

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ПЛАТОНОВ Виктор Викторович

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург, 2011

Работа выполнена на кафедре теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент СЕМЕНОВ Борис Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ФИЛИППОВ Сергей Борисович
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

кандидат физико-математических наук,
доцент ЕРШОВА Зинаида Георгиевна
(Тутаевский филиал ФГБОУ ВПО
"РГГА имени П.А. Соловьева")

Ведущая организация: Петербургский государственный
университет путей сообщения

Защита состоится 22 декабря 2011 г. в 15.00 часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан " __ " _____ 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Е. В. Кустова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современных конструкциях в качестве конструкционных материалов широко используются композитные, синтетические и другие неметаллические материалы. Отличительной особенностью этих материалов является повышенная податливость на межслоевой сдвиг. Для них даже небольшие по величине касательные напряжения существенно влияют на общую деформацию. Поэтому расчет пластин и оболочек из таких материалов с использованием теории Кирхгофа-Лява может приводить к большим погрешностям.

В качестве элементов конструкций все чаще используются нанообъекты, и одной из задач наномеханики является необходимость расчета деформации, прочности, устойчивости нанообъектов. Проблема состоит в том, что свойства наноразмерных структурных элементов отличаются от свойств в классической континуальной механике. Эти различия зависят от размера структурного элемента.

Для расчета напряженно-деформируемого состояния, решения задач устойчивости нанообъектов точность классической теории пластин и оболочек становится недостаточной. В связи с этим используются неклассические теории, построенные как и классическая теория методом гипотез, но менее жестких, чем гипотезы Кирхгофа-Лява.

В работе рассматриваются некоторые задачи устойчивости пластин и оболочек на основе неклассических теорий: теории изгиба пластин Тимошенко-Рейсснера, теории анизотропных оболочек С.А. Амбарцумяна.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является решение некоторых задач устойчивости трансверсально-изотропных пластин и оболочек на основе неклассических теорий: теории Тимошенко-Рейсснера, уточненной теории С.А. Амбарцумяна.

Научная новизна. Для сжатой в продольном направлении пластинки, находящейся в канале с жесткими стенками, получены критические значения сжимающего напряжения и длины прямых участков налегания на каждом этапе нагружения по классической теории и теории Тимошенко-Рейсснера.

Проведен анализ результатов, полученных при аналитическом решении и при использовании трехмерной теории упругости в пакете ANSYS.

Для трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием нормального давления с использованием уточненной теории С.А. Амбарцумяна получена критическая нагрузка, определены формы потери устойчивости. Выполнено сравнение величины нормального давления, полученного при использовании некоторых неклассических теорий оболочек.

Для трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии на основе теории С.А. Амбарцумяна получена критическая нагрузка, проведено сравнение с результатами, полученными по теории Тимошенко-Рейсснера.

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически корректной постановкой задач, использованием строгих аналитических методов, сравнением аналитических и численных результатов.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 6 научных статей и тезисов докладов, в том числе 4 работы опубликованы в рецензируемых журналах и изданиях.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались: на семинарах кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (Санкт-Петербург, 2009), на XVIII Всероссийской школе-конференции молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках" (Пермь, 2009).

Результаты, выносимые на защиту:

1. Для сжатой в продольном направлении пластинки, находящейся в канале с жесткими стенками, получены критические значения сжимающих напряжений и длины участков налегания на каждом этапе нагружения по классической теории и теории Тимошенко-Рейсснера.

2. Выполнен анализ задачи методом конечных элементов, который показал, что порядки сжимающих напряжений, полученные при решении

задачи в пакете ANSYS, совпадают с порядками, полученными в аналитическом решении, причем расчеты по теории Тимошенко-Рейсснера дают более точные результаты, чем расчеты по классической теории.

3. Для трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием нормального давления, по уточненной теории С.А. Амбарцумяна определены формы потери устойчивости, критическая нагрузка.

4. Для цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия, по классической теории и теории С.А. Амбарцумяна определены критические нагрузки для трансверсально-изотропного и изотропного материалов, проведено сравнение с результатами, получающимися по теории Тимошенко-Рейсснера.

Структура диссертации и объем работы. Диссертация изложена на 75 страницах машинописного текста и состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы, включающего 115 источника. Диссертация иллюстрирована 18 рисунками и содержит 6 таблиц.

