Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Пустовых Мария Александровна

Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса

специальность 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ГЕНЕРАЛОВ Александр Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ГОРДЕЕВ Николай Леонидович (Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена)
	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ЛУРЬЕ Борис Бениаминович (Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН)
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится «   » .... 2011 г. в .... часов на заседании совета Д 212.232.29 по зашите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311 (Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «   » .... 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор   Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры Мёбиуса. Изучение структуры кольца когомологий Хохшильда для различных алгебр всегда представляло большой интерес для гомологической алгебры. В последние годы наблюдается прорыв в этой области, перечислим последние результаты. Полное описание структуры кольца когомологий Хохшильда было получено для некоторых серий алгебр диэдрального типа (А. И. Генералов, 2004–2010), кватернионного типа (А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, 2006–2011), полудиэдрального типа (А. И. Генералов, 2009–2011), целочисленного группового кольца диэдральной группы (А. И. Генералов, 2007), а также полудиэдральной группы (А. И. Генералов, 2011), самоинъективных алгебр древесного типа D_n (Ю. В. Волков, А. И. Генералов, 2007–2011), алгебр Лю–Шульца (А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, 2006). В 2011 г. Y. Xu, H. Xiang получили описание структуры кольца когомологий Хохшильда для кошулевых d-алгебр. Аддитивная структура кольца когомологий Хохшильда для алгебр Гекке $\mathcal{H}_q(S_4)$, $q = -1$ описана K. Erdmann и S. Schroll (2010). N. Snashall и R. Taillefer в 2010 г. описали структуру кольца когомологий Хохшильда для алгебры путей некоторого колчана с соотношениями и для кошулевых алгебр.

Алгебра Мёбиуса впервые была введена C. Riedtmann при классификации самоинъективных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечных тип представления. Стабильный AR-колчан для таких алгебр имеет древесный тип A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (Riedtmann, 1980). Далее, если алгебра имеет AR-колчан древесного типа A_n, то она стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо алгебре Мёбиуса (Riedtmann, 1980). В 1999 г. H. Asashiba доказал, что для самоинъективных алгебр конечного типа представления стабильная эквивалентность совпадает с производной. Поскольку кольцо когомологий Хохшильда инвариантно относительно производной эквивалентности, мы можем использовать классификацию C. Riedtmann для описания кольца когомологий алгебр типа A_n. Для полуцепных самоинъективных алгебр описание кольца когомологий Хохшильда получено K. Erdmann и T.Holm (1999). Таким образом, данная диссертация является завершающим этапом в исследовании колец когомологий Хохшильда для алгебр типа A_n.

Цель работы. Получить описание аддитивной и мультипликативной структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры Мёбиуса. Сформулировать полное описание структуры кольца в терминах образующих и соотношений.

Методы исследований. В работе используется подход к изучению кольца когомологий Хохшильда, разработанный А. И. Генераловым и использующийся в его работах и работах учеников. Описание структуры кольца когомологий Хохшильда получается с использованием предварительно построенной бимодульной резольвенты алгебры. При формулировке гипотез о том, как выглядит резольвента и Ω-сдвиги образующих кольца когомологий, использовался эмпирический материал, полученный при помощи компьютерных вычислений.

Основные результаты работы.

Пусть R – алгебра Мёбиуса.

1. Получено описание бимодульной резольвенты для R.

2. Описана аддитивная структура $\mathrm{HH}^*(R)$.

3. Выбрано множество образующих $\mathrm{HH}^*(R)$, для которых описаны все их Ω-сдвиги.

4. Описаны все соотношения между образующими, таким образом, получено описание $\mathrm{HH}^*(R)$ в терминах образующих и соотношений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения когомологических свойств алгебр и колец когомологий Хохшильда. В частности, описание бимодульной резольвенты, являющееся промежуточным результатом данной работы, может использоваться при изучении других (ко)гомологических свойств алгебры Мёбиуса.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной алгебраической конференции, посвящённой 100-летию Д. К. Фаддеева [5], на Международной алгебраической конференции, посвящённой 70-летию А. В. Яковлева [6], и на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре имени Д. К. Фаддеева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–6]. Работы [1–4] опубликованы в издании, входящем в список рекомендованных Высшей аттестационной комиссией на момент публикации. В работах [1, 2] диссертанту принадлежат формулировка и доказательства теорем, а соавтору – постановка задач и выбор методов решения.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых на разделы, списка литературы, содержащего 40 наименований, и одного приложения. Объём диссертации – 169 страниц (основной текст – 132 страницы, приложение – 37 страниц).

