САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Усевич Константин Дмитриевич

АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2011

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Голяндина Нина Эдуардовна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Егоров Владимир Алексеевич (Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”)
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Васильев Николай Николаевич (Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН)
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Защита состоится “____” ____________ 2011г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан “____” ____________ 201_г.

Ученый секретарь диссертационного совета — *Даугавет И.К.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы Во многих естественных науках сложилось представление о возможности описания природных процессов в виде суммы тренда (медленной нерегулярной составляющей), периодических компонент (возможно, модулированных) и шума (обычно описываемого случайным процессом). В анализе временных рядов одной из основных задач является разложение наблюдаемого временного ряда на исходные составляющие. Для различных частных случаев этой задачи разработаны мощные теории, такие как теория аппроксимации и теория рядов Фурье. В общей постановке задачи, которая характерна для анализа реальных данных, при отсутствии априорной информации, применение этих методов наталкивается на ряд трудностей.

В течение 70х–80х гг. независимо в США, Великобритании и СССР получили распространение идеи о вложении временного ряда в многомерное пространство с последующим сингулярным разложением полученной ганкелевой матрицы. Кульминацией этих идей стал метод *анализа сингулярного спектра* (АСС, Singular Spectrum Analysis, SSA, в отечественной литературе также известный под названием "Гусеница") [6], который позволяет решать задачи выделения компонент временного ряда различной структуры и, кроме того, решать для выделенных компонент задачи описания их структуры, прогнозирования, оценки параметров, обнаружения разладки в структуре.

Существует большое количество прикладных научных исследований, использующих метод АСС, в таких областях как экономика, экспериментальная биология, медицина, науки о земле, и т. д. Также существует множество методов оценки параметров комплексных экспоненциальных сигналов (ESPRIT, MUSIC, и т.д.), основанных на этапе разложения метода АСС. Вариант метода АСС для пространственных данных (двумерных массивов) служит основой для класса методов классификации и сегментации текстурных изображений. Также существуют методы оценки параметров двумерных комплексных экспоненциальных сигналов, основанные на разложении в методе АСС.

В теории методов типа АСС основными являются вопросы о нахождении условий, при которых исходные компоненты *разделимы* с помощью метода АСС, и об описании структуры, которой обладают разделимые компоненты. Несмотря на большое количество приложений, данные вопросы практически не исследованы для двумерного варианта метода АСС.

К недостаткам методов, основанных на двумерном варианте АСС, традиционно относят их вычислительную сложность. В связи с отсутствием эффективных вычислительных алгоритмов для разложения в двумерном методе АСС, обычно используются лишь небольшие размеры окна. В частности поэтому практически не исследован вопрос выбора параметров метода (размеров окна) для лучшей разделимости массивов.

Основными целями работы являются комплексное исследование проблемы разделимости временных и пространственных данных в методе АСС, исследование свойств моделей данных конечного ранга и развитие методов обработки данных на основе метода АСС. Для достижения целей были поставлены и решены следующие задачи:

1. Систематизация и уточнение известных (для рядов) и получение новых (для массивов) результатов о структуре данных конечного ранга, определяемой линейными рекуррентными соотношениями.

2. Нахождение условий точной разделимости рядов и массивов в методе АСС.

3. Определение влияния параметров двумерного метода АСС на разделимость детерминистической и шумовой составляющих с помощью математического моделирования; разработка рекомендаций по выбору параметров метода.

4. Разработка и эффективная реализация методов обработки двумерных массивов, основанных на методе АСС, исследование свойств методов с помощью численных экспериментов.

Методы исследования. В работе используются методы алгебраической теории ганкелевых матриц; теории ортогональных многочленов; теории k-линейных рекуррентных последовательностей; теории идеалов в кольцах многочленов и их базисов Гребнера; методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Для численного исследования свойств алгоритмов обработки данных, основанных на методе АСС, применяются методы статистического моделирования. Для реализации алгоритмов используются среды программирования Visual C++, R.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Для временных рядов систематизированы и уточнены соотношения между рангом рядов и свойствами линейных рекуррентных формул (ЛРФ), которым они удовлетворяют; на основе теории ортогональных многочленов систематизированы свойства побочных корней ЛРФ. [A2].

2. Разработан критерий слабой полуразделимости рядов, позволяющий перечислить все возможные случаи полуразделимости для $L < K$ и все случаи разделимости рядов [A2]. Получено необходимое и достаточное условие полуразделимости массивов конечного ранга.

3. Получено распределение ранга в подмножестве множества ганкелевых матриц над конечным полем, необходимое для нахождения вероятности случайной классификации с инверсией в модификации метода АСС над конечным полем [A7].

4. Описаны классы бесконечных массивов с точки зрения ранга их разложения в методе АСС [A4, A6]. Описан класс функций, имеющих конечный ранг в непрерывном варианте разложения метода АСС [A1].

