Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВ Владимир Андреевич

Существование решений системы дифференциальных уравнений, близких к приближенному решению

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: член-корреспондент Российской академии
наук, доктор физико-математических наук,
профессор *Плисс Виктор Александрович.*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор *Розов Николай Христович*
(Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова);

кандидат физико-математических наук, доцент
Иванов Борис Филиппович (Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров).

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ".

Защита состоится "8" декабря 2011 г. в 13 час. 00 мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28. Математико-механический факультет СПбГУ. Ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49,
доктор физико-математических наук А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

С конца 60-х – начала 70-х годов прошлого столетия предпринимаются многочисленные попытки исследования качественного поведения периодических и автономных систем с помощью вычислительной техники. Идея такого рода исследований состоит в следующем: строятся приближенные решения (одно или несколько) на весьма длинном промежутке изменения аргумента. Эти приближенные решения задают некоторое множество точек в фазовом пространстве. Есть весьма веские основания надеяться, что эти построенные множества содержат в себе аттракторы и неблуждающее множество изначальной системы. Часто подобными методами удается установить наличие или отсутствие периодических решений, гомоклинических точек и контуров. Все это позволяет получить важную информацию о качественном характере поведения решений заданной системы дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что описанный метод исследования может быть использован только в случае, когда в окрестности приближенного решения системы дифференциальных уравнений существует истинное решение этой системы, в противном случае такой метод исследования не позволяет получить никаких новых данных о качественном поведении решений рассматриваемой системы. В связи с этим встает вопрос о существовании истинного решения в окрестности приближенного.

Диссертация посвящена изучению проблемы существования истинного решения в окрестности приближенного и получению новых условий, при которых данному приближенному решению системы дифференциальных уравнений соответствует истинное решение, располагающееся в малой окрестности приближенного решения.

Цель работы.

Формулировка условий существования истинного решения системы дифференциальных уравнений в окрестности приближенного решения, вычисленного на длинном интервале изменения аргумента.

Методы исследований.

В работе применяются современные методы исследования структурно устойчивых систем дифференциальных уравнений. Однако, эти методы существенным образом видоизменяются в соответствии с поставленной задачей; предлагается метод построения приближенных решений линейных систем дифференциальных уравнений на длинных интервалах времени.

Основные результаты работы.

Сформулированы условия существования истинного решения системы дифференциальных уравнений в окрестности приближенного.

Построены методы эффективной проверки указанных условий.

Научная новизна.

Сформулированы новые условия существования истинного решения системы дифференциальных уравнений в окрестности приближенного, и представлены новые методы эффективной проверки этих условий.

Теоретическая и практическая ценность.

Теоретическая и практическая ценность работы состоит в том, что в ряде случаев (при выполнении условий существования истинного решения системы дифференциальных уравнений в окрестности приближенного) можно делать конкретные выводы о качественном характере поведения решения заданной системы дифференциальных уравнений на основе анализа приближенных решений этой системы, построенных с помощью вычислительной техники.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на заседаниях Городского семинара по дифференциальным уравнениям (г. Санкт-Петербург) и на XII конференции молодых ученых "Навигация и управление движением проводимой ОАО Концерн ЦНИИ "Электроприбор"(г. Санкт-Петербург).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [3-6]. Работы [3], [4] опубликованы в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, семи глав, списка литературы, содержащего 25 наименований. Объем диссертации — 88 страниц.

Содержание диссертации

В первой главе диссертации рассматривается система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ — n-мерные векторы; относительно вектор-функции $\mathbf{X}$ будем предполагать, что она ограничена, непрерывна при $t \in (-\infty, \infty)$, при $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и имеет непрерывную и ограниченную матрицу Якоби $\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$. Далее в этой главе дается точная формулировка проблемы, рассматриваемой в диссертации. Приводится обычное определение δ-решения системы дифференциальных уравнений, и приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие проблему.