Содержание работы

Во Введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, содержится обзор литературы по теме диссертации, сформулированы цели и задачи работы и приведены результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена исследованию устойчивости системы, показанной на рисунке 1. Конструкция моделируется тонкой пластинкой длиной a , шириной h , защемленной между двумя жесткими основаниями с зазором Δ . Пластинка сжимается в продольном направлении напряжением σ_x . При достижении напряжением первого критического значения пластинка теряет устойчивость и начинает прогибаться. После соприкосновения с основанием начинает образовываться участок налегания пластинки к жесткому основанию. Когда участок налегания становится до-

статочно большим, он тоже теряет устойчивость. Пластинка "процелкивается" второй раз и образуются три зоны прилегания пластинки к основаниям. При последующем нагружении участки налегания также теряют устойчивость. По такому алгоритму получается гофрированная система, показанная на рисунке 1.

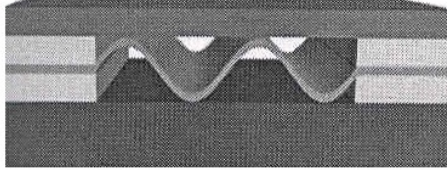


Рис. 1: Гофрировка с фиксированной амплитудой и периодом.

Данная задача решалась с использованием классической теории. Дифференциальное уравнение изгиба пластинки в этом случае имеет следующий вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - q^0 = 0.$$

Также задача решалась по уточненной теории Тимошенко-Рейсснера:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q^0 + \frac{h^2}{10} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{d^2 q^0}{dx^2},$$

где $q^0 = - \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) h$ — фиктивная поперечная нагрузка, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

Для первого критического напряжения получаем:

$$\sigma_{kr1}^{KL} = \frac{4\pi^2 D}{ha^2},$$

$$\sigma_{kr1}^{TR} = \frac{4\pi^2 D}{ha^2} (1 - 4\pi^2 \beta),$$

где β — малый параметр порядка $O\left(\frac{h^2}{a^2}\right)$.

Второе критическое значение и длины участков налегания, которые теряют устойчивость:

$$a_1 = \frac{a}{4}, \quad \sigma_{kr2}^{KL} = \frac{64\pi^2 D}{ha^2},$$

$$a_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 64\pi^2\beta(a)}}{8} \right) a, \quad \sigma_{kr2}^{TR} = \frac{4\pi^2 D}{ha_1^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_1)).$$

На рисунке 2 показаны основные формы равновесия пластинки, в таблице 1 даны интервалы изменения напряжения при нагрузке по классической теории и теории Тимошенко-Рейсснера.

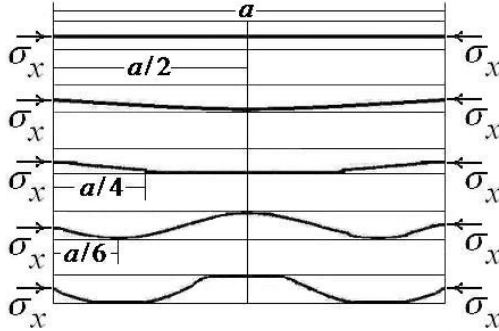


Рис. 2: Основные формы равновесия пластинки.

Таблица 1. Интервалы изменения напряжения при нагрузке.

Классическая теория	Теория Тимошенко-Рейсснера
$\sigma_x \leq \frac{4\pi^2 D}{ha^2}$	$\sigma_x \leq \frac{4\pi^2 D}{ha^2} (1 - 4\pi^2\beta(a))$
$\frac{4\pi^2 D}{ha^2} \leq \sigma_x \leq \frac{16\pi^2 D}{ha^2}$	$\frac{4\pi^2 D}{ha^2} (1 - 4\pi^2\beta(a)) \leq \sigma_x \leq \frac{16\pi^2 D}{ha^2} (1 - 16\pi^2\beta(a))$
$\frac{16\pi^2 D}{ha^2} \leq \sigma_x \leq \frac{64\pi^2 D}{ha^2}$	$\frac{16\pi^2 D}{ha^2} (1 - 16\pi^2\beta(a)) \leq \sigma_x \leq \frac{4\pi^2 D}{ha_1^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_1))$
$\frac{64\pi^2 D}{ha^2} \leq \sigma_x \leq \frac{144\pi^2 D}{ha^2}$	$\frac{4\pi^2 D}{ha_1^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_1)) \leq \sigma_x \leq \frac{4\pi^2 D}{ha_2^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_2))$
$\frac{144\pi^2 D}{ha^2} \leq \sigma_x \leq \frac{576\pi^2 D}{ha^2}$	$\frac{4\pi^2 D}{ha_2^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_2)) \leq \sigma_x \leq \frac{16\pi^2 D}{ha_2^2} (1 - 16\pi^2\beta(a_2))$

