САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Вялов Виктор Андреевич

О граничной регулярности решений системы магнитной гидродинамики

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление,

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации, на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор,
Уральцева Нина Николаевна

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОПОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор,
Серегин Григорий Александрович
(Учреждение РАН, Санкт-Петербургское отделение математического интситута
им. В. А. Стеклова РАН)

доктор физико-математических наук, профессор,
Ивочкина Нина Михайловна
(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

Защита состоится «8» декабря 2011 года в «14» ч. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького в Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «3» ноября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию регулярности решений системы магнитной гидродинамики (МГД). Эта система может быть записана следующим образом

$$\left.\begin{array}{c} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v - \Delta v + \nabla p = \operatorname{rot} H \times H \\ \operatorname{div} v = 0 \end{array}\right\} \quad \text{в } Q_T, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \partial_t H + \operatorname{rot}\operatorname{rot} H = \operatorname{rot}(v \times H) \\ \operatorname{div} H = 0 \end{array}\right\} \quad \text{в } Q_T. \tag{2}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – это ограниченная область с границей класса C^2, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $v : Q_T \to \mathbb{R}^3$ поле скоростей жидкости, $p : Q_T \to \mathbb{R}$ – давление, $H : Q_T \to \mathbb{R}^3$ напряженность магнитного поля. Данная система описывает движение проводящей вязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле. В область приминения магнитной гидродинамики входят очень разнообразные физические объекты – от жидких металлов до космической плазмы. Магнитная проницаемость сред, которые рассматриваются в данных задачах, мало отличается от единицы. Система уравнений (1) (2) получается из систем Навье-Стокса и Максвелла в предположении, что ток смещения мал и им можно пренебречь (см. [11]).

Сразу же отметим, что данная система является переопределенной, в ней на 7 неизвестных (по три компоненты у v и H и давление) приходится 8 уравнений. Поэтому ее разрешимость возможна только для весьма специфического класса граничных условий. В нашей работе рассматривается случай, когда течение жидкости происходит в области, ограниченной идеальным проводником. Это дает следующие краевые условия:

$$v|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$H_\nu|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad (\operatorname{rot} H)_\tau|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \tag{4}$$

В частном случае при $H \equiv 0$ система (1) (2) превращается в систему Навье-Стокса, которая описывает движение вязкой ньютоновской жидкости. На сегодняшний день проблема гладкости слабых решений трехмерной системы Навье-Стокса является одной из фундаментальных проблем современной математической гидродинамики. При этом вопросы о единственности решения и существовании глобального гладкого решения для задачи Коши для этой системы уравнений тесно связаны между собой, до сих пор остаются открытыми и входят в число millenium problems.

Важным шагом в изучении свойтсв решений системы Навье-Стокса стала идея "локализации решения в точке x". точку $(x_0, t_0) \in Q_T$ мы будем называть регулярной, если слабое решение уравнения гладкое в окрестности этой точки. Исследования критериев локальной регулярности решений, а также свойтств множества сингулярных точек были начаты В. Шеффером (см., например, [5]) и в дальнейшем развиты Л. Каффарелли, Р.-В. Коном и Л. Ниренбергом в [1]. При этом можно выделить два типа маштабно-инвариантных функционалов, в терминах которых можно получать достаточные условия регулярности: нормы в пространстве Морри и нормы в анизотропных пространствах Лебега. При этом проблема регулярности решений в случае только конечности маштабно-инвариантных энергетических норм на сегодняшний день полностью открыта.

Отдельный интерес представляют критерии регулярности для системы Навье-Стокса вблизи границы. Подобные исследования требуют гораздо более глубокого и детального (по сравнению с внутренним случаем) изучения свойств решений линеаризованной системы. Эти исследования были проведены В. А. Солонниковым, Г. А. Серегиным и Т. Н. Шилкиным в работах [6] и [8], где были доказаны граничные аналоги критериев Каффарели-Кона-Ниренберга. В дальнейшем эти результаты были развиты А. С. Михайловым в [12].