Содержание диссертации

Во **введении** рассмотрены основные понятия, дано краткое описание методов решения задачи, а также представлено состояние исследования в данной области. Напомним определения основных объектов, использующихся в диссертации.

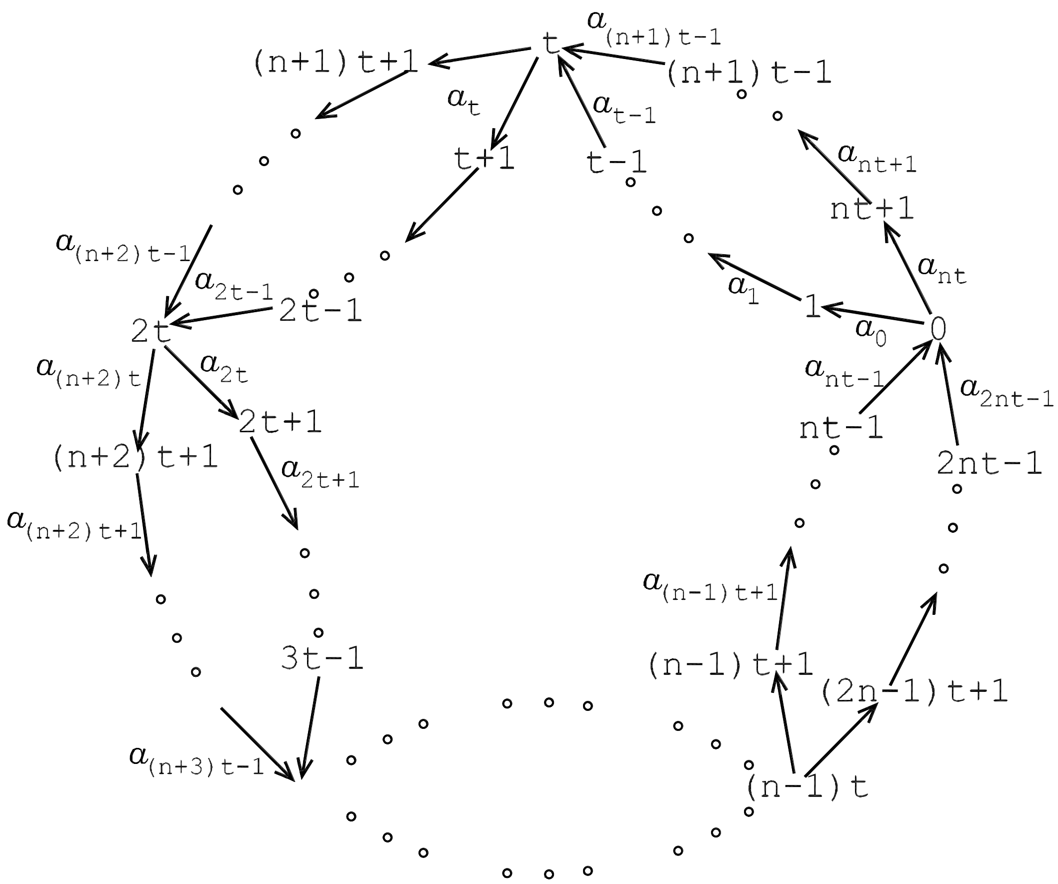
Пусть R – конечномерная алгебра над полем K, $\Lambda = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). На абелевой группе

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$$

вводится структура ассоциативной алгебры с использованием $\smile$-

произведения; эту алгебру называют *алгеброй когомологий Хохшильда.*

Алгебра Мёбиуса есть алгебра вида $R = K\left[\mathcal{Q}\right]/I$, где K – поле, а $\mathcal{Q}$ – следующий колчан:



где $n, t \in \mathbb{N}, t \geqslant 2$, а I – идеал в алгебре путей $K\left[\mathcal{Q}\right]$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый

а) всеми путями длины $t+1$;

б) путями вида

$$a_{rt}a_{(r+n)t-1} \text{ и } a_{(r+n)t}a_{rt-1};$$

в) выражениями вида

$$a_{(n+r)t-1}a_{(n+r)t-2}\dots a_{(n+r-1)t} + a_{rt-1}a_{rt-2}\dots a_{(r-1)t}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

В этом случае используем также обозначение $R = R_{n,t}$.

