Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Образцова Светлана Анатольевна

Экстремальные свойства минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов.

специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011 г.

Работа выполнена в лаборатории математической логики Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, Пастор Алексей Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Дольников Владимир Леонидович (Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова)
	кандидат физико-математических наук, Берлов Сергей Львович (Государственное Общеобразовательное учреждение Физико-Математический Лицей №239 Центрального Района Санкт-Петербурга)
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится « » .... 2011 г. в .... часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, комн. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Адрес диссертационного совета: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр. д. 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан « » .... 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.232.29

доктор физ.-мат. наук, профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению понятия вершинной связности, которое является одним из естественных обобщений понятия связности и, вследствие этого, имеет большое теоретическое и практическое значение. В работе рассматриваются *k-связные графы*, то есть графы, содержащие как минимум $k+1$ вершину, и сохраняющие связность при удалении произвольных $k-1$ вершин. Изучаются k-связные графы, обладающие следующими двумя свойствами: *минимальностью* и *минимальностью по стягиванию*, то есть k-связные графы, которые теряют k-связность как при удалении любого ребра, так и при стягивании любого ребра.

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после работы У. Татта, в которой было дано полное описание структуры трехсвязного графа в терминах удаления и стягивания ребер. У. Татт доказал, что из любого трехсвязного графа при помощи удаления и стягивания ребер можно получить *колесо* — граф, состоящий из простого цикла и вершины, смежной со всеми вершинами этого цикла. Существенно, что все графы, получающиеся на промежуточных шагах этого процесса, также трехсвязные. Вопрос о том, какова структура минимального и минимального по стягиванию k-связного для k больших 3, был рассмотрен в статье Р. Халина в 1969 году. В этой статье был задан вопрос о том, какова константа c_k, такая что количество вершин степени k в любом минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе G равно по крайней мере $c_k|G|$, в этой же статье и были получены первые нижние оценки для c_k при $k = 4, 5, 6$.

На настоящий момент ситуация с верхними оценками для c_k чрезвычайно проста: никаких верхних оценок для c_k при $k \geq 5$ не существует (ни общих, ни для частных случаев k). Существующие верхние оценки для минимальных или минимальных по стягиванию графов построены на основании графов обладающих строго одним из указанных свойств. Кроме того, для минимальных по стягиванию графов эти оценки существуют только для $k = 5, 6$.

Результаты, касающиеся нижних оценок для c_k, значительно более разнообразны. Начиная с 70-х годов исследовались в основном k-связные графы обладающие только одним из двух свойств — минимальностью или минимальностью по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером. Он доказал, что в минимальном k-связном графе любой цикл содержит по крайней мере одну вершину степени k. Следствием этого утверждения является следующая нижняя оценка на долю вершин степени k от всего множества вершин — $\frac{k-1}{2k-1}$.

Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 4, 5, 6 и 7-связных графов. Случай 4-связных графов полностью описан в работах М. Фонте и Н. Мартинова, для 4-связных графов также получено, что из минимальности по стягиванию следует минимальность и доказано, что $c_4 = 1$, то есть все вершины такого графа имеют степень 4. Для графов более высокой связности существуют примеры минимальных по стягиванию, но не минимальных графов, и, таким образом, рассмотрение графов, обладающих обоими свойствами, становится содержательным. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов подробно изучена в серии статей К. Андо, А. Канеко и К. Каварабаяши. В этой серии доказано, что в минимальном по стягиванию 5-связном графе любая вершина смежна по крайней мере с двумя вершинами степени 5. Из этого утверждения следует нижняя оценка на долю количества вершин степени 5, полученная К.Андо, а именно $\frac{2}{5}$.

Параллельно с работами К. Андо и др. минимальные по стягиванию 5-связные графы рассматривались в серии статей Ж. Су, Кс. Юана и Ч. Куина, в которой были получены аналогичные результаты и доказана более сильная оценка количества вершин степени 5. К сожалению, первые работы этой серии публиковались только по-китайски. Лучшая оценка в серии составляет $\frac{1}{2}$. Кроме того, эти авторы указывают на невозможность улучшения оценки, полученной К. Андо и др., с помощью прежних методов (т.е. изучения числа вершин степени 5 только в окрестности вершин графа, без рассмотрения вершин, находящихся на расстоянии больше 1), ссылаясь на приведенный в одной из статей серии пример минимального по стягиванию 5-связного графа, окресности некоторых вершин степени 5 которого содержат ровно две вершины степени 5. Впрочем, отметим, что примеры графов, в которых значительное число вершин имеет ровно двух соседей степени 5, приводились также в работах К. Андо и др.