Для системы магнитной гидродинамики можно развить теорию регулярности, обобщающую уже известные результаты для системы Навье-Стокса. При этом остается вопрос о возможности заменить условия малости маштабноинвариантных функционалов условиями ограниченности. В силу того, что при $H \equiv 0$ система (1) (2) превращается в систему уравнений Навье-Стокса, то, скорее всего, не стоит ожидать ослабления условий на поле скоростей v. При этом у нас возникает промежуточный случай: условия малости накладываются на поле скоростей v, а на магнитную компоненту H накладываются только условия ограниченности. Подобные результаты были получены в работе [2] Ч. Хе и З. Ксином. Их подход позволил получить целую серию критериев регулярности решений системы (1) (2). Однако вопрос о граничной регулярности решений системы (1) (2) до сих пор оставался полностью открытым.

Цель работы.

1. Исследование гладкости решений системы уравнений Навье-Стокса, возмущенной внешней силой электромагнитного происхождения, норма которой в соответствующем маштабно-инвариантном пространстве Морри не предполагается изначально малой.
2. Исследование критериев регулярности для подходящих слабых решений системы (1) (2) вблизи границы.
3. Получение оценки на хаусдорфову параболическую размерность множества сингулярных точек системы (1) (2), принадлежащих границе.
4. Обобщения результатов работ [7] и [12] для системы (1) (2) на внутренний случай и случай принадлежности точки плоскому участку границы.

Методы исследования.

В диссертационной работе используются самые различные методы современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, энергетические оценки, коэрцитивные оценки для линейных задач, различные критерии гладкости функций в терминах пространств Морри и Кампанато, метод масштабных преобразований (“blow-up procedure”), итерационная техника и многое другое.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Доказана частичная регулярность подходящих слабых решений уравнений магнитной гидродинамики вблизи плоского участка границы. А именно, установлено, что одномерная параболическая хаусдорфова мера пересечения множества сингулярных точек (в окрестности которых решение не является непрерывным по Гельдеру) с плоским участком границы равна нулю. Этот результат является оптимальным в том смысле, что он аналогичен наилучшему из известных на сегодняшний день результатов для уравнений Навье-Стокса (установленным Каффарелли, Коном и Ниренбергом во внутреннем случае и Г. А. Серегиным в случае плоской границы).

- Установлен ряд достаточных условий локальной граничной регулярности подходящих слабых решений уравнений магнитной гидродинамики. Типичным таким условием является требование малости какого-либо масштабно-инвариантного энергетического функционала для поля скоростей жидкости при условии конечности аналогичного функционала для магнитного поля. Эти результаты являются оптимальными в том смысле, что они аналогичны известным на сегодняшний день условиям регулярности, установленным для уравнений магнитной гидродинамики в работе [2] для внутренних точек области.
- Проведено исследование гладкости решений системы уравнений Навье-Стокса, возмущенной внешней силой электромагнитного происхождения, норма которой в соответствующем маштабно-инвариантном пространстве Морри не предполагается изначально малой.
- "Отшлифована" техника доказательства достаточных условий регулярности решений системы магнитной гидродинамики, что позволило установить ряд условий, являющихся новыми даже во внутреннем случае (в частности, условие "равномерной малости" энергетических функционалов удалось заменить условием "равномерная ограниченность + малость при некотором радиусе")

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложениях.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на семинаре им. В. И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова РАН (2010) и на международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” посвященной 110-ой годовщине со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2011).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора (одна из них в соавторстве). Работы [1*] и [2*] опубликованs в журналах из перечня ВАК. Работа [3*] опубликована в журнале, удовлетворяющем достаточному условию для включения в перечень ВАК (переводная версия этого журнала “Journal of Mathematical Sciences” входит в системы цитирования Springer и Scopus) в соответствии с решением Президиума ВАК № 9/11 от 07.03.2008. В работе [2*] соавтору Т. Н. Шилкину принадлежит постановка задачи и общее руководство работой, а диссертанту – доказательство основных теорем.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, списка обозначений, трех глав, включающих 12 параграфов, и списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 90 страниц.

Содержание работы

Диссертация посвящена исследованиям регулярности решений системы (1) (2) в окрестности точки, принадлежащей плоскому учатску границы. В качестве краевых условий беруться условия течения жидкости в области, ограниченной идеальным проводником (3) (4). По аналогии с работами [4], [8] мы будем исследовать регулярность “подходящих слабых решений”. Для уравнений Навье-Стокса данное понятие было, по-сути, введено В. Шеффером (см. напр. [5]).

Перейдем к детальному описанию содержания диссертации.