5. Получена новая оценка ранга (линейной сложности) полиномиального массива по набору коэффициентов его биномиального представления [A4, A8]. Расширена оценка множества допустимых размеров окна со случая сумм комплексных экспонент на общий случай массивов конечного ранга.

6. С помощью статистического моделирования для задачи восстановления зашумленного сигнала произведено сравнение двумерного метода АСС с другими методами обработки двумерных массивов, основанными на сингулярном разложении [A4]. На основе экспериментов выработаны рекомендации по выбору параметров в задаче восстановления, в том числе и для восстановления различных областей массива.

7. Разработаны и реализованы эффективные методы вычисления разложения в методе АСС. Разработаны и реализованы алгоритмы для решения задач фильтрации цифровых моделей рельефа [A3, A5] и анализа текстурных изображений.

Научная новизна Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость В диссертационной работе был предложен алгебраический подход для решения широкого класса теоретических задач в методе АСС; была продемонстрирована эффективность предложенного подхода. Также в рамках данной работы были разработаны и эффективно реализованы алгоритмы решения различных задач обработки двумерных данных на основе метода АСС. На основе численных экспериментов было показано, что разработанные алгоритмы могут быть успешно использованы для решения данных задач.

Апробация работы Основные результаты обсуждались на семинарах кафедры статистического моделирования математико-механического факультета СПбГУ, семинаре кафедры статистики в School of Mathematics, Cardiff University (Великобритания, февраль 2008, 2009) и докладывались на международных конференциях: «2nd International Conference on Matrix Methods and Operator Equations» (Москва, 23–27 июля 2007 г.), «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08 (Москва, 28–31 января 2008 г.), «6th St.Petersburg Workshop on Simulation» (Санкт-Петербург, 28 июня – 4 июля, 2009 г.), «UK-China workshop on singular spectrum analysis and its applications» (Кардифф, Великобритания, 16–18 сентября 2010 г.).

Работа над диссертацией была частично поддержана стипендией Правительства Российской Федерации для аспирантов за 2009–10 годы, грантами CRDF №№ RUB1-1643-ST-06 и RUB1-33015-ST-09 и грантами Правительства Санкт-Петербурга №№ 2.1/30-04/27, 2.1/29-04/021, 2.1/07-06/056.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8]. Из них работы [A1, A2] — в списке журналов, рекомендованных ВАК.

Работы [A3, A4, A5, A6, A7, A8] выполнены в соавторстве. Соискателю в работах [A4, A6, A7, A8] принадлежат доказательства утверждений, в работах [A3, A4, A5, A8] — численные эксперименты и реализация алгоритмов. И.В. Флоринскому в работах [A3, A5] принадлежат постановки задач. В работе [A7] А.О. Алексееву и Н.П. Алексеевой принадлежат постановки задач и способ вычисления вероятности классификации, Е.М. Подхалюзиной и П.В. Грачевой — реализация алгоритмов и обработка данных. Научному руководителю Н.Э. Голяндиной в работах [A3, A4, A5, A6, A8] принадлежат постановки задач, методология применения метода АСС.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, списка основных обозначений, 5 глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объем диссертации — 226 страниц. Библиография включает 128 наименований на 14 страницах.

Содержание работы

Основными объектами исследования являются временные ряды $F_N = (f_0, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{C}^{1\times N}$ и двумерные массивы $\mathrm{F} = (f_{m,n})_{m,n=0}^{N_x-1,N_y-1}$, $f_{m,n} \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим базовый метод АСС для временных рядов. Пусть ряд является суммой компонент различной структуры $F_N = F_N^{(1)} + \ldots + F_N^{(r)}$. На шаге **вложения** по ряду F_N и *длине окна* L составляется L*-траекторная матрица ряда*, столбцами которой являются скользящие отрезки ряда длины L:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(L)} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Траекторная матрица имеет одинаковые значения на антидиагоналях, т.е. является *ганкелевой* матрицей. Затем производится **сингулярное разложение** (SVD) траекторной матрицы

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j U_j V_j^*, \tag{2}$$

где $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_d > 0$ — *сингулярные числа*, а $\{U_j\}_{j=1}^d$ и $\{V_j\}_{j=1}^d$ — *левые и правые сингулярные векторы*, называемые также *собственными и факторными векторами*. Набор (σ_j, U_j, V_j) называется *j-й собственной тройкой*. Собственные векторы образуют базис пространства столбцов матрицы $\mathbf{X}$, $\mathcal{L}^{(L)}(F_N) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{span}(\mathbf{X})$, называемого *траекторным пространством*.