Относительно минимальных по стягиванию 6-связных графов полученные продвижения значительно скромнее. К. Андо и др. доказали, что для любого минимального по стягиванию 6-связного графа G выполнено $|V_6(G)| \geq \frac{1}{7}|G|$.

История изучения 7-связных графов несколько длинее, поскольку даже небольшие продвижения для этих графов требовали существенных усилий. Существование хотя бы одной вершины степени 7 в минимальном по стягиванию 7-связном графе было получено как следствие результата Е. Эгава. Позднее, М. Криселл доказал существование двух вершин степени 7 и предположил существование таких вершин на расстоянии не более двух. Ж. Су и Кс. Юан это предположение доказали. В дальнейшем Ж. Су, Кс. Юан и Л. Мин значительно улучшили оценку, полученную К. Андо, и доказали, что для любого минимального по стягиванию 7-связного графа выполнено $|V_7(G)| \geq \frac{1}{22}|G|$.

Для минимальных по стягиванию k-связных графов при $k \geq 8$ пока не доказано даже утверждение о существовании хотя бы одной вершины, имеющей степень k.

Цель работы.

1. Получить новые результаты о локальной структуре минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов. В частности, исследовать свойства *особых* вершин, то есть вершин степени k, степени всех смежных с которыми больше k, и их окрестностей.

2. С помощью полученных структурных лемм доказать нижние оценки для c_k при $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

3. Получить верхние оценки для c_k для произвольного $k \geq 5$.

Методы исследований. В работе использовались как классические методы исследования минимальных по стягиванию графов (изучение окрестностей вершин), так и новые, позволяющие изучать вершины находящиеся на расстоянии 2.

Основные результаты работы.

1. Доказаны нижние оценки для c_k при $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, а именно $\frac{4}{7}$ для $k = 5$ и $\frac{1}{2}$ для $k = 6, 7, 8, 9, 10$.

2. Построены серии минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов и на их основе доказаны верхние оценки для c_k при произвольном $k \geq 5$. При этом получены следующие оценки:

- для $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (с учетом п.1) доказано, что $\frac{4}{7} \le c_5 < \frac{17}{22}$, $\frac{1}{2} \le c_6 < \frac{21}{31}$, $\frac{1}{2} \le c_7 < \frac{31}{45}$, $\frac{1}{2} \le c_8 < \frac{46}{73}$, $\frac{1}{2} \le c_9 < \frac{9}{14}$, $\frac{1}{2} \le c_{10} < \frac{401}{665}$;
- для нечетного $k > 5$ доказано, что $c_k < \frac{3\ell^2+8\ell+3}{6\ell^2+9\ell+3}$, где $k = 2\ell + 3$;
- для четного $k > 5$ доказано, что $c_k < \frac{9\ell^3-12\ell^2-7\ell+12}{18\ell^3-42\ell+26\ell}$, где $k = 2\ell$.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств k-связных графов. В частности, структурные леммы, являющиеся промежуточными результатами данной работы, могут быть использованы в дальнейшем для изучения минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов, где $k > 10$.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по дискретной математике ПОМИ РАН и на семинаре в Max Planck Institute for mathematics, Bonn, Germany.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–4]. Работы [1,2] опубликованы в издании, входящем в список рекомендованных Высшей аттестационной комиссией на момент публикации. В работах [2,3] диссертанту принадлежит основная идея доказательства и часть технических выкладок. Соавтору принадлежит постановка задачи, формулировки ряда теорем и оставшаяся часть технических выкладок.

Структура и объем диссертации. Диссертация объемом 82 страницы состоит из введения, шести глав, разбитых на разделы, и списка литературы, содержащего 38 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** обсуждаются вопросы и проблемы наиболее тесно связанные с рассматриваемыми в диссертации задачами, состояние исследований в данной области.

В **первой главе** даются основные определения и приводятся уже известные результаты, используемые в дальнейшем. Там же вводится понятие *особой* вершины, то есть вершины степени k, несмежной с другими вершинами степени k.

Изучение особых вершин играет ключевую роль при доказательстве нижних оценок. Для минимального k-связного графа, не содержащего особых вершин, при помощи теоремы В. Мадера легко доказывается, что не менее половины вершин графа имеют степень k. Поэтому для доказательства нижних оценок нам нужно оценить сверху количество особых вершин минимального и минимального по стягиванию k-связного графа.