Глава 1 посвящена доказательству теоремы существования подходящих слабых решений, и получению различных вспомогательных оценок.

В §1.1 даются определения подходящих слабых решений и доказывается теорема I об их существовании.

Теорема I. *Пусть* $v_0, H_0 \in J_2(\Omega)$. *Существует по крайней мере одна тройка функций* (v, p, H) *такая, что*

$$v, H \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$$p \in L_{\frac{3}{2}}(\Omega \times (\gamma, T)) \quad \forall \gamma \in (0, T)$$

v, p, H *решают систему* (1) (2) *в смысле распределений, удовлетворяют локальному энергетическому неравенство внутри области, являются подходящем слабым решением в окрестности любой граничной точки. Дополнительно* v, H *являются слабым решением системы.*

§ 1.2 посвящен доказательству вспомогательных оценок для подходящих слабых решений. В дальнейшем эти оценки используются для доказательства базовых критериев ε-регулярности.

В § 1.3 исследуется система, получаемая при линеаризации задачи (1) (2). Для решений этой системы доказывается теорема II об их принадлежности пространству Гельдера. Заметим, что в состав линеаризованной системы входит система уравнений Стокса (5), которая не обладает свойством гипоэллиптичности. Для этой системы локально можно доказать улучшение гладкости решения только по пространственной переменной x. Поэтому мы будем использовать коэрцитивные оценки в шкале анизатропных пространств Соболева, улучшая суммируемость только по пространственным переменным, сохраняя один и тот же показатель суммируемости по времени. В результате нам удастся получить максимальный результат, который можно получить для подобной системы вблизи границы (см. [9]), – это принадлежность решения пространству Гельдера.

Теорема II. *Для любого* $M > 0$ *существует константа* $c(M) > 0$ *такая, что для любого* $a \in \mathbb{R}^3$ *вида* $a = (a_1, a_2, 0)^T$ *удовлетворяющего условию* $|a| \leq M$, *и любой* *тройки функций (u,h,q) удовлетворяющих системе линейных уравнений*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + \nabla q &= \operatorname{rot} h \times a \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \partial_t h - \Delta h &= \operatorname{rot}(u \times a) \\ \operatorname{div} h &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} u|_{x_3=0} = 0, \\ h_3|_{x_3=0} = 0, \qquad \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} \;=\; 0, \qquad \alpha = 1,2, \end{gathered} \tag{7}$$

выполнены следующие оценки:

$$\begin{gathered} \|u\|_{C^{\frac13,\frac16}(Q^+(\frac12))} + \|h\|_{C^{\frac13,\frac16}(Q^+(\frac12))} \;\le \\ \le\; c(M)\Big(\|u\|_{L_3(Q^+)} + \|h-b\|_{L_3(Q^+)} + \|q-c\|_{L_{3/2}(Q^+)}\Big) \end{gathered}$$

Здесь $b \in \mathbb{R}^3$ произвольный вектор вида $b=(b_1,b_2,0)^T$, и $c\in\mathbb{R}$ произвольное число.

В § 1.4 рассматривается уравнение (2), как уравнение теплопроводности. В результате получаются оценки для магнитной составляющей, помогающие в дальнейшем обобщить результаты работы [2] на граничный случай.

В главе 2 описанная выше техника применяется для получения критериев регулярности в окрестности внутренней точки.

В § 2.1 на основе теоремы II и результатов §1.2 доказывается основной критерий ε-регулярности внутри области.

Теорема III. *Существует абсолютная константа $\varepsilon_0>0$ такая, что для любой тройки v,p,H подходящего слабого решения МГД в $Q(z_0,R_0)$, если для некоторого $R\le R_0$*

$$\frac{1}{R^2}\int\limits_{Q(z_0,R)} \Big(|v|^3+|H|^3+|p|^{\frac32}\Big)\,dz < \varepsilon_0, \tag{8}$$

то v и H непрерывны по Гельдеру в $\overline{Q}(z_0,\frac{R}{2})$.

Данная теорема была доказана С. А. Мищенко в его дипломной работе, но, к сожалению, не была опубликована.