В **первой главе** формулируется основной результат работы – описание структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры Мёбиуса в терминах образующих и соотношений. Также получено интересное следствие – описание подкольца $\mathrm{HH}^{(2t-1)*}(R)$ в терминах образующих и соотношений.

Сформулируем основной результат работы. Сначала приведём описание аддитивной структуры.

Теорема 1 (Аддитивная структура, случай $n > 1$) *Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\mathrm{HH}^s(R)$ – s-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m+\ell t$ на n. Группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 1, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:*

(1) $r = 0$, $\ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(2) $r = 2m$, $m + \ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(3) $r = 2m$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(4) $r = 2t-2$, $t - 1 + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(5) $r = 2m+1$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(6) $r = 2m+1$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$.

В остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

Теорема 2 (Аддитивная структура, случай $n = 1$) *Пусть $n = 1$, $R = R_{1,t}$ – соответствующая алгебра Мёбиуса. В обозначениях предыдущей теоремы, группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 2, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:*

(1) $s = 0$;

(2) $r = 2m$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 2$;

Группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 1, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:

(3) $r = 2m$ $(m < t-1)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

(4) $r = 0$, $\ell + p \not\vdots\, 2$;

(5) $r = 2m$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$, $s > 0$, $\mathrm{char}\, K \neq 2$;

(6) $r = 2m+1$, $p \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(7) $r = 2t-2$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K \neq 2$;

(8) $r = 2t-2$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \vdots 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$.

В остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

Введём автоморфизм алгебры Мёбиуса $\sigma\colon R \to R$, определяемый следующим образом:

$$\sigma(e_j) = \begin{cases} e_{j+t^2}, & \text{если } j \vdots t, \\ e_{j+t(t+n)} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\sigma(a_j) = \begin{cases} -a_{j+t(t+n)}, & \text{если } j = st-1 \text{ или } j = st \text{ для } s = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_{j+t(t+n)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предложение 3 *Автоморфизм σ имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок σ равен* $2\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$, *если* $\frac{n+t}{\text{НОД}(n,t)}$ *нечётно, и* $\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *в противном случае;*

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок σ равен* $4\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$, *если* $\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *и* $\frac{n+t}{\text{НОД}(n,t)}$ *нечётны, и* $2\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *в противном случае.*

Пусть $n > 1$. Введём дополнительные обозначения.

Пусть $\{s_{1,i}, \dots, s_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней s, удовлетворяющих условиям i-го пункта теоремы 1, и таких, что $0 \leqslant s_{j,i} < (2t-1)\deg\sigma$ для $j = 1, \dots, \alpha_i$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{6} \left\{ X^{(i)}_{s_{j,i}} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\},$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\deg X^{(i)}_{s_{j,i}} = s_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \dots, 6 \text{ и } j = 1, \dots, \alpha_i;$$

$$\deg T = (2t-1)\deg\sigma.$$

Замечание. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X^{(i)}_{s_{j,i}}$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где идеал I порождён однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям (ниже мы используем вспомогательное обозначение: $\widetilde{X}^{(i)} = X^{(i)}$, когда

$\deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T$, и $\widetilde{X}^{(i)} = TX^{(i)}$ в противном случае; кроме того, для левых частей этих соотношений, имеющих вид $X^{(i)}X^{(j)}$, через m_i (соответственно m_i') обозначаем параметр m из теоремы 1, относящийся к i-й группе (соответственно j-й группе) условий из теоремы 1 ($i, j \in \{1, \ldots, 6\}$)):

$$X^{(1)}X^{(1)} = X^{(1)}X^{(5)} = X^{(1)}X^{(6)} = X^{(5)}X^{(5)} = X^{(6)}X^{(6)} = 0; \tag{1}$$

$$X^{(4)}X^{(4)} = -t\widetilde{X}^{(5)}; \quad X^{(1)}X^{(4)} = \widetilde{X}^{(2)}; \tag{2}$$

$$X^{(1)}X^{(3)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(1)}, & m_3' = 0; \\ 0, & m_3' > 0; \end{cases} \quad X^{(3)}X^{(3)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(3)}, & m_3 + m_3' \leqslant t-1; \\ -\widetilde{X}^{(5)}, & m_3 + m_3' > t-1; \end{cases} \tag{3}$$