С помощью задания **группировки**, т.е. разбиения набора собственных троек на r групп $\{1, \ldots, d\} = J_1 \cup \ldots \cup J_r$, определяется разложение

$$\mathbf{X} \ = \ \sum_{k=1}^{r} \mathbf{X}_{J_k},$$

где $\mathbf{X}_J = \sum\limits_{j \in J} \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^*$. Посредством **диагонального усреднения** матрицы $\mathbf{X}_{J_k}$ преобразуются в восстановленные ряды $\widetilde{F}_N^{(k)}$, что приводит к разложению

$$F_N = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{F}_N^{(k)}.$$

В теории метода АСС основным является вопрос о нахождении условий *разделимости* компонент в исходной сумме $F_N = F_N^{(1)} + \ldots + F_N^{(r)}$, т.е. возможности с помощью АСС найти восстановленные ряды $\widetilde{F}_N^{(k)}$, хорошо аппроксимирующие $F_N^{(k)}$, или базисы $\{U_j\}_{j \in J_k}$ подпространств, аппроксимирующих траекторные пространства $\mathcal{L}^{(L)}(F_N^{(k)})$. Кроме того, важна *идентифицируемость* компонент, т.е. возможность различить соответствующие собственные тройки после шага разложения в методе АСС, для чего, в частности, количество собственных троек, соответствующих компоненте, должно быть небольшим и одинаковым для различных размеров окна. Идеальной моделью таких рядов являются ряды, траекторные матрицы которых имеют малый, не зависящий от размеров окна ранг, так называемые *ряды конечного ранга*.

Во введении обосновывается актуальность диссертации, формулируются цели и задачи работы, кратко описывается структура диссертации.

Глава 1 содержит обзор теории и основных понятий метода АСС. Вводятся определения, описываются модели и задачи, рассматриваемые в рамках данной диссертации.

Первый раздел посвящен описанию базового метода АСС в комплексном варианте и обсуждению основных шагов алгоритма.

Второй раздел посвящен краткому обзору модели рядов конечного ранга. Ряд $F_N \in \mathbb{C}^{1\times N}$ называется *рядом конечного ранга* d, если ранг $\mathbf{X}^{(L)}$ равен некоторому числу $d \le N/2$ для любых L, $d \le L \le N-d+1$. Определяется класс рядов, *удовлетворяющих линейным рекуррентным формулам* (ЛРФ), т.е. рядов, для которых существуют $a_0, \ldots, a_{\rho-1} \in \mathbb{C}$, такие что

$$f_{n+\rho} = \sum_{k=0}^{\rho-1} a_k f_{n+k} \tag{3}$$

для $0 \le n \le N-\rho-1$. В разделе также приводятся известные в теории АСС результаты о соотношениях между рядами, удовлетворяющими ЛРФ, и рядами конечного ранга [1, 6].

Третий раздел посвящен понятию разделимости рядов в методе АСС. Два ряда $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ называются *слабо L-полуразделимыми*, если пространства столбцов их траекторных матриц ортогональны $\mathcal{L}^{(L)}(F_N^{(1)}) \perp \mathcal{L}^{(L)}(F_N^{(2)})$. Если к тому же $\mathcal{L}^{(K)}(F_N^{(1)}) \perp \mathcal{L}^{(K)}(F_N^{(2)})$, где $K \stackrel{\mathrm{def}}{=} N-L+1$, то ряды называются *слабо L-разделимыми*. Ряды слабо L-разделимы тогда и только тогда, когда сумма сингулярных разложений траекторных матриц отдельных рядов

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \sum_{j=1}^{d_1} \sigma_j U_j^{(1)} (V_j^{(1)})^* + \sum_{j=1}^{d_2} \sigma_j U_j^{(2)} (V_j^{(2)})^*$$

является сингулярным разложением матрицы $\mathbf{X}$. В разделе также приводятся основные сведения о точной и приближенной разделимости [6].

В четвертом разделе содержится обзор теории бесконечных рядов, удовлетворяющих ЛРФ. Ряд $F_\infty = (f_0, \ldots, f_n, \ldots)$, $f_n \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — поле, удовлетворяет ЛРФ (3), если равенство (3), при $a_0, \ldots, a_{\rho-1} \in \mathcal{K}$, выполняется для всех $n \in \mathbb{N}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$. Каждой ЛРФ (3) сопоставляется характеристический многочлен $A(z) = z^\rho - \sum\limits_{k=0}^{\rho-1} a_k z^k$. Существует минимальный многочлен $P(z) = p_d z^d + \ldots + p_1 z + p_0$, такой что характеристический многочлен любой ЛРФ, которой удовлетворяет F_∞, делится на $P(z)$. Известно, что в случае комплексного поля, $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, такие ряды имеют единственное представление

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} Q_k(n) \lambda_k^n + \sum_{j=0}^{\nu_0-1} c_j \delta_j(n), \tag{4}$$

где Q_k — ненулевые многочлены степени $\nu_k - 1$, c_j — комплексные константы, $c_{\nu_0-1} \ne 0$, $\delta_j(n)$ — символ Кронекера, т.е. $\delta_j(n) = 1$ если $n = j$ и $\delta_j(n) = 0$

иначе. При этом λ_k являются корнями $P(z)$ с кратностями ν_k, ν_0 — кратность корня 0 и $\nu_0+\ldots+\nu_m = d$. Для вещественнозначных рядов представление (4) соответствует сумме произведений полиномов, экспонент и косинусов. Если $a_0 \neq 0$ или, что то же самое, $\nu_0 = 0$, ряд F_∞ называется *реверсивным* рядом размерности d. Конечный отрезок F_N такого ряда F_∞ называется *реверсивным* рядом размерности d, если $N \geq 2d$.