В § 2.2 доказываются различные оценки для энергетических функционалов (аналог для системы Навье-Стокса см. [13]), позволяющие получить ограниченность для всех основных норм. Доказательтво этих оценок основывается на следующей идее. Пусть есть функция $\Phi : (0,1) \to (0,+\infty)$, для которой выполнена оценка $\Phi(\theta R) \le \theta^{-\beta} M + c\theta^{\alpha}\Phi(R)$, для произвольного $0 < \theta < 1/2$ и некоторых констант c и M. Тогда $\Phi(R) \le c(M + R^{\alpha}\Phi(1))$. В нашем случае в качестве функции Φ будет выступать некоторая комбинация энергетических функционалов, отвечающих нормам решений в различных пространствах Лебега и Соболева.

Параграфы 2.3 и 2.4 посвящены доказательству основных результатов диссертации, о регулярности решений системы магнитной гидродинамики внутри области. В частности доказывается обобщение известного критерия Кафарели-Кона-Ниринберга (см. [1]) на случай этой системы.

Теорема IV. *Для любого $K > 0$ существует константа $\varepsilon_0(K) > 0$ обладающая следующим свойством: Пусть (v, H, p) – подходящее слабое решение системы МГД в Q_T. Если*

$$\limsup_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla H|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \; < \; K \tag{9}$$

и

$$\limsup_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla v|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \; < \; \varepsilon_0, \tag{10}$$

то существует $\rho_* > 0$ такое, что функции v и H непрерывны по Гельдеру на замыкании множества $Q(z_0, \rho_*)$.

Отметим отличия последних двух теорем. Теорема III является базовым критерием ε-регулярности. Главной ее особенностью является то, что для непрерывности по Гельдеру достаточно выполнения условия (8) при одном фиксированном R. В теореме IV условия ограниченности и малости должны выполняться для всех цилиндров достаточно малого радиуса, и также используются более сильные нормы. С другой стороны в условия теоремы IV отсутствуют какие-либо ограничения на давление. В условиях (9) (10) радиус цилиндра входит с показателем 1, что позволяет получить значительно лучшую оценку на Хаусдорфову размерность множества сингулярных точек. Этот момент будет особенно актуален при получении критериев регулярности вблизи границы.

Для решений системы Навье-Стокса на сегодняшний день остается открытым вопрос о справедливости теоремы Каффарелли-Кона-Ниринберга в случае замены условий малости на условия ограниченности. Поэтому условие (9) подчеркивает подчиненную роль уравнения (2), чего нельзя увидеть из теоремы III.

Во внутреннем случае можно получить достаточно большое количество утверждений, которая является обобщением результатов работы [7] (см. также [12]). В нашей работе мы для краткости остановимся только на одном из них. Следующая теорема в каком-то смысле является "интерполяцией"предыдущих двух критериев: на супремум накладывается условие ограниченности, а малости достаточно только при фиксированном радиусе.

Теорема V. *Для любого $K > 0$ существует константа $\varepsilon_1(K) > 0$ обладающая следующим свойством: Пусть (v, H, p) – подходящее слабое решение системы МГД в Q_T. Если*

$$\limsup_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q(z_0,r)} |v|^3 \, dxdt \Big)^{1/3} + \Big(\frac{1}{r^3} \int\limits_{Q(z_0,r)} |H|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \ < \ K \tag{11}$$

и выполнено одно из трех условий

$$\begin{gathered} \liminf_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla v|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} < \ \varepsilon_1, \\ \liminf_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \sup_{-r^2<t<0} \int\limits_{B^+(x_0,r)} |v|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \ < \ \varepsilon_1, \\ \liminf_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q(z_0,r)} |v|^3 \, dxdt \Big)^{1/3} < \ \varepsilon_1, \end{gathered} \tag{12}$$

то существует $\rho_* > 0$ такое, что функции v и H непрерывны по Гельдеру на замыкании множества $Q(z_0, \rho_*)$.

Одним из наиболее важных следствий теорем IV и V является возможность оценить параболическую Хаусдорфову размерность множества сингулярных точек, а также возможность доказать регулярность решений в случае наличия дополнительных условий или симметрий. Так, например, легко получить, что решения, не зависящие от одной из координат, будут гладкими. Также гладким будет осесимметричное решение, за исключением, может быть, оси симметрии.

В § 2.3 доказыватеся основная теорема, посвященная критериям регулярности внутри области. Из этой теоремы и оценок, полученных в § 2.2, легко выводится теорема V за исключением случая, когда условия малости накладываются на ∇v.