Сравнение выражений для соответствующих значений критических напряжений в теориях Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера показывает, что напряжения в уточненной теории меньше напряжений, полученных по классической теории на величину порядка $\left(\frac{h}{a}\right)^2$. А длины прямых участков при использовании теории Тимошенко-Рейсснера больше на величину порядка $\left(\frac{h}{a}\right)$.

Расчет задачи методом конечных элементов производился с помощью пакета ANSYS. Теоретическое решение было получено в рамках линейной теории упругости. В пакете ANSYS решалась задача потери устойчивости по нелинейной теории и контактная задача. Рассматривалась тонкая пластинка, защемленная между двумя жесткими основаниями с зазором. Пластинка сжималась в продольном направлении и теряла устойчивость. При постепенном увеличении нагрузки был реализован алгоритм, рассмотренный в аналитическом решении. Анализ результатов показывает, что порядки сжимающих напряжений, полученных при решении задачи в пакете ANSYS, совпадают с порядками, полученными в аналитическом решении, причем модель Тимошенко-Рейсснера дает более точные результаты, чем классическая теория.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием нормального давления. Задача рассматривается с использованием уточненной теории, учитывающей поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну. Разрешающее уравнение данной уточненной теории, относительно нормального перемещения w имеет вид

$$[c^2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^*\Delta] (\Delta + 2)w = \frac{R^2}{Eh}(1 - h^*\Delta)(\Delta + 1 - \nu)Z, \quad (1)$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1 - \nu)R^2}, h^* = \frac{h^2}{10(1 - \nu^2)R^2} \frac{E}{G'}, \Delta = \frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right],$$

E — модуль Юнга в тангенциальных направлениях, ν — коэффициент Пуассона, G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки, A и B — коэффициенты первой квадратичной формы.

Для определения критического давления рассматривается основное напряженное состояние оболочки, которое до потери устойчивости является безмоментным, тогда в этом случае уравнение устойчивости сферической оболочки примет вид

$$[c^2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^*\Delta] (\Delta + 2)w + \frac{qR}{2Eh}(1 - h^*\Delta)(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w = 0.$$

Решение уравнения должно удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере. В силу малости параметров оболочки $c^2 \ll 1$, $h^* \ll 1$

и с принятой здесь точностью, следуя В.З. Власову, ограничимся классом решений, являющихся решениями дифференциального уравнения:

$$\Delta w + \lambda w = 0.$$

Нетривиальное ограниченное решение этого уравнения существует только при $\lambda_n = n(n+1)$. Минимизируя функцию $q = q(\lambda)$, с принятой точностью $\left(\frac{h}{R}\right)^2$, определяем критическое значение q_{kr}^{TI} :

$$q_{kr}^{TI} = \frac{2Eh}{R}(2c - 2\nu c^2 - h^*). \quad (2)$$

При значении $h^* = 0$ получим выражение критического давления для изотропной сферической оболочки:

$$q_{kr}^I = \frac{2Eh}{R}(2c - 2\nu c^2).$$

Для решения той же задачи в классической постановке рассматривается уравнение устойчивости сферической оболочки:

$$\frac{D}{hR^2}\Delta^3 w + \frac{qR}{2h}\Delta^2 w + E\Delta w = 0.$$

Критическое давление в этом случае имеет вид:

$$q_{kr}^{KL} = \frac{2Eh}{R}2c.$$

Выражение (2) при этом можно переписать в следующем виде:

$$q_{kr}^{TI} = q_{kr}^{KL} \left(1 - \frac{\nu}{2\sqrt{3(1-\nu)}} \frac{h}{R} - \frac{2\sqrt{3(1-\nu)}}{10(1-\nu^2)} \frac{h}{R} \frac{E}{G'} \right). \quad (3)$$

Из формулы (3) для трансверсально-изотропного материала видно, что при некоторых значениях отношений h/R , E/G' величина критического давления, найденная с учетом влияния поперечного сдвига, может существенно отличаться от критического давления, найденного по классической теории. Учет поперечных сдвигов снижает величину критического давления. Условие применимости формулы (3):

$$\frac{h}{R} \frac{E}{G'} \ll 1. \quad (4)$$

В случае невыполнения этого условия уточненная теория является асимптотически противоречивой.