В пятом разделе рассматриваются методы прогнозирования компонент разложения в методе АСС. Пусть $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$, компонента $F_N^{(1)}$ является реверсивным рядом размерности d и имеет представление (4), а также $d < L < N-d+1$. Тогда по подпространству $\Lambda = \mathrm{span}\{U_{j_1}, \ldots, U_{j_d}\} \subset \mathbb{C}^L$, соответствующему компоненте $F_N^{(1)}$ в разложении, если $e_L \stackrel{\mathrm{def}}{=} (0, \ldots, 0, 1)^\mathrm{T} \notin \Lambda$, коэффициенты $a_0, \ldots, a_{L-2}$ ЛРФ прогноза определяются с помощью проекции e_L на сопряжение ортогонального дополнения $\mathrm{R} = \overline{\Lambda_\perp}$ подпространства:

$$(b_0, \ldots, b_{L-1})^\mathrm{T} = \Pi_\mathrm{R} e_L,$$
$$(a_0, \ldots, a_{L-2})^\mathrm{T} = (b_0, \ldots, b_{L-2})^\mathrm{T}/(-b_{L-1}).$$

В случае точной разделимости, когда $\mathcal{L}(F_N^{(1)}) = \Lambda$, корнями характеристического многочлена $A(z)$ ЛРФ прогноза являются d корней минимального многочлена $P(z)$ и $L-d-1$ *побочных корней*. В случае приближенной разделимости корни $A(z)$ являются приближениями корней минимального многочлена и побочных корней, что позволяет использовать ЛРФ прогноза для оценки параметров ряда $F_N^{(1)}$.

В шестом разделе описываются модификации метода АСС. Рассматриваются некоторые методы оценки параметров сигналов. Подробно обсуждается модификация метода АСС над конечным полем для анализа категориальных данных. В рамках этой модификации ставится задача о нахождении вероятности случайной классификации с точностью до инверсии. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ заданы случайные вектор $V \in \mathbb{F}_2^L$ и случайная ганкелева $L \times K$ матрица с элементами из $\mathbb{F}_2$, независимые и имеющие равномерное распределение. Требуется найти вероятность

$$F_{\tau_1}(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(V \in \mathrm{span}(\mathbf{X}) \text{ или } V + \mathbf{1}_L \in \mathrm{span}(\mathbf{X})),$$

где $\mathbf{1}_L \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1, \ldots, 1)^\mathrm{T}$. Эту вероятность можно выразить как

$$F_{\tau_1}(0) = 2\mathbf{P}(V \in \mathrm{span}(\mathbf{X})) - \mathbf{P}(\mathbf{1}_L \in \mathrm{span}(\mathbf{X}) \text{ и } V \in \mathrm{span}(\mathbf{X})),$$

и для нахождения каждого из слагаемых достаточно найти величины

$$\Gamma_r^{L\times K} = \#\{\mathbf{X} \in \mathfrak{H}^{L\times K} : \mathrm{rank}\,\mathbf{X} = r\},$$
$$\Gamma_r^{L\times K,\mathbf{1}} = \#\{\mathbf{X} \in \mathfrak{H}^{L\times K} : \mathrm{rank}\,\mathbf{X} = r, \mathbf{1}_L \in \mathrm{span}(\mathbf{X})\},$$

где $\mathfrak{H}^{L\times K}$ — множество ганкелевых матриц размера $L\times K$.

В седьмом разделе описывается двумерный вариант метода АСС [2]. Для двумерного массива данных (матрицы) $\mathrm{F}=(f_{n,m})_{n,m=0}^{N_x-1,N_y-1}$ (L_x,L_y)-траекторная матрица $\mathbf{W}=\mathbf{W}^{(L_x,L_y)}$ формируется по двумерному скользящему окну размера $L_x\times L_y$. Столбцы $\mathbf{W}$ (векторы вложения) являются *векторизациями подматриц* $\mathrm{F}_{k,l}^{(L_x,L_y)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(f_{n+k,m+l})_{n,m=0}^{L_x-1,L_y-1}$, где $1\le k+1\le K_x\stackrel{\mathrm{def}}{=}N_x-L_x+1$, $1\le l+1\le K_y\stackrel{\mathrm{def}}{=}N_y-L_y+1$, при этом $(\mathbf{W})_{n+L_xm+1,k+K_xl+1}=f_{n+k,m+l}$. Матрица $\mathbf{W}$ является блочно-ганкелевой с ганкелевыми блоками [8].

В разделе также описывается класс методов анализа текстурных изображений, основанных на этапе разложения метода АСС. Кроме того, как частный случай двумерного АСС, рассматривается вариант метода АСС для одновременного анализа нескольких временных рядов.

