САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КОСТЫРЕВ Игорь Иванович

ОТНОШЕНИЕ АННУЛИРОВАНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОЛУГРУПП

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и
теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург 2011

Работа выполнена на кафедре алгебры факультета математики Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена

Научные руководители: доктор физико-математических наук, профессор $\boxed{\text{ЛЯПИН Евгений Сергеевич}}$
доктор физико-математических наук, профессор ГОРДЕЕВ Николай Леонидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор КУБЛАНОВСКИЙ Станислав Ицхокович (ТПО «Северный очаг»)

кандидат физико-математических наук, доцент БОРИСОВ Анатолий Алексеевич (Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского)

Ведущая организация: Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится “___”__________2011 г. в __ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27, ауд. 311 (помещение ПОМИ РАН).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “____” ____________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Изучение многообразий алгебраических систем с теми или иными условиями конечности является определяющим направлением в современных алгебраических исследованиях. Одним из таких условий конечности является финитная аппроксимируемость алгебраических систем относительно предикатов. Широкое применение аппроксимационных методов связано с именем академика Мальцева. В его работах середины прошлого века сформировалось общее понятие финитной аппроксимируемости алгебраических систем относительно предикатов и получен ряд основополагающих результатов.

Важность введённого А. И. Мальцевым понятия в значительной степени определяется связью с алгоритмическими проблемами, именно, как отметил А. И. Мальцев [1], финитная аппроксимируемость конечно порождённой алгебраической системы в многообразии, заданном конечным набором тождеств, относительно некоторого предиката, влечёт алгоритмическую разрешимость проблемы этого предиката в рассматриваемой системе. Например, из теоремы Холла о финитной аппроксимируемости конечно порождённых метабелевых групп следует положительное решение проблемы равенства слов для метабелевых групп. Аппроксимационными методами С. И. Кублановским был положительно решён вопрос алгоритмической разрешимости проблемы делимости в целой серии многообразий полугрупп. М. В. Сапир установил эквивалентность для ряда многообразий полугрупп проблемы равенства и финитной аппроксимируемости конечно определённых полугрупп.

Выбор того или иного предиката обусловлен ролью, которую он играет в теории определённых классов алгебраических систем. Так, например, в группах важнейшими предикатами являются: предикат равенства, регулярной сопряжённости, предикат вхождения в подгруппу, в конечно порождённую подгруппу. В кольцах и алгебрах важную роль играют предикат равенства, нильпотентности, вхождения в подкольцо (подалгебру). В полугруппах исследовались предикаты делимости, отношения Грина, предикат равенства и вхождения в различного вида подсистемы (идеал, подполугруппа, подгруппа и т.п.). Указанные предикаты явились объектом многочисленных исследований и с точки зрения алгоритмической разрешимости проблем этих предикатов и с точки зрения аппроксимации. В полугруппах особо значимым является предикат делимости. На языке делимости определяются отношения Грина, простота, регулярность и её модификации, распознаваемость (в смысле Эйленберга [2]) и другие важные свойства полугрупп. Следует отметить, что распознаваемость полугрупп систематически изучается целым рядом зарубежных авторов, таких, как Г. Лаллеман, Д. Перрен, К. Рейс, С. Рэнкин, Ж. Сакарович, Т. Тамура, Г. Тьеррен, С. Эйленберг и др. в связи с потребностями теории кодирования.

Одним из важных случаев отношения делимости является отношение аннулирования. На языке отношения аннулирования определяется фундаментальный порядок на множестве идемпотентов в кольцах и полугруппах. Это отношение естественным образом возникает при рассмотрении инверсных полугрупп, полуструктур групп и полуструктур ниль-полугрупп.

Особый интерес представляет алгоритмический аспект. Если система задана некоторым набором определяющих соотношений и некоторым набором тождеств, то возникает вопрос: существует ли алгоритм, который для любых двух слов определяет, является ли одно слово нулём для другого. В общем случае ответ отрицательный. В частности это следует из результата Новикова П. С. [3].