В случае выполнения условия (4) будет автоматически выполняться условие $\left(\frac{h}{R}\right)^2 \ll \frac{G'}{E}$, из чего следует, что напряжение в оболочке в момент потери устойчивости

$$\sigma < G',$$

что необходимо для использования двумерной теории оболочек.

Таблица 2. Влияние параметра поперечной жесткости на сдвиг.

$q_{kp}^{TI}/q_{kp}^{KL}, \quad h/R = 0.05$	$q_{kp}^{TI}/q_{kp}^{KL}, \quad h/R = 0.01$	E/G'	G'/E
0.91	0.98	5	0.2
0.83	0.97	10	0.1
0.75	0.95	15	0.07
0.66	0.93	20	0.05
0.58	0.92	25	0.04
0.50	0.90	30	0.03
0.18	0.83	50	0.02

В таблице 2 показано влияние параметра поперечной жесткости на сдвиг при расчете статической критической нагрузки в сравнении с классической теорией пологих оболочек. Как видно из таблицы 2, теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, уточняет классическую теорию для трансверсально-изотропных материалов. Чем больше отношение h/R и меньше отношение G'/E , тем существеннее уточнение. Так же из таблицы 2 можно проверить условие применимости (4). Например, для $h/R = 0.05$ можно рассматривать отношение G'/E , величина которого больше 0.05, т. е. $G'/E > 0.2$. Для $h/R = 0.01$, как следует из таблицы 2, нужно использовать величины $G'/E > 0.07$. В противном случае будет нарушаться условие (4). С принятой здесь точностью $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ члены большего порядка были отброшены. Это означает, что в случае нарушения условия (4) следующий член асимптотического разложения может иметь большее влияние на величину критического давления, чем оставленные.

Для определения форм потери устойчивости решение уравнения (1)

представляется в виде

$$w(\alpha, \beta) = P(\alpha) \cos k\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Полная система решений уравнения представлена в таблице 3, где $P_{n,\alpha}^0 = P_n^0(\cos \alpha)$. Полиномы Лежандра $P_{n,\alpha}$ в интервале изменения $0 < \alpha < \pi$ имеют n нулей. Собственные функции Лежандра $P_{n,\alpha}^k$ имеют $n - k$ нулей. Функции $\sin n\beta$ и $\cos n\beta$ обращаются в нуль на меридианах. Функции $P_{n,\alpha}^k$ обращаются в нуль на $n - k$ широтах. Таким образом, этими меридианами и широтами оболочка разбивается на участки, на которых w_n не обращается в нуль. Это означает, что параметр λ_n определяет вид формы потери устойчивости оболочки. Чем больше параметр λ_n , тем меньше размеры полуволн. Любая форма потери устойчивости может быть выражена через эту систему. Таким образом, из представленного анализа следует, что для трансверсально-изотропной сферической оболочки под воздействием нормального давления учет поперечного сдвига не приводит к появлению новых форм потери устойчивости.

Таблица 3. Полная система решений уравнения.

k	$w_n(\alpha, \beta)$	Первые члены ряда
0	$w_0(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^0$	$1, \cos \alpha, 0.5(3 \cos^2 \alpha - 1), \dots$
1	$w_{-1}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^1 \sin \beta$	$0, \sin \alpha \sin \beta, 3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \dots$
	$w_1(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^1 \cos \beta$	$0, \sin \alpha \cos \beta, 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta, \dots$
2	$w_{-2}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^2 \sin 2\beta$	$0, 0, 3 \sin^2 \alpha \sin 2\beta, \dots$
	$w_2(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^2 \cos 2\beta$	$0, 0, 3 \sin^2 \alpha \cos 2\beta, \dots$
...
n	$w_{-n}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^n \sin n\beta$...
	$w_n(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^n \cos n\beta$...

