферической и конической оболочек, симметрично армированных двумя системами нитей. Найдена наиболе слабая параллель, в окрестности которой локализуется форма потери устойчивости. Для конической оболочки решена задача оптимального армирования, приводящая к уменьшению расхода армирующих элементов без сни-

жения критической нагрузки.

4. Рассмотрена модель нитей, слабо сопротивляющихся сжатию, что приводит к разномодульной теории упругости. В рамках этой модели рассмотрена осесимметричная деформации цилиндрической оболочки под действием внешнего давления.

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием традиционных уравнений теории оболочек, сравнением приближенных и численных результатов, а также с результатами работ других авторов.

Практическая ценность. Разработан эффективный метод учета жесткости волокон в составе композиционной оболочки. Разработаны алгоритмы исследования и получены простые формулы, удобные для приближенных расчетов на устойчивость.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Международной научной конференции по механике "Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2003, 2006, 2009); на Международной конференции "Четвёртые Окуневские чтения" (Санкт-Петербург, 2004); на XIII Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону, 2009); на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (Санкт-Петербург, 2004, 2011), а также на заседаниях кафедр теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета и кафедры теории упругости Южного федерального университета.

Публикация результатов. По теме диссертации имеется 8 опубликованных работ [1-8]. В статье [1] соискателю принадлежат параграфы 7-9, в которых рассмотрено влияние сдвига на устойчивость цилиндрической оболочки, симметрично армированной двумя и тремя системами нитей. Соавтору принадлежат параграфы 1-6, в которых обсуждаются гипотезы Тимошенко, приводятся уравнения двухмерной теории круговых цилиндрических оболочек, и рассматривается устойчивость трансверсально-изотропной и многослойной цилиндрических оболочек. В статьях [2, 8] П.Е. Товстику принадлежит анализ общих вопросов, связанных с анизотропией теории оболочек, а реализация анизотропии, вызванной наличием нитей, — соискателю. В подготовки докладов и материалов на конференциях (см. [4, 8]) вклад соавторов одинаковый. Статьи [1, 2, 3] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из оглавления, семи глав и списка литературы, содержащего 91 наименование. Текст работы изложен на 73 страницах. Диссертация содержит 32 рисунка и 2 таблицы.

Краткое содержание работы.

В **первой главе** кратко описывается история развития теории оболочек, композиционных оболочек, вопросов устойчивости оболочек, методов исследования и определяется место, которое занимает данная работа. Обозначена цель работы, описаны применяемые методы и сформулированы результаты выносимые на защиту.

Во **второй главе** приводятся основные соотношения, которые будут использоваться во всех дальнейших главах. Рассматривается тонкая изотропная оболочка вращения, подкрепленная N системами волокон, наклонёнными под углами θ_k к образующей, где $k = 1,\ 2, \dots\ N$. Предполагается, что нити равномерно распределены по окружности оболочки симметрично относительно срединной поверхности.

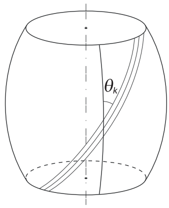

Рис. 1: Армированная оболочка вращения

Напряжения в оболочке представляют собой сумму напряжений в матрице и осредненных напряжений растяжения-сжатия волокон

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ij}^{(k)} \qquad i, j = 1, 2.$$

Для матрицы

$$\sigma_{11}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{11} + \nu_0\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12}^{(0)} = \frac{1-\nu_0}{2} F_0\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{22} + \nu_0\varepsilon_{11}),$$

Для k-ой системы волокон

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k)} &= F_k(c_k^4\varepsilon_{11} + c_k^3 s_k\varepsilon_{12} + c_k^2 s_k^2\varepsilon_{22}), \\
\sigma_{12}^{(k)} &= F_k(c_k^3 s_k\varepsilon_{11} + c_k^2 s_k^2\varepsilon_{12} + c_k s_k^3\varepsilon_{22}), \\
\sigma_{22}^{(k)} &= F_k(c_k^2 s_k^2\varepsilon_{11} + c_k s_k^3\varepsilon_{12} + s_k^4\varepsilon_{22}),
\end{aligned}$$

$$\text{где} \qquad F_0 = \frac{E_0\delta_0^*}{1-\nu_0^2}, \quad F_k = E_k\delta_k^*, \qquad s_k = \sin\theta_k, \quad c_k = \cos\theta_k.$$