Во второй главе излагается необходимая алгебраическая теория.

В первом разделе излагаются необходимые факты из алгебраической теории ганкелевых матриц [7]. Для фиксированного ряда $F_N\in\mathcal{K}^N$ изучается зависимость от L структуры ганкелевой матрицы $\mathbf{X}^{(L)}$, т.е. ранга матрицы и структуры ее *левого ядра*

$$\mathfrak{R}^{(L)}=\mathfrak{R}^{(L)}(F_N)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{X\in\mathcal{K}^L : X^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{(L)}=(0,\ldots,0)\}.$$

Показано, что либо ряд имеет конечный ранг, либо матрица $\mathbf{X}^{(L)}$ имеет полный ранг для любого L. Пусть ранг ряда равен d. Тогда $\dim\mathfrak{R}^{(L)}=0$ для $L\le d$, а для $d<L\le N-d+1$ базисом $\mathfrak{R}^{(L)}$ являются столбцы матрицы

$$\mathbf{P}^{(L)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix} p_0 & \ldots & p_d & 0 & 0\\ 0 & \ddots & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & p_0 & \ldots & p_d\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathcal{K}^{L\times(L-d)},\qquad(5)$$

т.е. сдвиги *характеристического вектора* $P=(p_0,\ldots,p_d)^{\mathrm{T}}$, определенного однозначно с точностью до умножения на константу. Для $L>N-d+1$ базис левого ядра образован сдвигами двух характеристических векторов. Также приводятся результаты о поведении ранга и структуры ряда при *расширении ряда*: $F_{N+1}(\alpha)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(f_0,\ldots,f_{N-1},\alpha)$.

Во втором разделе содержится обзор теории k-последовательностей [4] для случая $k=2$ (называемых в диссертации двумерными массивами), связанных линейными рекуррентными соотношениями. Бесконечная матрица $\mathcal{F}=(f_{n,m})_{n,m=0}^{+\infty}$ называется двумерным *бесконечным массивом*. Линейные рекуррентные соотношения между элементами $\mathcal{F}$

$$\sum_{\rho,\tau=0}^{+\infty}a_{(\rho,\tau)}f_{n+\rho,m+\tau}=0\quad\text{для любых } n,m\in\mathbb{N}_0,\qquad(6)$$

где множество $\{(\rho, \tau) : a_{(\rho,\tau)} \neq 0\}$ конечно, ассоциируются с многочленами $p(x, y) = \sum\limits_{\rho,\tau=0}^{+\infty} a_{(\rho,\tau)} x^\rho y^\tau$. Множество многочленов $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, для которых выполняется (6), называется *аннулятором* $\mathcal{F}$ и является идеалом [3] в кольце многочленов $\mathbb{C}[x, y]$ от двух переменных.

Известно, что линейное пространство $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, образованное сдвигами $\mathcal{F}_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{n+k,m+l})_{n,m=0}^{+\infty}$, конечномерно тогда и только тогда, когда идеал $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ *нульмерен*, т.е. многообразие [3] (множество корней) идеала $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ конечно:

$$V(\mathcal{I}(\mathcal{F})) = \{(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_r, \mu_r)\}.$$

В этом случае массив $\mathcal{F}$ имеет единственное *биномиальное представление*

$$f_{n,m} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2} b_{\alpha,\beta}^{(k)} \binom{n}{\alpha} \binom{m}{\beta} \lambda_k^{n-\alpha} \mu_k^{m-\beta}, \tag{7}$$

где $\binom{n}{\alpha}$,$\binom{m}{\beta}$ — биномиальные коэффициенты и количество ненулевых коэффициентов $b_{\alpha,\beta}^{(k)}$ конечно.

В теории k-линейных последовательностей [4] ставится вопрос об оценке *линейной сложности* массива $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}(\mathcal{F})$ по его биномиальному представлению [4]. Основным способом оценки линейной сложности является следующий способ. Определим носитель массива $\mathcal{B}$ как как $\operatorname{Supp} \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^2 : b_{\alpha,\beta} \neq 0\}$. Множество индексов $\mathfrak{A} \subset \mathbb{N}_0^2$ называется *диаграммой Ферре*, если $((-1, 0) + \mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}_0^2 \subset \mathfrak{A}$ и $((0, -1) + \mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}_0^2 \subset \mathfrak{A}$, где операция сдвига множества индексов определяется как $(\alpha, \beta) + \mathfrak{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha + k, \beta + l), (k, l) \in \mathfrak{A}\}$.

Предложение [4, Предл. 23]. Если массив $\mathcal{F}$ имеет представление с одним корнем (λ, μ)

$$f_{n,m} = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2} b_{\alpha,\beta} \binom{n}{\alpha} \binom{m}{\beta} \lambda^{n-\alpha} \mu^{m-\beta}, \tag{8}$$

$\mathcal{B} = (b_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{+\infty}$ — массив коэффициентов и $\mathfrak{F}$ — наименьшая диаграмма Ферре, содержащая $\operatorname{Supp} \mathcal{B}$, то $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \leq \#\mathfrak{F}$.