Во второй главе рассматриваются линейные системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, а $\mathbf{P}(t)$ — ограниченная кусочно-непрерывная на промежутке J матрица размера $n \times n$. Обозначим через $\mathbf{\Phi}(t)$ фундаментальную матрицу решений системы (2). ($J = \langle \theta, \theta' \rangle$, где θ может быть равным $-\infty$, а θ' может быть равным ∞.) Вводится понятие $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболичности системы (2)

Определение 2.1. Будем говорить, что система (2) $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболична на промежутке J, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $a_1, a_2 > 1$ и линейные пространства $U^s(t)$ и $U^u(t)$, определенные на J и такие, что $\dim U^s(t) = k$, $\dim U^u(t) = n - k$, для всех $t \in J$, $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)U^i(\tau) = U^i(t)$, $i = s, u$; $t, \tau \in J$, и если $\xi \in U^s(\tau)$, $\tau \in J$, то выполняется неравенство

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \leq a_1|\xi|e^{-\lambda_1(t-\tau)}$$

при $t \geq \tau$; $t, \tau \in J$, а если $\xi \in U^u(\tau)$, то

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \leq a_2|\xi|e^{\lambda_2(t-\tau)}$$

при $t \leq \tau$; $t, \tau \in J$.

Далее в этой главе исследуются некоторые свойства $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболичных систем.

В третьей главе доказывается ключевая теорема диссертации. Рассматривается линейная система (2), заданная на промежутке J. Предполагается, что она удовлетворяет следующим четырем условиям.

Условие I. Существуют числа $t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = t'$ такие, что система (2) $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, a_{1,i}, a_{2,i})$-гиперболична на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., m)$.

Пусть $U_i^s(t)$ и $U_i^u(t)$ — линейные пространства, фигурирующие в определении 2.1 гиперболичности системы (2) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Условие II. Выполняются неравенства $\dim U_i^u(t) > \dim U_{i+1}^u(t)$, $i = 0, 1, ..., m-1$, $m \leq n$. Предполагается, что подпространства $U_i^u(t_{i+1})$ и $U_{i+1}^s(t_{i+1})$ пространства $\mathbf{R}^n$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$ пересекаются трансверсально, причем углы между ними задаются числами α_i $(\alpha_{i+1} = \angle(U_i^u(t_{i+1}), U_{i+1}^s(t_{i+1}))$, $i = 0, 1, ..., m-1)$.

Введем величины ρ_i, $0 \leq i \leq m-1$; $\Delta_i > 0$, $0 \leq i \leq m$, $\Delta_{i+1} \leq 2\Delta_i$, при $0 \leq i \leq m-1$; b_i, $1 \leq i \leq m$; β_i, $1 \leq i \leq m$. Значения этих величин произвольны и определяются рекуррентно из приведенных ниже соотношений и неравенств.

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1} - \frac{\beta_i}{2}, 1 \leq i \leq m-1,$$

где $\beta_1 = \alpha_1$.

$$\rho_i = \frac{2\Delta_i}{\Delta_{i+1} \sin u_i}, 1 \leq i \leq m-1,$$

где u_i — наименьший положительный корень уравнения

$$\sin u = \frac{2\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \sin(\beta_{i+1} - u);$$

при этом $(\beta_{i+1}/2) \leq u_i \leq \beta_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$;

$$\rho_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1 \sin u_0},$$

где u_0 — наименьший положительный корень уравнения

$$\sin u = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \sin(\beta_1 - u);$$

при этом $(\beta_1/2) \leq u_0 \leq \beta_1$.

Условие III. Выполняются неравенства:

$$a_{2,0}(b_1 + \rho_0\Delta_1 + \Delta_0) + \Delta_0 \leq 1;$$

$$\rho_i\Delta_{i+1} + 2\Delta_i \leq b_i, 1 \leq i \leq m-1;$$

$$a_{1,i}(2b_i + (\rho_{i-1}+1)\Delta_i) + \Delta_i +$$
$$+ a_{2,i}\left(\frac{2b_i}{\rho_{i-1}+1} + b_{i+1} + \rho_i\Delta_{i+1} + 2\Delta_i\right) \leq 1,$$

при $1 \leq i \leq m-1$;

$$(a_{1,m}(\rho_{m-1}+1)+1)\Delta_m \leq 1,$$

где значения $a_{i,j}$ — константы гиперболичности.

Условие IV. Разности $t_{i+1} - t_i$ удовлетворяют неравенствам

$$a_{1,i}(\rho_{i-1}+1)e^{-\lambda_{1,i}(t_{i+1}-t_i)} \leq 1,$$

$$a_{1,i}e^{-\lambda_{1,i}(t_{i+1}-t_i)} \leq \sin\frac{\beta_i}{2},$$

$$\frac{1}{a_{2,i}} \sin\frac{\beta_i}{2} e^{\lambda_{2,i}(t_{i+1}-t_i)} - 2a_{1,i}e^{-\lambda_{1,i}(t_{i+1}-t_i)} \geq 1 + \frac{b_{i+1}}{b_i},$$

при $i = 1, ..., m-1$.