Деформации ε_{ij} принимаются линейными функциями координаты z

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \varkappa_1 z, \qquad \varepsilon_{12} = \omega + 2\tau z, \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \varkappa_2 z,$$

где ε_1, ε_2 и ω — деформации растяжения-сжатия; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и τ — деформации изгиба-кручения

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{B'}{B}u_1 - \frac{w}{R_2},$$
$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial s} - \frac{B'}{B}u_2 + \frac{1}{B}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi},$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial s}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi} + \frac{B'}{B}\gamma_1,$$
$$\tau = -\frac{1}{B}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} + \frac{B'}{B}\gamma_2 + \frac{1}{R_2}\frac{\partial u_2}{\partial s},$$

$$\gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_1}{R_1}, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u_2}{R_2}.$$

Предполагая, что нити симметрично расположены относительно срединной поверхности, получим выражения для усилий T_1, T_2, S и моментов M_1, M_2, H:

$$\begin{array}{rcl} T_1 &=& K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + K_{13}\omega, \\ T_2 &=& K_{21}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{23}\omega, \\ S &=& K_{31}\varepsilon_1 + K_{32}\varepsilon_2 + K_{33}\omega, \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{rcl} M_1 &=& D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + 2D_{13}\tau, \\ M_2 &=& D_{21}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + 2D_{23}\tau, \\ H &=& D_{31}\varkappa_1 + D_{32}\varkappa_2 + 2D_{33}\tau. \end{array} \qquad (2)$$

Рассмотрим i-ую систему нитей. Предполагаем, что $\delta_i^*(z) = \delta_i f_i(z)$, где δ_i — относительный объём, занимаемый i-ой системой нитей, $f_i(z)$ — четная функция, описывающая характер распределения нитей по толщине оболочки. Тогда характер армирования оболочки i-ой системой нитей полностью задается двумя безразмерными параметрами k_i, d_i имеющими смысл относительной жесткости i-ой системы нитей на растяжение-сжатие и на изгиб-кручение соответственно.

$$k_i = (1-\nu_0^2)\frac{E_i\delta_i}{E_0\delta_0}, \qquad d_i = (1-\nu_0^2)\frac{12}{h^3}\frac{E_i\delta_i}{E_0\delta_0}\int_{-h/2}^{h/2} f_i(z)z^2\,dz,$$

Параметр $k_i \geq 0$ не зависит от характера распределения волокон $f_i(z)$ (случай $k_i = 0$ соответствует оболочке, не подкрепленной i-ой системой нитей). В то же время параметр d_i сильно зависит от распределения нитей по толщине оболочки. Он изменяется от $d_i = 0$ (нити расположены на срединной поверхности) до $d_i = 3k_i$ (нити расположены на лицевых поверхностях $z = \pm h/2$). В случае равномерного распределения нитей по толщине оболочки $d_i = k_i$.

Коэффициенты K_{ij} и D_{ij} в (1, 2) задаются по формулам

$$\begin{aligned} &K_{11} = K_0(1 + \sum_{i=1}^{N} k_i c_i^4), &&K_{12} = K_{21} = K_0(\nu_0 + \sum_{i=1}^{N} k_i c_i^2 s_i^2), \\ &K_{22} = K_0(1 + \sum_{i=1}^{N} k_i s_i^4), &&K_{33} = K_0(\frac{1-\nu_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} k_i c_i^2 s_i^2), \\ &K_{13} = K_{31} = K_0 \sum_{i=1}^{N} k_i c_i^3 s_i, &&K_{23} = K_{32} = K_0 \sum_{i=1}^{N} k_i c_i s_i^3, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &D_{11} = D_0(1 + \sum_{i=1}^{N} d_i c_i^4), &&D_{12} = D_{21} = D_0(\nu_0 + \sum_{i=1}^{N} d_i c_i^2 s_i^2), \\ &D_{22} = D_0(1 + \sum_{i=1}^{N} d_i s_i^4), &&D_{33} = D_0(\frac{1-\nu_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} d_i c_i^2 s_i^2), \\ &D_{13} = D_{31} = D_0 \sum_{i=1}^{N} d_i c_i^3 s_i, &&D_{23} = D_{32} = D_0 \sum_{i=1}^{N} d_i c_i s_i^3, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{где,} \qquad K_0 = \frac{E_0 \delta_0 h}{1-\nu_0^2}, \qquad D_0 = \frac{E_0 \delta_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)} \tag{5}$$