В третьей главе излагаются теоретические результаты диссертации для временных рядов, полученные с помощью теории ганкелевых матриц.

В первом разделе на основе алгебраической теории ганкелевых матриц производится систематизация типов рядов с точки зрения АСС: конечного ранга, неполного ранга, реверсивных. Естественным образом определяется класс продолжимых рядов. Устанавливаются точные связи между типами, в том числе уточняются результаты из [1] и [6].

Во втором разделе исследуется слабая разделимость рядов. Для полуразделимости предлагается следующее условие.

Теорема 3.2.1. Пусть $F_N^{(1)} \neq 0$ и $\{U_1, \ldots, U_r\}$ — базис $\mathcal{L}^{(L)}(F_N^{(1)})$, а $F_N^{(2)}$ является реверсивным рядом размерности $d \leq N/2$, и $d \leq \min(L-1, K)$.

Ряды $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ L-полуразделимы тогда и только тогда, когда минимальный многочлен $P^{(2)}(z)$ ряда $F_N^{(2)}$ является общим делителем производящих многочленов $\overline{U_j}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u_0^{(j)}} + \overline{u_1^{(j)}} z + \ldots + \overline{u_{L-1}^{(j)}} z^{L-1}$, где $U_j = (u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \ldots, u_{L-1}^{(j)})^{\mathrm{T}}$.

Данное условие позволяет описать все случаи левой разделимости для достаточно широкого класса рядов.

Теорема 3.2.3. Реверсивные ряды $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ размерностей $d_1, d_2 \leq N/2$ L-полуразделимы тогда и только тогда, когда существуют $a_k, b_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\rho > 0$, $\omega \in [0; 1/L)$ и различные $m_k, h_l \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m_k, h_l < L$, такие что

$$f_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{d_1} a_k \Big(\rho \exp\left(2\pi i \left(\tfrac{m_k}{L} + \omega\right)\right)\Big)^n, \quad f_n^{(2)} = \sum_{l=1}^{d_2} b_l \Big(\rho^{-1} \exp\left(2\pi i \left(\tfrac{h_l}{L} + \omega\right)\right)\Big)^n.$$

Осуществляется полная классификация случаев полуразделимости при $L < K$. Представлен критерий и все случаи двусторонней разделимости.

В третьем разделе изучается поведение побочных корней ЛРФ прогноза. Пусть $A(z) = P(z)H_n(z)$ — характеристический многочлен ЛРФ прогноза для длины окна L. Тогда вектор H_n, соответствующий $n = L-d-1$ побочным корням ЛРФ, является решением уравнения

$$(\mathbf{P}^{(L)})^* \mathbf{P}^{(L)} H_n = e_{n+1},$$

и многочлены $H_n(z)$ образуют систему ортогональных многочленов на единичной комплексной окружности с весом $|P(z)|^2$. На языке ортогональных многочленов систематизируются известные результаты для побочных корней ЛРФ прогноза. Для описания асимптотического распределения корней используются современные результаты теории ортогональных многочленов.

Четвертый раздел посвящен подсчету количества ганкелевых матриц над конечным полем. Формулы для $\Gamma_r^{L\times K}$ известны [5]. Для нахождения $\Gamma_r^{L\times K,\mathbf{1}}$ используется алгебраическая теория ганкелевых матриц.

Теорема 3.4.1.

$$\Gamma_r^{L\times K,\mathbf{1}} = \begin{cases} \Gamma_r^{L\times K}/3, & r < \min(L, K), \\ \Gamma_r^{L\times (K+1)}/3, & r = K < L, \\ \Gamma_r^{L\times K}, & r > \min(L, K) \text{ или } r = L < K. \end{cases}$$

В четвертой главе содержатся теоретические результаты для двумерного расширения метода АСС.

В первом разделе приводятся базовые свойства ранга (L_x, L_y)-траекторной матрицы $\mathbf{W}^{(L_x,L_y)}$ массива F. В дальнейшем в качестве массивов рассматриваются $N_x \times N_y$ подмассивы бесконечных массивов. Для бесконечного массива вводится понятие (L_x, L_y)-траекторного пространства как пространства, порожденного всеми $L_x \times L_y$ окнами массива $\mathcal{F}$: $\mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathcal{F}) = \operatorname{span}\{\mathrm{F}_{m,n}^{(L_x,L_y)}\}_{m,n=0}^{+\infty}$.

Показано, что $\mathrm{r}(\mathcal{F}) < +\infty$ тогда и только тогда, когда размерность траекторного пространства $\dim \mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathcal{F})$ равномерно ограничена. При этом $\dim \mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathcal{F}) = \mathrm{r}(\mathcal{F})$ для достаточно больших размеров окна $L_x \geq L_{x0}$, $L_y \geq L_{y0}$. Поэтому далее массивы с $\mathrm{r}(\mathcal{F}) < +\infty$ называются *массивами конечного ранга*. Выделяется также класс массивов неполного ранга, для которых $\dim \mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathcal{F}) < L_x L_y$. Показано, что этот класс не совпадает с классом массивов конечного ранга, в отличие от случая аналогичных классов временных рядов.