Для алгоритмических вопросов важна элементарная аксиоматизируемость исследуемых классов. Как показывают исследования, в большинстве случаев условия финитной аппроксимируемости объектов относительно предикатов нельзя сформулировать на языке первой ступени. Одним из способов получения элементарных критериев является поиск необходимых и достаточных условий аппроксимируемости не отдельных алгебр, а различных производных классов от этих алгебр.

С конца 1960-х годов по настоящее время появилось большое количество работ, посвящённых финитной аппроксимируемости многообразий различных классов. Интерес к этим вопросам нашёл отражение в работах как российских (А. Ю. Ольшанский, С. Г. Мамиконян, Э. А. Голубов, М. В. Сапир, С. И. Кублановский, Л. Н. Савина), так и зарубежных алгебраистов (С. Гроувз, Д. Герхард).

Отметим некоторые результаты по данной тематике.

В своей работе А. Ю. Ольшанский [4] получил описание многообразий финитно аппроксимируемых групп. Многообразия финитно аппроксимируемых коммутативных полугрупп были описаны С. Г. Мамиконяном [5]; многообразия финитно аппроксимируемых идемпотентных полугрупп описал Д. Герхард [6] независимо друг от друга многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп описали Э. А. Голубов и М. В. Сапир [7] и С. И. Кублановский. В работах [8], [9] С. И. Кублановский дал описание на языке тождеств многообразия полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно целого ряда известных предикатов: делимости, Грина, вхождения в идеал, подполугруппу, подгруппу и т. п. В своей диссертации [10] Л. Н. Савина дала описание полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предикатов регулярности и идемпотентности.

В 2000-е годы появился целый ряд диссертаций, посвящённый тематике финитной аппроксимации полугрупп.

Постановка задачи. Описать многообразия полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предикатов аннулирования первого и второго рода.

Цель работы. Целью данной работы является полное описание многообразий полугрупп на языке тождеств и индикаторных систем, финитно аппроксимируемых относительно предикатов аннулирования.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Методы исследований. При описании многообразий полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предикатов аннулирования первого и второго рода, использованы теоретико-полугрупповые методы разложения полугрупп в коммутативные связки неразложимых компонент, а также общие структурные методы, связанные с описанием алгебраических систем.

Теоретическая и практическая ценность. Данная диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования могут быть использованы для решения алгоритмических проблем равенства слов для ряда мнообразий полугрупп.

Апробация работы. Ряд результатов настоящей диссертации был освещен на Городском алгебраическом семинаре в ПОМИ РАН, Санкт-Петербургском городском семинаре по теории полугрупп в РГПУ им. А. И. Герцена, а также на 60-х Герценовских чтениях в Санкт-Петербурге.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата.

Объём и структура диссертации. Работа состоит из введения и двух глав, разделённых на три параграфа.

Диссертация занимает 70 страниц рукописного текста и содержит 32 наименования литературы.

Основные результаты диссертации.

Диссертация состоит из двух глав.

Центральным понятием в данной работе является понятие аппроксимируемости. Общее определение строится следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{S}$ – некоторая полугруппа, Ξ – класс полугрупп, Π_1, Π_2 — однотипные предикаты на $\boldsymbol{S}$. Полугруппа $\boldsymbol{S}$ аппроксимируема относительно Π_1, Π_2 в классе Ξ, если из истинности предиката Π_2 при всех гомоморфизмах из $\boldsymbol{S}$ в полугруппы класса Ξ следует истинность Π_1 в $\boldsymbol{S}$. Предикаты Π_1, Π_2 могут совпадать. Аппроксимируемость называется финитной, если рассматриваются гомоморфизмы в конечные полугруппы.

Одним из объектов изучения в данной работе является предикат аннулирования (I рода), обозначаемый α:

$$(a, b) \in \alpha \Leftrightarrow ab = ba = a.$$

Ему, а именно описанию многообразий полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно данного предиката, посвящено содержание первой главы.

В первом параграфе главы 1 вводятся определения необходимых понятий и описываются обозначения, используемые на протяжении главы. Второй параграф содержит доказательства вспомогательных утверждений, на основании которых выводится общий результат. Третий параграф главы 1 посвящён доказательству основной теоремы данного раздела, носящей обобщающий характер.