Уравнения бифуркации безмоментного напряжённого состояния оболочки вращения имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (BT_1)}{\partial s} - B'T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial (BS)}{\partial s} + B'S = 0, \\ &\frac{\partial (BQ_1)}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + B(\varkappa_1 T_1^0 + 2\tau S^0 + \varkappa_2 T_2^0) + B\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) = 0, \\ &\frac{\partial (BM_1)}{\partial s} - B'M_2 + \frac{\partial H}{\partial \varphi} + BQ_1 = 0, \\ &\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial (BH)}{\partial s} + B'H + BQ_2 = 0, \end{aligned}$$

Считаем, что нагружение однопараметрическое, определяемое параметром λ

$$\{T_1^0,\ T_2^0,\ S^0\} = -\lambda\{t_1,\ t_2,\ t_3\}.$$

Построение локальных форм потери устойчивости оболочки — это простейший способ анализа её устойчивости, который при определенных ограничениях дает хорошее первое приближение для критической нагрузки и для формы потери устойчивости. При этом граничные условия игнорируются, а переменные коэффициенты системы замораживаются. Вводим координаты $dx_1 = ds$, $dx_2 = Bd\varphi$. Перемещения ищутся в виде

$$u_1 = u_1^0 \sin z, \quad u_2 = u_2^0 \sin z, \quad w = w^0 \cos z, \qquad z = px_1 + qx_2.$$

где u_1^0, u_2^0, w^0 — амплитуды, а p, q — волновые числа. Находим λ как функцию волновых чисел p и q

$$\lambda = f(p,q) = \frac{B_\varepsilon + B_\varkappa}{B_t}, \qquad \text{где}$$

$$B_\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{p^2}{R_2} + \frac{q^2}{R_1}\right)^2, \qquad B_t = t_1p^2 + 2t_3pq + t_2q^2,$$

$$\Delta = A_{22}p^4 - 2A_{23}p^3q + (2A_{12} + A_{33})p^2q^2 - 2A_{13}pq^3 + A_{11}q^4,$$

$$B_\varkappa = D_{11}p^4 + 4D_{13}p^3q + (D_{12} + 2D_{33})p^2q^2 + 4D_{23}pq^3 + D_{22}q^4.$$

Здесь ввели A_{ij}, элементы матрицы $A = K^{-1}$.

Критическую нагрузку получим, минимизируя функцию $f(p,q)$ по ее аргументам. С этой целью положим $p = r\cos\alpha$, $q = r\sin\alpha$. Выполнив минимизацию по аргументу r, получим

$$\lambda_0 = \min_\alpha \frac{\sqrt{B_\varepsilon^*(\alpha)B_\varkappa^*(\alpha)}}{B_t^*(\alpha)}, \qquad r_0^4 = \frac{B_\varepsilon^*(\alpha)}{B_\varkappa^*(\alpha)}, \tag{6}$$

где $\quad B_\varepsilon = B_\varepsilon^*(\alpha), \quad B_\varkappa = r^4 B_\varkappa^*(\alpha), \quad B_t = r^2 B_t^*(\alpha), \quad \Delta = r^4\Delta^*(\alpha).$

Для удобства последующего анализа перейдём к безразмерным переменным, отнеся усилия и моменты к K_0 из (5), а линейные величины к R. Введем малый параметр толщины оболочки μ и параметр нагружения Λ по формулам

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12}, \qquad \lambda = 2\mu^2\Lambda\sqrt{1-\nu_0^2}.$$

Такой выбор параметра Λ дает $\Lambda = 1$ при осевом сжатии цилиндрической оболочки без нитей.