Доказательству теоремы IV и оставшегося случая теоремы V посвящен §2.4. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что во внутреннем случае доказательство этих утверждений требует специального подхода.

Глава 3 посвящена исследованию критериев локальной регулярности для системы (1) (2) вблизи плоского участка границы. Результаты этой главы находятся в прямом соответствии с результатами главы 2. Тем самым теория граничной регулярности, развитая в работах автора, доведена до того же состояния, что и теория регулярности внутри области.

В § 3.1 доказываестя основной критерий ε-регулярности вблизи границы.

Теорема VI. *Существует абсолютная константа $\varepsilon_* > 0$ обладающая следующими свойствами. Пусть есть тройка функций (v, H, p) – подходящее слабое решение системы МГД в Q_T и точка $z_0 = (x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ такая, что x_0 принадлежит плоскому участку $\partial\Omega$. Если существует $r_0 > 0$, для которой выплнено $Q^+(z_0, r_0) \subset Q_T$ и*

$$\frac{1}{r_0^2} \int\limits_{Q^+(z_0,r_0)} \Big(\, |v|^3 + |H|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} \, \Big) dxdt \; < \; \varepsilon_*,$$

то функции v и H непрерывны по Гельдеру в замыкании множества $Q^+(z_0, \frac{r_0}{2})$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующего критерия во внутреннем случае. Отличие состоит в оценке давления, так как в этот раз не удастся использовать теорему о среднем для гармонической составляющей. Поэтому мы пользуемся идеей, предложенной Г. А Серегиным для системы уравнений

Навье-Стокса, и будем оценивать давление с помощью коэрцитивных оценок для системы Стокса.

Здесь стоит еще раз сделать важное замечание. Во внутреннем случае теорема III уже дает оценку на параболическую хаусдорфову размерноть множества сингулярных точек: из нее следует, что она не превосходит 2. При этом такая оценка в граничном случае оказывается бессодержательной, так как сама граница также имеет размерность 2, а значит необходима теорема VIII или подходящий ее аналог.

В § 3.2 доказываются различные оценки для энергетических функционалов (аналог для системы Навье-Стокса см. [13]), вблизи границы кроме случая ограниченности L_2-нормы ∇v и ∇H. При исследовании регулярности решений вблизи границы, оценки для этого случая требуют отдельного подхода, однако они крайни важны для оценки параболической Хаусдорфовой размерности множества сингулярных точек. Поэтому доказательство соответствующего неравенства вынесено в отдельный параграф.

В § 3.3 доказыватеся основная теорема, посвященная критериям регулярности внутри области. Из этой теоремы и оценок, полученных в параграфах 3.2 и 3.4, легко выводится следующая теорема.

Теорема VII. *Для любого $K>0$ существует константа $\varepsilon_1(K)>0$ обладающая следующим свойством: Пусть (v,H,p) – подходящее слабое решение системы МГД вблизи границы в Q_T и пусть $z_0=(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ такая, что точка x_0 принадлежит плоскому участку $\partial\Omega$. Если*

$$\limsup_{r\to 0}\Big(\frac{1}{r^2}\int\limits_{Q(z_0,r)}|v|^3\,dxdt\Big)^{1/3}+\Big(\frac{1}{r^3}\int\limits_{Q(z_0,r)}|H|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\;<\;K \tag{13}$$

и выполнено одно из трех условий

$$\begin{gathered}\liminf_{r\to 0}\Big(\frac{1}{r}\int\limits_{Q(z_0,r)}|\nabla v|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\;<\;\varepsilon_1,\\ \liminf_{r\to 0}\Big(\frac{1}{r}\sup_{-r^2<t<0}\int\limits_{B^+(x_0,r)}|v|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\;<\;\varepsilon_1,\\ \liminf_{r\to 0}\Big(\frac{1}{r^2}\int\limits_{Q(z_0,r)}|v|^3\,dxdt\Big)^{1/3}\;<\;\varepsilon_1,\end{gathered} \tag{14}$$

то существует $\rho_* > 0$ такое, что функции v и H непрерывны по Гельдеру на замыкании множества $Q^+(z_0, \rho_*)$.

В § 3.4 проводятся более тонкие исследования уравнения (2), позволяющие в дальнейшем доказать теорему VIII, являющуюся аналогом критерия Каффарелли-Кона-Ниринберга.