Во **второй главе** доказываются леммы, описывающие структуру минимальных и минимальных по стягиванию графов. В частности, во второй главе доказывается лемма, имеющая существенное значение для ограничения количества рассматриваемых в дальнейшем возможностей локального строения минимального графа. Эту лемму можно вывести как следствие одной из теорем, доказанных В.Мадером, но в диссертации для нее дано значительно более простое и наглядное доказательство.

Лемма 11. Пусть G — минимальный по стягиванию k-связный граф и $|G| \geq 2k$. Рассмотрим произвольную вершину графа G и обозначим ее a. Тогда существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, отделяющее компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.

Для изучения окрестности особой вершины рассматривается минимальная компонента, отделяемая k-разделяющим множеством, содержащим рассматриваемую особую вершину и вершину, с ней смежную. Благодаря лемме 11 рассмотрение таких компонент сводится к конечному разбору случаев.

В этой же главе доказывается следующая теорема.

Теорема 5. В минимальных и минимальных по стягиванию 6-связных графах особых вершин не существует.

Из доказанного в первой главе, в частности, следует, что в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе, k-разделяющие множества, содержащие особую вершину и смежную с ней, могут отделять минимальные компоненты, состоящие только из 3 или 4 вершин.

В **третьей главе** изучаются вершины, находящиеся на расстоянии 1 и 2 от особой вершины, содержащейся, вместе с вершиной с ней смежной, в k-разделяющем множестве, отделяющем компоненту из 3 вершин.

В **четвертой главе** изучаются вершины, находящиеся на расстоянии 1 и 2 от особой вершины, содержащейся, вместе с вершиной с ней смежной, только в k-разделяющих множествах, отделяющих компоненту из 4 вершин.

В **пятой главе** доказываются нижние оценки на c_k при $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Для доказательства оценок в случаях $7, 8, 9, 10$ доказываются следующие существенные структурные леммы.

Лемма 29. Пусть G — минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{7, 8\}$ и $|G| \geq 2k$. Тогда количество особых вершин графа G не превосходит количества вершин степени k, смежных как минимум с двумя вершинами степени k.

Лемма 30. Пусть G — минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{9, 10\}$ и $|G| \geq 2k$. Обозначим через S_0 множество всех особых вершин графа G и через S_2 — множество вершин степени k, смежных хотя бы с шестью вершинами степени k. Тогда $4|S_2| \geq |S_0|$.

Теорема 8. Выполнены следующие неравенства: $c_5 \geq \frac{4}{7}$ и $c_k \geq \frac{1}{2}$, где $k = 6, 7, 8, 9, 10$.

В **шестой главе** строятся три серии минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов, отдельно для 5, четного и нечетного k. С помощью построеных графов доказываются верхние оценки для c_k.

Теорема 10. Выполнено неравенство $c_5 < \frac{17}{22}$.

Теорема 12. Предположим, что $k > 6$ — нечетное число и $k = 2\ell + 3$. Тогда выполнено неравенство $c_k < \frac{3\ell^2+8\ell+3}{6\ell^2+9\ell+3}$.

Теорема 14. Предположим, что $k > 6$ — четное число и $k = 2\ell$. Тогда выполнено неравенство $c_k < \frac{9\ell^3-12\ell^2-7\ell+12}{18\ell^3-42\ell+26}$.

Таким образом, для $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ в пятой и шестой главах получены следующие оценки: $\frac{4}{7} \leq c_5 < \frac{17}{22}$, $\frac{1}{2} \leq c_6 < \frac{21}{31}$, $\frac{1}{2} \leq c_7 < \frac{31}{45}$, $\frac{1}{2} \leq c_8 < \frac{46}{73}$, $\frac{1}{2} \leq c_9 < \frac{9}{14}$, $\frac{1}{2} \leq c_{10} < \frac{401}{665}$.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] С.А.Образцова, *О локальной структуре 5 и 6-связных графов*, // Записки научных семинаров ПОМИ, 381 (2010), 88–96.

[2] С.А.Образцова, А.В.Пастор, *О локальной структуре 7 и 8-связных графов*, // Записки научных семинаров ПОМИ, 381 (2010), 97–111.

Другие публикации:

[3] С.А.Образцова, А.В.Пастор, *О вершинах степени k минимальных и минимальных относительно стягивания k-связных графов: верхние оценки*, // ПОМИ препринт, 5/2011.

[4] С.А.Образцова, *О локальной структуре 9 и 10-связных графов*, // ПОМИ препринт, 6/2011