В **третьей главе** рассматривается локальная устойчивость цилиндрической оболочки, армированной одной системой волокон под постоянным углом θ к образующей. При таком характере подкрепления оболочка обладает свойством винтовой анизотропии. Исходя из формулы (6) для критической нагрузки, в случае осевого сжатия ($t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$) имеем

$$\Lambda = \min_\alpha \sqrt{\frac{(1+k-\nu^2)(1+d\cos^4(\alpha-\theta))}{(1+\nu)(1-\nu+k\cos^2(\alpha-\theta)(2-(1+\nu)\cos^2(\alpha-\theta)))}}, \tag{7}$$

Из (7) видно, что критическую нагрузку можно определить минимизируя не по углу волнообразования α, а по углу наклона вмятин относительно волокон $\alpha-\theta$. В таком случае результат не будет зависеть от угла армирования θ и будет иметь вид

$$\Lambda = \sqrt{1+\frac{\sqrt{4kd^*+t^2(d^*)}-t(d^*)}{2(1+\nu)}},$$

$$\cos^2(\alpha-\theta) = \frac{2}{\sqrt{4kd^*+t^2(d^*)}+t(d^*)},$$

$$\text{где} \qquad t(d^*) = (1+\nu)+d^*(1-\nu), \qquad d^* = \frac{d}{k}, \quad 0 \le d^* \le 3.$$

Отдельно запишем эти соотношения для трёх частных случаев распределения волокон по толщине: волокна на срединной поверхности, равномерно распределены по толщине, волокна на лицевых поверхностях оболочки ($d=0$, $d=k$ и $d=3k$ соответственно)

d	Λ	$\cos^2(\alpha-\theta)$
0	1	$\frac{1}{1+\nu}$
k	$\sqrt{1+\frac{\sqrt{k+1}-1}{1+\nu}}$	$\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$
$3k$	$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3k+(2-\nu)^2}-(2-\nu)}{1+\nu}}$	$\frac{1}{\sqrt{3k+(2-\nu)^2}+(2-\nu)}$

(8)

На Рис. 2 показана зависимость критической нагрузки Λ и разности углов армирования и волнообразования $|\alpha-\theta|$ для трёх рассмотренных случаев (8) распределения волокон по толщине оболочки (слева и справа соответственно). При построении графиков считали, что $\nu_0 = 0.3$. Из (8) и Рис. 2

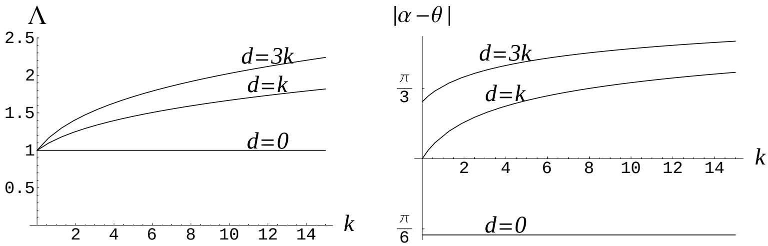

Рис. 2: Зависимость Λ и угла $|\alpha-\theta|$ от относительной жёсткости армирования k

видно, что в случае оболочки армированной одной системой волокон, расположенной на срединной поверхности, увеличения критической нагрузки

Λ по сравнению с изотропной оболочкой не происходит. В этом случае армирование влияет только на форму потери устойчивости.

Задачи устойчивости оболочки с винтовой анизотропией при кручении и внешнем давлении рассматривались в 3.2. Для этих двух задач выражение для критической нагрузки искалось при помощи разложения по малому параметру β, являющемуся котангенсом угла наклона вмятин к образующей.

В **четвёртой главе** рассматривается локальная устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии, подкрепленной двумя системами нитей, наклоненных к образующим под постоянными углами θ и $-\theta$. При таком характере подкрепления оболочка является ортотропной. Критическую нагрузку λ определяем по формуле (6) для случая осевого сжатия ($t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$).

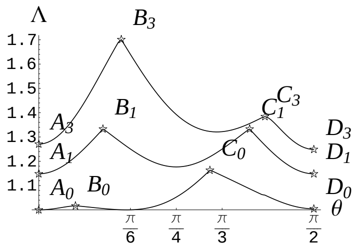

Рис. 3: Зависимость критической нагрузки от угла армирования.