Для массивов конечного ранга доказывается новое утверждение об оценке линейной сложности по биномиальному представлению.

Теорема 4.1.2. Пусть массив $\mathcal{F}$ имеет представление (8) и $m = \max\{\alpha + \beta : (\alpha, \beta) \in \operatorname{Supp} \mathcal{B}\}$. Тогда $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \leq \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \delta\right)$, где $\delta = 1(2)$ для четного (нечетного m).

Во втором разделе рассматривается задача о нахождении для массива конечного ранга множества *допустимых размеров окна*

$$\mathfrak{M}(\mathcal{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(L_x, L_y) \in \mathbb{N}^2 : \dim \mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathcal{F}) = \mathrm{r}(\mathcal{F})\}.$$

Доказана теорема, позволяющая найти почти все элементы $\mathfrak{M}(\mathcal{F})$. Обозначим $B_x(\mathfrak{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{\alpha + 1 : (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}\}$ и $B_y(\mathfrak{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{\beta + 1 : (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}\}$.

Теорема 4.2.1. Пусть $\mathfrak{G}_x$ и $\mathfrak{G}_y$ есть диаграммы Ферре под старшими членами базисов Гребнера для лексикографических упорядочений $y > x$ и $x > y$. Тогда

$$(\mathrm{B}_x(\mathfrak{G}_x), \mathrm{B}_y(\mathfrak{G}_x)), (\mathrm{B}_x(\mathfrak{G}_y), \mathrm{B}_y(\mathfrak{G}_y)) \in \mathfrak{M}(\mathcal{F}),$$

и для любого $(L_x, L_y) \in \mathfrak{M}$ выполняются неравенства

$$L_y \geq \mathrm{B}_y(\mathfrak{G}_x), \quad L_x \geq \mathrm{B}_x(\mathfrak{G}_y).$$

Частным случаем теоремы 4.2.1 является известный результат о нахождении множества допустимых размеров окна для сумм комплексных экспонент [8].

Также показано, что ранг траекторной матрицы $\mathbf{W}^{(L_x,L_y)}$ конечного подмассива F равен линейной сложности массива $\mathrm{r}(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $(L_x, L_y) \in \mathfrak{M}(\mathcal{F})$ и $(K_x, K_y) \in \mathfrak{M}(\mathcal{F})$.

В третьем разделе изучается разделимость двумерных массивов. Массивы $\mathrm{F}^{(1)}$ и $\mathrm{F}^{(2)}$ (L_x, L_y)-полуразделимы, если $\mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathrm{F}^{(1)}) \perp \mathcal{L}^{(L_x,L_y)}(\mathrm{F}^{(2)})$. Если к тому же $\mathcal{L}^{(K_x,K_y)}(\mathrm{F}^{(1)}) \perp \mathcal{L}^{(K_x,K_y)}(\mathrm{F}^{(2)})$, то массивы (L_x, L_y)-разделимы.

Доказывается следующая теорема, которая позволяет описать все случаи разделимости бесконечных массивов конечного ранга.

Теорема 4.3.3. Для $(L_x,L_y) \in \mathfrak{M}(\mathcal{F}^{(1)}) \cap \mathfrak{M}(\mathcal{F}^{(2)})$ массивы $f^{(1)}_{m,n} = P_1(m,n)\lambda_1^m\mu_1^n$ и $f^{(2)}_{m,n} = P_2(m,n)\lambda_2^m\mu_2^n$ (L_x,L_y)-полуразделимы только в следующих случаях:

1. $P_1 = P_1(m)$, $P_2 = P_2(m)$, ряды μ_1^n и μ_2^n L_y-полуразделимы;

2. $P_1 = P_1(n)$, $P_2 = P_2(n)$, ряды λ_1^m и λ_2^m L_x-полуразделимы;

3. $P_1 = \mathrm{const}$, $P_2 = Q_{21}(n) + Q_{22}(m)$, ряды λ_1^m и λ_2^m L_x-полуразделимы, ряды μ_1^n и μ_2^n L_y-полуразделимы;

4. $P_1 = a_1m+b_1n+c_1$, $P_2 = a_2m+b_2n+c_2$, ряды λ_1^m и λ_2^m L_x-полуразделимы, ряды μ_1^n и μ_2^n L_y-полуразделимы и $a_1\overline{b_2} + b_1\overline{a_2} = 0$.

В четвертом разделе рассматривается непрерывная модель двумерного АСС. Доказывается результат о двумерных функциях конечного ранга.