Теорема VIII. *Для любого $K > 0$ существует константа $\varepsilon_0(K) > 0$ обладающая следующим свойством: Пусть (v, H, p) – подходящее слабое решение системы МГД вблизи границы в Q_T и пусть $z_0 = (x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ такая, что точка x_0 принадлежит плоскому участку $\partial\Omega$. Если*

$$\limsup_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla H|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \; < \; K \tag{15}$$

и

$$\limsup_{r\to 0} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla v|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \; < \; \varepsilon_0, \tag{16}$$

то существует $\rho_* > 0$ такое, что функции v и H непрерывны по Гельдеру на замыкании множества $Q^+(z_0, \rho_*)$.

И, как уже было отмечено выше, теорема VIII позволяет получить оценку на параболическую хаусдорфову размерность множества сингулярнных точек на плоском участке границе.

Теорема IX. *Пусть (v, H, p) – подходящее слабое решение системы МГД вблизи границы в Q_T и обозначим за Γ плоский участок $\partial\Omega$. Тогда существует замкнутое множество $\Sigma \subset \Gamma$ такое, что для любого $z_0 \in (\Gamma \setminus \Sigma) \times (0, T]$ функции (v, H) непрерывны по гельдеру в z_0, и*

$$\mathcal{P}^1(\Sigma) \; = \; 0,$$

где $\mathcal{P}^1(\Sigma)$ – это одномерная параболическая Хаусдорфова мера на Σ.

Список литературы

[1] L. Caffarelli, R. V. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*// Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771-831.

[2] Ch. He, Zh. Xin. *Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations* // Journal of Functional Analysis **227** (2005) 113 – 152

[3] E. Hopf. *Ober die Anfangswertaufgabe fur die hydrodynamishe Grundgleichungen.* // Math. Nachrichten, 4 (1950/51), 213.231.

[4] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimesional Navier-Stokes equations*// J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), 356-387.

[5] V. Scheffer, *Hausdorff measure and Navier-Stokes equations*// Commun. Math. Phys. **55** (1977), 97-112.

[6] G.A. Seregin, *Local regularity of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations near the boundary*// Journal of Mathematical Fluid Mechanics **4** (2002), no.1, 1-29.

[7] G. A. Seregin *Local regularity for suitible weak solutions to the Navier-Stokes equations*// Uspekhi Mat. Nauk **62**:3 149–168

[8] G.A. Seregin, T.N. Shilkin, V.A. Solonnikov, *Boundary patial regularity for the Navier-Stokes equations*// Zap. Nauchn. Semin. POMI **310** (2004), 158-190.

[9] G. Seregin, V. Sverak *On a bounded shear flow in half-space*// Zap. Nauchn. Semin. POMI **385** (2010) 200-205.

[10] Л. Искауриаза, Г. А. Серегин, В. Шверак. *$L_{3,\infty}$-решения уравнений Навье-Стокса и обратная единственность*// Успехи мат. наук **58** (2003), no. 2, 3-44.

[11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоритическая физика. Том VIII.*// Москва "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1982 г.

[12] А. С. Михайлов, *Локальная регулярность подходящих слабых решений системы Навье–Стокса вблизи границы*// Zap. Nauchn. Semin. POMI **370** (2009), 73-93.

[13] Г. А. Серёгин, *Оценки подходящих слабых решений в пространствах Морри с критическим показателем*// Записки науч. сем. ПОМИ **336** (2006), 199–210;

[14] В. А. Солонников. *О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики* // Труды МИАН, 1960, **59**, с. 174—187.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

[1*] В. А. Вялов. *О локальной гладкости слабых решений уравнений магнитной гидродинамики*// Зап. Науч. Семинаров ПОМИ **370** (2009), 5-21.

[2*] В. А. Вялов, Т. Н. Шилкин. *О граничной регулярности слабых решений системы уравнений магнитной гидродинамики.*// Зап. Науч. Семинаров ПОМИ **385** (2010), 18-53.

Другие публикации

[3*] В. А. Вялов. *Частичная регулярность решений уравнений магнитной гидродинамики*// Проблемы мат. анализа **36** (2007), 3-13.

[4*] В. А. Вялов. *Локальная регулярность решений системы магнитной гидродинамики вблизи плоского участка границы*// Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 110-ой годовщине со дня рождения И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ” (2011), 175.