На Рис. 3 представлена зависимость критической нагрузки от угла наклона нитей при значении $k = 1$ (жесткость на растяжение нитей равна жесткости матрицы) для трёх значений параметра изгибной жесткости $d = 0$, $d = k$, $d = 3k$ (кривые A_0D_0, A_1D_1, A_3D_3 соответственно). Превышение значения Λ по сравнению с $\Lambda = 1$ указывает на подкрепляющее влияние нитей. Видно, что подкрепляющий эффект является минимальным, если нити расположены в срединной поверхности оболочки ($d = 0$), максимальным — в случае расположения нитей по поверхностям оболочки ($d = 3k$).

Опишем форму потери устойчивости, которая характеризуется параметром α. На участках A_iB_i и C_iD_i имеем $0 < \alpha < \pi/2$, т. е. вмятины имеют шахматный характер (здесь и далее для точек A_i, B_i, C_i и D_i индекс i принимает значения $i = 0, 1, 3$). На участке B_iC_i угол волнообразования $\alpha = 0$ и вмятины осесимметричные. Угловые точки на графике возникают в связи с трансформацией формы потери устойчивости. Видим, что при $d = 0$ и $\theta = 0,\ \pi/6,\ \pi/3,\ \pi/2$ нити не подкрепляют оболочку, так как форма потери устойчивости такова, что в данных направлениях срединная поверхность не испытывает растяжения. Качественная картина зависимости критической нагрузки от угла армирования не сильно меняется при усилении заделки краев оболочки, а лишь увеличивается значение параметра Λ.

В 4.2 проводится сравнение данных, полученных при помощи локального подхода, с результатами численного интегрирования. Был использован метод ортогональной прогонки для трёх вариантов граничных условий: жёсткое закрепление обоих концов; шарнирное опирание на обоих концах; шарнирное опирание на одном и жесткое закрепление на другом конах оболочки.

Локальный подход даёт хорошие результаты для шарнирно опёртой на обоих концах оболочки. При усилении заделки краёв локальный подход также приводит к приемлемым результатам в случае, если оболочка достаточно длинная. На Рис. 4 проводится сравнение критической нагрузки,

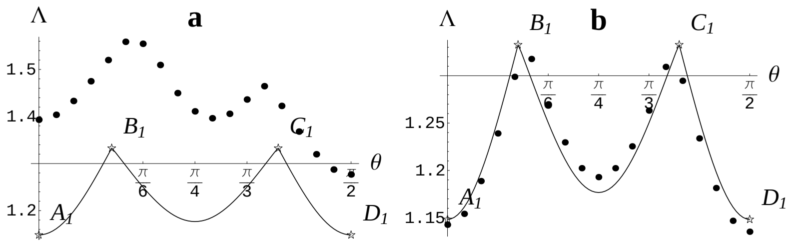

Рис. 4: Зависимость критической нагрузки от угла армирования.

полученной при локальном подходе, с результатами численного интегрирования при условиях жесткого закрепления на обоих краях. Сплошной линией показано значение параметра нагружения Λ, полученное при локальном подходе, точками — результаты численного интегрирования. В обоих случаях считаем $d = k = 1$. Разница же между графиками **a** и **b** на Рис. 4 заключается в том, что при вычислении результатов для **a** высота оболочки считалась равной радиусу, а для **b** — четырем радиусам.

В **пятой главе** рассматривается устойчивость нецилиндрических оболочек вращения, симметрично армированных двумя системами нитей. В отличие от цилиндрических оболочек, здесь плотность волокон меняется вдоль образующей при постоянном угле армирования. В 5.1 обсуждались локальные формы потери устойчивости сферической оболочки при осевом сжатии осевом растяжении и равномерном внешнем давлении, для трёх случаев распределения нитей по толщине оболочки. В 5.2 на примере устойчивости усеченного конуса при осевом сжатии рассматривалась задача об изменении угла армирования таким образом, чтобы все горизонтальные сечения оболочки были в равной мере предрасположены к потере устойчивости. Считалось, что нити равномерно распределены по толщине оболочки. Решение такой задачи позволяет экономить армирующий материал без изменения критической нагрузки.

В **шестой главе** исследуется локальная устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии с использованием гипотез Тимошенко. Рассматривается случай симметричного подкрепления двумя системами нитей, приводящий к тому, что оболочка становится ортотропной.