По условию I система (2) $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, a_{1,i}, a_{2,i})$-гиперболична на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$, поэтому существуют числа $\kappa_i > 0$ такие, что $\angle(U_i^s(t), U_i^u(t)) \geq \kappa_i$, при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$. Положим

$$\eta_i = \frac{\lambda_{1,i}\lambda_{2,i} \sin \kappa_i}{a_{1,i}\lambda_{2,i} + a_{2,i}\lambda_{1,i}}.$$

Теорема 3.1. *Если выполнены условия I-IV, то при любой кусочно-непрерывной при $t_0 \leq t \leq t'$ вектор-функции $\mathbf{f}(t)$, удовлетворяющей неравенствам*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{t})| < \eta_i \Delta_i,$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$, система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{3}$$

имеет решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(t)| < 1,$$

при $t \in [t_0, t']$.

В главе 4 проводится сравнение результатов работ $[1, 2]$, а именно приведенных в них условий существования ограниченного решения у линейной неоднородной системы, с теоремой 3.1. Показывается, что условия теоремы 3.1 являются существенно менее стеснительными, чем условия, приведенные в $[1, 2]$.

В пятой главе снова рассматривается исходная система (1). Она приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y}) - \dot{\psi}(t). \tag{4}$$

Вектор $\mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y})$ представим в виде

$$\mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y}) = \mathbf{X}(t, \psi(t)) +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{X}(t,\psi(t))}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{y}+\mathbf{F}(t,\mathbf{y}),$$

где вектор-функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ равномерно непрерывно дифференцируема по вектору $\mathbf{y}$ и $\mathbf{F}(t,0) = 0$, $\partial\mathbf{F}(t,0)/\partial\mathbf{y} = 0$, и положим $\mathbf{P}(t) = \partial\mathbf{X}(t,\psi(t))/\partial\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}(t,\psi(t)) - \dot{\psi}(t) = \mathbf{f}(t)$. Тогда система (4) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{F}(t,\mathbf{y}) + \mathbf{f}(t), \tag{5}$$

где вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ непрерывна при $t_0 \le t \le t'$ и удовлетворяет неравенствам $|\mathbf{f}(t)| < \delta_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,...,m$.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y}. \tag{6}$$

Предположим, что система (6) удовлетворяет условиям теоремы 3.1 на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$ с константами η_i и Δ_i, $i = 0,1,...,m$, введенными при формулировке этой теоремы. Зададим произвольные положительные числа ε_i, $i = 0,1,...,m$, при этом будем считать ε_i столь малыми, чтобы в шарах $\Big\{\mathbf{y} : |\mathbf{y}| \le \varepsilon_i\Big\}$ вектор-функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ удовлетворяла условию Липшица:

$$|\mathbf{F}(t,\mathbf{y}') - \mathbf{F}(t,\mathbf{y}'')| \le l_i|\mathbf{y}' - \mathbf{y}'|, 0 < l_i < \eta_i\Delta_i,$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in B_i$, $i = 0,1,...,m$.

Теорема 5.1. *Если $\delta_i < (\eta_i\Delta_i - l_i)\varepsilon_i$, $i = 0,1,...,m$, то система (5) имеет решение $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$, удовлетворяющее неравенству $|\mathbf{u}(t)| < \varepsilon_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,...,m$.*

В главах 6 и 7 даются эффективные методы проверки условий теоремы 3.1 с использованием методов приближенных вычислений.

Список литературы

[1] *Плисс В. А.* Существование решения дифференциального уравнения, близкого к приближенному решению // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 897–906.

[2] *V. A. Pliss.* The existence of a true solution of a differential equation in the neighbourhood of an approximate solution // Journal of Differential Equations. 2005, № 208. P. 64–85.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах и изданиях:

[3] *Васильев В. А.* Условия существования решения системы дифференциальных уравнений, близкого к приближенному решению // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 310-321.

[4] *Васильев В. А.* Об одном способе построения приближенных решений линейных систем на длинных интервалах времени // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. Математика, механика, астрономия. 2011. № 3. С. 3 – 6.

Другие публикации:

[5] *Васильев В. А.* Анализ линейной системы с помощью приближенных вычислений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. № 3. С. 138 – 157.

[6] *V. A. Vasiliev* On One Method of Constructing Approximate Solutions to Linear Systems on Long Time Intervals // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2011. Vol. 44, № 3. P. 167 – 170.