Теорема 4.4.3. Пусть $f \in \mathbf{C}^{(d)}([0;t_x] \times [0;t_y])$ (имеет непрерывные частные производные вплоть до порядка d), $\tau_x \in (0,t_x)$, $\tau_y \in (0,t_y)$ и функция $g : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \mapsto \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}_1 = [0;\tau_x] \times [0;\tau_y]$ и $\mathcal{D}_2 = [0;t_x - \tau_x] \times [0;t_y - \tau_y]$, определена как $g((u,v),(s,t)) = f(u+s, v+t)$ и имеет конечное разложение Шмидта

$$f(u+s, v+t) = g((u,v),(s,t)) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k \varphi_k(u,v)\, \psi_k(s,t).$$

Тогда существуют $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$, $m < d$ и $p_j(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, такие что

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x,y) \exp(\lambda_j x + \mu_j y).$$

Пятая глава посвящена практическим аспектам двумерного метода АСС.

В первом разделе содержится исследование методами статистического моделирования качества восстановления зашумленного массива конечного ранга с помощью метода АСС. В качестве модели шума используется аддитивный гауссовский белый шум. Исследуется зависимость качества восстановления от размеров окна, в том числе и для различных областей массива (например, центральной части и краев массива).

Второй раздел посвящен применению метода АСС для различных задач обработки двумерных массивов. Предлагается метод фильтрации (сглаживания) данных с помощью двумерного метода АСС. На примере цифровых моделей рельефа демонстрируются свойства метода сглаживания. Также предлагаются новые методы для задачи классификации текстурных изображений с помощью расстояний между подпространствами, используемых в различных модификациях метода АСС. Качество работы методов оценивается на тестовых базах данных.

Третий раздел посвящен обсуждению вопросов эффективной реализации алгоритмов для двумерного метода АСС. Предлагаются быстрые методы разложения, основанные на вычислении ковариационной матрицы и на быстром преобразовании Фурье. Также описывается устройство реализованного комплекса программ.

В **Заключении** приводятся выводы и подводятся итоги диссертационного исследования.

В **приложении** приводится часть исходных текстов комплекса программ.

Цитированная литература

1. Бухштабер В. М. Многомерные развертки временных рядов. Теоретические основы и алгоритмы // Обозрение прикл. промышл. матем., сер. Вероятн. и статист. 1997. Т. 4, № 4. С. 629–645.

2. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница», Под ред. Д. Л. Данилов, А. А. Жиглявский. СПб.: Пресском, 1997. С. 308.

3. Кокс Д., Литтл Д., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000. С. 687.

4. Куракин В. Л. Биномиальная сложность полилинейных последовательностей // Труды по дискр. матем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 6. С. 82–138.

5. Daykin D. E. Distribution of bordered persymmetric matrices in a finite field // J. Reine und Angew. Math. (Crelles Journal). 1960. Vol. 203. Pp. 47–45.

6. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. P. 320.

7. Heinig G., Rost K. Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators. Akademie Verlag, Berlin, 1984. P. 212.

8. Yang H. H., Hua Y. On Rank of Block Hankel Matrix for 2-D Frequency Detection and Estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. 1996. Vol. 44, no. 4. Pp. 1046–1048.

Список публикаций автора

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

A1. Усевич К. Д. Разложение функций в двумерном варианте метода «Гусеница»-SSA и связанные с ним системы уравнений в частных производных // Вестник СПбГУ, Серия 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. № 3. С. 152–161.

A2. Usevich K. On signal and extraneous roots in Singular Spectrum Analysis // Statistics and Its Interface. 2010. Vol. 3, no. 3. Pp. 281–295.

Остальные публикации:

A3. Golyandina N., Florinsky I., Usevich K. Filtering of Digital Terrain Models by Two Dimensional Singular Spectrum Analysis // International Journal of Ecology & Development. 2007. Vol. 8, no. F07. Pp. 81–94.

A4. Голяндина Н. Э., Усевич К. Д. Метод 2D-SSA для анализа двумерных полей // Труды VII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08. Москва, 28–31 января 2008. 2008. С. 1657–1727.

A5. Голяндина Н. Э., Флоринский И. В., Усевич К. Д. Анализ сингулярного спектра для фильтрации цифровых моделей рельефа // Геодезия и картография. 2008. № 5. С. 21–28.

A6. Golyandina N., Usevich K. An Algebraic View on Finite Rank in 2D-SSA // Proceedings of the 6th St.Petersburg Workshop on Simulation, June-July 2009 / Ed. by S. Ermakov, V. Melas, A. Pepelyshev. 2009. Pp. 308–313.

A7. Alexeyeva N., Alexeyev A., Gracheva P., Podkhalyuzina E., Usevich. K. Symptom and syndrome analysis of categorial series, logical principles and forms of logic // Proceedings of the 2010 3rd Intern. Conf. on BioMedical Engineering and Informatics. 2010. Vol. 6. Pp. 2603–2606.

A8. Golyandina N. E., Usevich K. D. 2D-extension of Singular Spectrum Analysis: algorithm and elements of theory // Matrix methods: theory, algorithms and applications / Ed. by V. Olshevsky, E. Tyrtyshnikov. World Scientific, 2010. Pp. 449–473.