Вводятся независимые от перемещений срединной поверхности углы ϑ_1 и ϑ_2 поворота нормального до деформации волокна. Изменения кривизны и кручения срединной поверхности κ_1, κ_2, τ в модели Тимошенко задаются по формулам

$$\kappa_1 = -\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi}, \qquad 2\tau = -\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s} - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi}.$$

Перерезывающие усилия Q_1 и Q_2

$$Q_i = k^* G_{i3} h \zeta_i, \quad \zeta_i = \vartheta_i - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad k^* = \frac{5}{6},$$

где ζ_1 и ζ_2 — углы сдвига, k^* — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений сдвига по толщине оболочки. Считаем, что при деформации сдвига на углы ζ_1 и ζ_2 нити не работают, тогда упругие модули сдвига G_{13} и G_{23} равны K_{12} при $k = 0$:

$$G_{13} = G_{23} = \frac{1 - \nu_0}{2}.$$

Случай осесимметричной потери устойчивости приводит к простым расчетным формулам для параметра нагружения

$$\lambda = 2\mu^2 \left(\sqrt{\frac{D_{11}}{K_{11}}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)} - \frac{D_{11}}{2K_{11}G_{13}}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)\mu^2 \right), \tag{9}$$

без учета сдвига последнее слагаемое в формуле (9) опускается.

На Рис. 5 показана зависимость нормированной критической нагрузки Λ от угла армирования θ для случая циклически симметричной потери устойчивости. Сплошной линией показана критическая нагрузка, полученная с использованием гипотез Тимошенко, а пунктиром — полученная при тех же параметрах оболочки с использованием гипотез Кирхгофа-Лява. Считали $k = 10$, $\mu = 0.1$, $\nu_0 = 0.3$. Из графика видно, что даже для случая довольно большой относительной жёсткости волокон вносимая поправка незначительна.

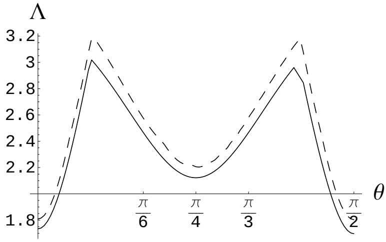

Рис. 5: Сравнение моделей Кирхгофа–Лява и Тимошенко

В **седьмой главе** рассматривается деформация ортотропной оболочки, симметрично подкрепленной двумя системами нитей, равномерно распределённых по толщине оболочки. Поведение армирующих волокон в случае сжатия считается существенно нелинейным, а именно, предполагается, что жёсткость нитей становится пренебрежимо малой при достаточно больших деформациях сжатия.

Осредненные напряжения, связанные с растяжением-сжатием волокон, будут имеют вид

$$\sigma_{11}^{(k)} = c_k^2\sigma^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = c_k s_k \sigma^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = s_k^2\sigma^{(k)}.$$

Введём новую модель волокна, согласно которой осредненные напряжения в направлении θ_k для системы волокон определяются формулами

$$\sigma^{(k)} = \begin{cases} E_k\delta_k\varepsilon^{(k)}, & \varepsilon^{(k)} \ge -\varepsilon_0, \\ 0, & \varepsilon^{(k)} < -\varepsilon_0. \end{cases}$$

Деформации в направлении волокон линейно зависят от z

$$\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_m + \kappa z, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_m = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2, \qquad \kappa = c_1\kappa_1 + c_2\kappa_2. \quad (10)$$

Здесь ε_m — деформация растяжения-сжатия срединнной поверхности в направлении θ. Пусть $\varepsilon_b = |\varkappa|h/2$ — максимальное значение второго слагаемого в выражении для $\varepsilon^{(k)}$ из (10), соответствующего деформациям изгиба.

Возможны следующие три случая:

1. Если $\varepsilon_m \ge \varepsilon_b - \varepsilon_0$, то волокна системы растянуты при всех значениях z, а уравнения состояния имеют вид (1), (2) с коэффициентами в них, вычисляемыми по формулам (3), (4).

2. Если $\varepsilon_m \le -\varepsilon_b - \varepsilon_0$, то волокна не сопротивляются сжатию, и в этом случае выражение для усилий и моментов вычисляются по тем же формулам, что и в предыдущем случае, но без учета влияния нитей, то есть при $k = 0$.