В третьей главе с использованием классической теории и уточненной теории С.А. Амбарцумяна рассматривается трансверсально-изотропная цилиндрическая оболочка при осевом сжатии. Уравнения устойчивости цилиндрической оболочки для этих теорий соответственно:

$$\frac{D}{h} \Delta^4 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + p \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = 0,$$

$$D \Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2} (1 - h^{**} \Delta) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = (1 - h^{**} \Delta) \Delta^2 Z,$$

где

$$h^{**} = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G'},$$

Z - нормальная составляющая внешней нагрузки, E - модуль Юнга в тангенциальных направлениях, ν - коэффициент Пуассона, G' - модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки. Решение ищется в виде:

$$w = C \sin \frac{m\pi\alpha}{L} \sin \frac{n\beta}{R}.$$

Выражения для определения критической нагрузки по классической и уточненной теории соответственно:

$$p^{KL} = -E \left[c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right],$$

$$p^A = -E \left[c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2 (1 + h^*(\lambda^2 + n^2))} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right],$$

где

$$\lambda = \frac{m\pi R}{L}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad h^* = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)R^2G'}.$$

Минимизируя выражения для нагрузки по переменным λ и n находим соответствующие значения критической нагрузки:

$$p_{kr}^{KL} = -2cE,$$

$$p_{kr}^A = -2cE + h^*E.$$

На Рис. 3 показан график сжимающей нагрузки. Верхняя ветвь соответствует классической теории, остальные ветви соответствуют уточненной теории и построены при разных отношениях G'/E . Минимум соответствует критической нагрузке. Видно, что чем меньше отношение G'/E , тем меньше критическая нагрузка и тем существеннее уточнение результатов, получающихся по классической постановки. Выражение для критической нагрузки, найденной на основе уточненной теории С.А. Амбарцумяна, полностью совпадает с нагрузкой, найденной с использованием модели Тимошенко-Рейсснера.

В заключении представлены результаты выносимые на защиту.

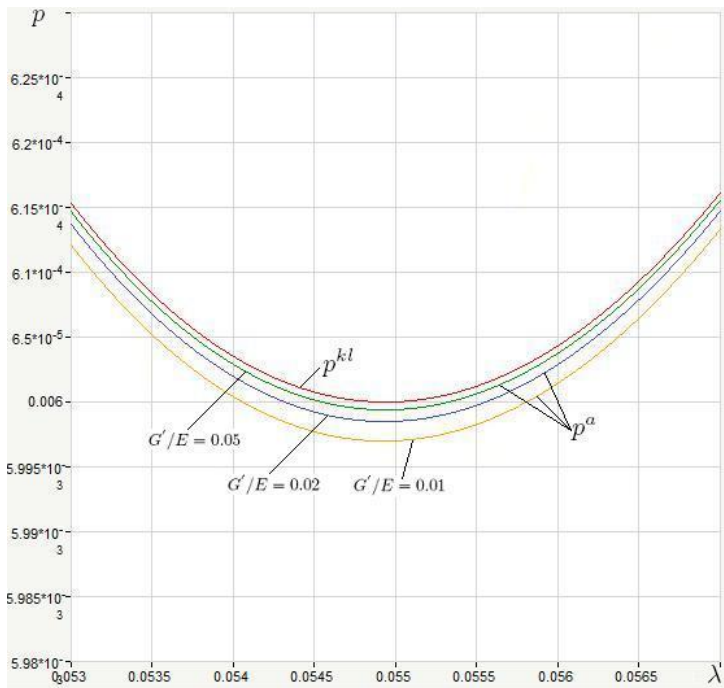


Рис. 3: График зависимости сжимающей нагрузки p^{kl} и p^a от параметра λ при разных значениях отношения G'/E .

Публикации автора по теме диссертации.

1. Платонов В. В. Устойчивость наногофрированной пластинки. // Вестник СПбГУ. – 2008. – С. 1, № 1. – С. 118–125.
2. Платонов В. В. Устойчивость трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием нормального давления. // Вестник СПбГУ. – 2010. – С. 1, № 2. – С. 140–143.
3. Платонов В. В. Устойчивость трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием динамического нормального давления. // Вестник СПбГУ. – 2010. – С. 1, № 3. – С. 105–110.
4. Платонов В. В. Устойчивость и колебания цилиндрической оболочки при осевом сжатии в неклассической постановке. // Вестник СПбГУ.

– 2011. – С. 1, № 1. – С. 132–137.

5. Платонов В. В. Применение уточненной теории к исследованию трансверсально-изотропной сферической оболочки. // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" за 2009-2010. Издательство СПбГУ, — 2011. — С. 67–80.
6. Платонов В. В. Применение уточненной теории пластин к задачам формирования гофрированных нанобъектов. // XVIII Всероссийская школа-конференция молодых ученых "Математическое моделирование в естественных науках". — 07-09.11.2009, Пермь, Россия. Тезисы. С. 27.