$$X^{(3)}X^{(4)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(4)}, & m_3 = 0; \\ \widetilde{X}^{(6)}, & m_3 > 0,\ \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & m_3 > 0,\ \operatorname{char} K \neq 2; \end{cases} \tag{4}$$

$$X^{(3)}X^{(5)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(5)}, & m_3 + m_5' < t-1; \\ \widetilde{X}^{(1)}, & m_3 + m_5' = t-1, \operatorname{char} K = 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{5}$$

$$X^{(3)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(6)}, & m_3 + m_6' < t-1; \\ -\widetilde{X}^{(2)}, & m_3 + m_6' \geqslant t-1; \end{cases} \tag{6}$$

$$X^{(4)}X^{(5)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & \operatorname{char} K \neq 2; \end{cases} \quad X^{(4)}X^{(6)} = \begin{cases} -t\widetilde{X}^{(1)}, & m_6' = 0; \\ 0, & m_6' > 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$X^{(5)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & m_5 + m_6' + 1 \leqslant t-1; \\ 0, & m_5 + m_6' + 1 > t-1. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание. Более подробно, соотношение вида $X^{(4)}X^{(4)} = -t\widetilde{X}^{(5)}$ означает, что

$$X_s^{(4)}X_{s'}^{(4)} = \begin{cases} -tX_{s+s'}^{(5)}, & s + s' < \deg T; \\ -tTX_{s+s'-\deg T}^{(5)}, & s + s' \geqslant \deg T \end{cases}$$

для любых степеней $s,\ s' \in \{s_{1,4}, \ldots, s_{\alpha_4,4}\}$.

Аналогично соотношение вида $X^{(1)}X^{(5)} = 0$ означает, что $X_s^{(1)}X_{s'}^{(5)} = 0$ для любых $s \in \{s_{1,1}, \ldots, s_{\alpha_1,1}\}$ и $s' \in \{s_{1,5}, \ldots, s_{\alpha_5,5}\}$.

Теорема 4 (Основной результат, случай $n > 1$) *Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Далее рассмотрим случай $n=1$. Нам будет удобно оперировать со следующими условиями на произвольную степень s (параметры ℓ, r, m и p связаны с s так же, как в теореме 1):

(1) $r=0$, $\ell+p \not\vdots\, 2$;

(2) $r=2m$, $\ell+p \vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $s=0$ или $\operatorname{char} K=2$;

(3) $r=2m$, $\ell+p \vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$;

(4) $r=2t-2$, $\ell+p \not\vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$;

(5) $r=2m+1$, $\ell+p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$;

(6) $r=2m+1$, $\ell+p \vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$.

Пусть $\{s_{1,i},\dots,s_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней s, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0\leqslant s_{j,i}<(2t-1)\deg\sigma$ $(j=1,\dots,\alpha_i)$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}'=\bigcup_{i=1}^{6}\left\{X^{(i)}_{s_{j,i}}\right\}_{j=1}^{\alpha_i}\cup\{T\},$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$$\deg X^{(i)}_{s_{j,i}}=s_{j,i} \text{ для всех } i=1,\dots,6 \text{ и } j=1,\dots,\alpha_i;$$
$$\deg T=(2t-1)\deg\sigma.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}'=K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $n>1$ (см. (1)–(8)), а также следующими соотношениями:

$$X^{(1)}X^{(2)}=X^{(2)}X^{(2)}=X^{(2)}X^{(4)}=X^{(2)}X^{(5)}=X^{(2)}X^{(6)}=0;$$
$$X^{(2)}X^{(3)}=\begin{cases}\widetilde{X}^{(2)}, & m_2+m_3'\leqslant t-1,\ s_2>0 \text{ или } s_2=s_3'=0;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теорема 5 (Основной результат, случай $n=1$) *Пусть $n=1$, $R=R_{1,t}$ – соответствующая алгебра Мёбиуса. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Замечание. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 4 и 5 следует, в частности, что они коммутативны.