3. В промежуточном случае $|\varepsilon_0+\varepsilon_m| < \varepsilon_b$ волокна сопротивляются сжатию только в части объема оболочки. В этом случае
$$T_i = T_i^{(0)} + \sum T_i^{(k)}, \quad M_i = M_i^{(0)} + \sum M_i^{(k)}, \qquad i = 1, 2, 3,$$
где $T_i^{(0)}$, $M_i^{(0)}$ те же, что и в случае 2, а усилия $T_j^{(k)}$ и моменты $M_j^{(k)}$ зависят и от деформаций растяжения-сжатия ε_j и от деформаций изгиба $\varkappa_j$

Рассмотрим осесимметричную деформацию цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении. На краях оболочки $s = 0$ и $s = L$ зададим граничные условия шарнирного опирания $T_1 = w = M_1 = 0$. Предполагаем, что волокна линейно упругие, сопротивляющиеся как сжимающим, так и растягивающим усилиям. Выражения для деформации растяжения-сжатия ε_m и изгиба ε_b можно записать в виде
$$\varepsilon_m = \frac{\nu\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + k\cos^4\theta} w, \qquad \varepsilon_b = \sqrt{3}\mu^2 \left|\frac{d^2 w}{ds^2}\right| \cos^2\theta \tag{11}$$
Из (11) видно, что знак ε_m зависит от коэффициента при w. Находим
$$\theta^* = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\nu_0}}.$$
Если угол намотки нитей $\theta < \theta^*$, то волокна частично перестают работать только в зоне краевого эффекта, а вдали от края они растянуты по всей толщине оболочки. Если $\theta > \theta^*$, то при таких углах намотки нити частично работают только в зоне краевого эффекта, причем при достаточно больших углах намотки перестают работать и на краю оболочки. На Рис. 6 показана

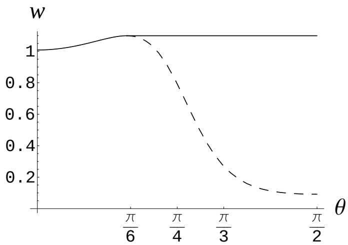

Рис. 6: Зависимость деформации w от угла намотки нитей θ.

зависимость прогиба w от угла намотки нитей θ для середины оболочки $s_0 = L/2$, пунктиром обозначен участок полученный из предположения, что волокна работают на сжатие. При этом считалось, что $h/R = 1/50$, $q_n = 1$, $\nu_0 = 0.3$, $k = 10$. Для таких значений параметров нити перестают частично работать в областях краевого эффекта при $\theta > 0.3658\pi$.

Публикации автора по теме диссертации.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Викторов И.В., Товстик П.Е. Влияние сдвига на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 4. С. 58–67.

2. Викторов И.В., Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических оболочек с винтовой анизотропией. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы механики. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009, С. 54-58.

3. Викторов И.В. Деформация цилиндрической оболочки, армированной нелинейно упругими нитями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 1. С. 73-76.

Другие публикации:

4. Викторов И.В., Товстик П.Е. Осевое сжатие конической оболочки из разномодульного материала // Третьи Поляховские чтения: Тезисы докладов международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург 4 - 6 февраля 2003 г. — СПб.: Издательство НИИХ С.Петербургского университета, 2003. С. 182–183.

5. Викторов И.В. Осевое сжатие конической оболочки из разномодульного материала // Третьи Поляховские чтения: Избранные труды международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург 4 - 6 февраля 2003 г. — СПб.: Издательство НИИХ С.Петербургского университета, 2003. С. 244–249.

6. Викторов И.В. Устойчивость при осевом сжатии цилиндрических оболочек, армированных нитями // Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения". 22 – 25 июня 2004 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2004. – С. 30.

7. Викторов И.В. Локальные формы потери устойчивости конструктивно ортотропных оболочек // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды 2004–2005 гг." под ред. А.Л. Смирнова, Е.Ф. Жигалко. – Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. С. 46–59.

8. Викторов И.В., Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости анизотропных цилиндрических оболочек. // Труды XIII Междунар. Конф. "Современные проблемы механики сплошной среды Ростов-на-Дону, 2009, Том I. С. 57-62