В настоящей работе мы даём полное описание многообразий полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предиката аннулирования. Для каждого натурального n зафиксируем тождества:

$I_{1,n}$: $xy = x^{n+1}y^{n+1}$,

$I_{2,n}$: $xy = (xy)^{n+1}$,

$I_{3,n}$: $xy = x^{n+1}y$,

$I_{4,n}$: $xy = xy^{n+1}$,

$I_{5,n}$: $xya = yxa$,

$I_{6,n}$: $axy = ayx$,

$I_{7,n}$: $yxa = yxy^{n}a$,

$I_{8,n}$: $axy = ay^{n}xy$,

$I_{9,n}$: $x^2 = x$,

$I_{10,n}$: $xya = xya(xa)^{n+1}$,

${}_{11,n}$: $ayx = (ax)^{n+1}ayx$,

$I_{12,n}$: $a^n x^n y^n b^n = a^n y^n x^n b^n$,

$I_{13,n}$: $(axyb)^n = (ayxb)^n$

$I_{14,n}$: $axy^n b = ay^n xb$

$I_{15,n}$: $axyb = ayxb$

Автором был получен следующий результат.

Теорема 1. *Для многообразия полугрупп V следующие утверждения эквивалентны.*

1) V финитно аппроксимируемо относительно предиката аннулирования.

2) В многообразии V имеет место одно из условий:

(i) Выполнены тождества $I_{1,n}$, $I_{12,n}$ при некотором натуральном n, и все силовские подгруппы групп из V абелевы;

(ii) Выполнены тождества $I_{3,n}$, $I_{5,n}$ для некоторого натурального n;

(iii) Выполнены тождества $I_{4,n}$, $I_{6,n}$ при некотором натуральном n.

3) V финитно аппроксимируемо относительно предиката равенства.

Доказательству теоремы предшествуют двадцать шесть вспомогательных утверждений.

Во второй главе исследуются многообразия, финитно аппроксимируемые относительно предиката аннулирования второго рода, обозначаемого $i\alpha$ и получающегося из α сужением области определения, а именно ограничением, накладываемым на элемент b:

$(a, b) \in i\alpha \Leftrightarrow ab = ba = a,\ b^2 = b$ (то есть b – идемпотент).

Несмотря на внешнее сходство, это совершенно другой предикат, и многообразия, финитно аппроксимируемые относительно $i\alpha$, устроены отличным образом по отношению к рассмотренным в первой главе. В настоящей работе также затронут алгоритмический аспект данной проблемы, в частности связанный с использованием следующих индикаторных полугрупп, заданных при помощи таблицы Кэли:

$S_0 = \{a, b, c, 0\}$

	a	b	c	0
a	0	c	0	0
b	c	0	0	0
c	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$S_{01l} = \{a, x, e, 0\}$

	a	x	e	0
a	0	0	a	0
x	0	0	a	0
e	0	0	e	0
0	0	0	0	0

$S_{02l} = \{x, e, f, g\}$

	x	e	f	g
x	e	e	f	g
e	e	e	f	g
f	e	e	f	g
g	f	e	f	g

$S_{03l} = \{u, v, e, f, a,, 0\}$

	u	v	e	f	a	0
u	0	0	a	0	0	0
v	0	0	0	a	0	0
e	0	0	e	e	0	0
f	0	0	f	f	0	0
a	0	0	a	a	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$S_{04l} = \{e, a, 0\}$

	e	*a*	*0*
e	*e*	*a*	*0*
a	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*

S_{0ir} – полугруппа, антиизоморфная полугруппе S_{01l}, $i = 1, 2, 3, 4$.

Через L_2^1, R_2^1 обозначим двухэлементные полугруппы левых и правых нулей соответственно с внешне присоединённой единицей.

Итогом исследования является теорема, состоящая из нескольких утверждений.