Следствие 6 (Описание подкольца $\mathrm{HH}^{(2t-1)*}(R)$**)**

$$\mathrm{HH}^{(2t-1)*}(R) = \bigoplus_{r\geqslant 0} \mathrm{HH}^{(2t-1)r}(R) \cong K[X_1, \ldots, X_a, T]/(\{X_{a_1}X_{a_2}\}_{1\leqslant a_1,a_2\leqslant a}),$$

где степень элемента T *следующая:*

$$\deg T = \begin{cases} n(2t-1), & n+t \,\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K = 2; \\ 2n(2t-1) & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Количество образующих X_i *описывается следующей формулой (под* 0 *подразумевается, что элементов* X_i *нет):*

$$a = \begin{cases} 0, & \text{НОД}(n,t) > 1; \\ 2, & n > 1,\ \text{НОД}(n,t) = 1,\ n+t \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K = 2; \\ 2, & n > 1,\ \text{НОД}(n,t) = 1,\ n \,\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 2, & n = 1,\ n+t \not\vdots\, 2 \ \textit{или}\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, степени элементов X_i $(i = 1, \ldots, a)$ *описываются следующим образом.*

Для $n = 1$ *степень* X_1 *равна* 0 *и, если* $a = 2$*, то степень* X_2 *равна* 1*. Для* $n > 1$ *и* НОД$(n,t) = 1$ *определим* ℓ_0 *как наименьшее натуральное число среди всех* ℓ*, удовлетворяющих условию* $\ell t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$*. Если* $a = 2$*, то степени* X_1 *и* X_2 *равны* $\ell_0(2t-1)$ *и* $(\ell_0+n)(2t-1)$ *соответственно. Если* $a = 1$*, то степень* X_1 *есть* $\ell_0(2t-1)$*, за исключением случая* $\ell_0 \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$*. В этом случае степень элемента* X_1 *равна* $(\ell_0+n)(2t-1)$*.*

Во **второй главе** мы получим описание бимодульной резольвенты. При помощи диаграммного поиска найдём минимальные проективные резольвенты простых R-модулей, из которых при помощи леммы Хаппеля получим описание модулей для бимодульной резольвенты.

Третья глава описывает аддитивную структуру кольца когомологий на основании бимодульной резольвенты, полученной во второй главе.

В **четвёртой главе** мы выберем множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. Заметим, что мы не стремимся вывести минимальное множество образующих. Несмотря на то, что это приводит к увеличению количества соотношений, в итоге мы получим более однородное и красивое описание кольца когомологий.

Пятая глава посвящена описаниям Ω-сдвигов образующих. Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса R. Любой коцикл $f \in \mathrm{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{s+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём *i-м сдвигом* коцикла f и будем обозначать через $\Omega^i(f)$. Доказательства данной главы состоят в прямой, хотя и громоздкой, проверке коммутативности квадратов вида

$$\begin{array}{ccc} Q_{s+s_0} & \xrightarrow{d_{s+s_0-1}} & Q_{s+s_0-1} \\ {\scriptstyle f_{s_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{s_0-1}} \\ Q_{s_0} & \xrightarrow{d_{s_0-1}} & Q_{s_0-1}. \end{array}$$

В завершающей **шестой главе** мы получим соотношения между образующими элементами алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. Для этого вычислим все произведения между образующими элементами, воспользовавшись формулой для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$:

$$\mathrm{cl}f_2 \cdot \mathrm{cl}f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1))$$

Техническое доказательство точности начального отрезка бимодульной резольвенты вынесено в **приложение**. Мы используем результат, полученный Ю. В. Волковым, А. И. Генераловым, С. О. Ивановым, который утверждает, что для доказательства точности указанной резольвенты нам достаточно будет показать, что $d^2 = 0$.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] А. И. Генералов, М. А. Качалова (Пустовых), *Алгебра Йонеды алгебры Мёбиуса.* // Зап. научн. семин. ПОМИ, 289 (2002), 90–112.

[2] А. И. Генералов, М. А. Качалова (Пустовых), *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* // Зап. научн. семин. ПОМИ, 321 (2005), 36–66.

[3] М. А. Качалова (Пустовых), *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* // Зап. научн. семин. ПОМИ, 330 (2006), 173–200.

[4] М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* // Зап. научн. семин. ПОМИ, 388 (2011), 210–246.

Другие публикации:

[5] М. А. Качалова (Пустовых), *Об умножениях в кольце когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* // Межд. алг. конференция, посв. 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева. Тезисы докладов (2007), 42–43.

[6] М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* // Межд. алг. конференция, посв. 70-летию А. В. Яковлева. Тезисы докладов (2010), 55–58.