Теорема 2. *Для многообразия полугрупп V следующие условия эквивалентны.*

1. V финитно аппроксимируемо относительно предиката аннулирования II рода.

2. Для некоторого натурального n в многообразии V выполнена одна из групп тождеств:

(1) $I_{1,n}$, $I_{13,n}$

(2) $I_{2,n}$, $I_{14,n}$

(3) $I_{3,n}$, $I_{14,n}$

3. V не содержит полугруппы S_0, S_{02l}, S_{03l}, S_{02r}, S_{03r}, L_2^1, R_2^1.

4. V финитно аппроксимируемо относительно предиката вхождения в односторонний идеал.

Доказательство теоремы опирается на двадцать предварительных утверждений, сформулированных в виде лемм.

Как видно из формулировки теоремы, алгоритмическая разрешимость проблемы предиката аннулирования II рода связана с проверкой принадлежности исследуемому многообразию ряда индикаторных полугрупп. Наличие таких полугрупп является главной отличительной особенностью результата исследования в главе 2.

Данная теорема даёт положительный ответ о решении алгоритмической проблемы предиката аннулирования второго рода, а именно имеют место следствия.

Следствие 1. *Если многообразие V задано конечным набором тождеств, то за конечное число шагов можно проверить, является ли оно финитно* *аппроксимируемым относительно предиката аннулирования второго рода.*

Следствие 2. *Если в многообразии полугрупп выполнены тождества (1), либо тождества (2), либо тождества (3) из теоремы 2, то во всех конечно определённых полугруппах из этого многообразия алгоритмически разрешима проблема распознавания предиката аннулирования второго рода.*

Цитированная литература:

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы [текст] / Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та: сб. науч. тр. – Иваново, 1958. – № 5.
2. Eilenberg, Samuel. Automata, languages and machines. Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1974.
3. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. М., Изд-во Акад. наук СССР, 1955.
4. Ольшанский А. Ю. Многообразия финитно аппроксимируемых групп // Изв. АН СССР, сер. Матем., т. 33.
5. Мамиконян С. Г. Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп [текст] / С. Г.Мамиконян // Мат. сб.: сб. науч. тр. – М., 1972. – № 37.
6. Gerhard J. A. Subdirectly irreducible idempotent semigroups. “Semigroup Forum”, 1973, 5, № 4.
7. Голубов, Э. А., Сапир М. В. Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп [текст] / Э. А. Голубов, М. В Сапир // Докл. АН СССР. Т. 247. – 1979. – № 5.
8. Кублановский, С. И. О финитной аппроксимируемости предмногообразий полугрупп относительно предикатов [текст] / С. И. Кублановский // Современная алгебра: Межвуз. сб. науч. тр. – Л.: ЛГПИ, 1980. – с. 58-88.
9. Кублановский, С. И. Финитная аппроксимируемость и алгоритмические вопросы [текст] / С. И. Кублановский // Современная алгебра: Межвуз. сб. науч. тр. – Л.: ЛГПИ, 1983 – с. 59-78.
10. Савина Л. Н. Аппроксимация полугрупп относительно предикатов делимости [текст] : дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Савина Любовь Николаевна.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Костырев И. И. Об алгоритмической разрешимости проблемы распознавания предиката аннулирования второго рода для многообразий

полугрупп / Вестник Санкт-Петербургского Университета. – Серия 1, вып. 4. – СПб., 2010. – с. 45 – 50.

Другие публикации:

2. О финитной аппроксимируемости многообразий полугрупп относительно предиката аннулирования [текст] / И. И. Костырев; М-во образования Рос. Федерации, РГПУ им. А. И. Герцена. – М., 2005. – 19 с. – Библиогр.: с. 19. – Деп. в ВИНИТИ, № 1428 – В2005.
3. Костырев И. И. О финитной аппроксимируемости многообразий полугрупп относительно предиката аннулирования / Современная аглебра: Межвуз. сб. науч. тр., № 8 (28). – Ростов-на-Дону, 2010. – с. 35 – 49.
4. Костырев, И. И. О финитной аппроксимируемости многообразий полугрупп относительно предиката аннулирования II рода / Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Аспирантские тетради. – Вып. 1(1). – СПб., 2006 – 8 с.