САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Колоницкий Сергей Борисович

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2010

Работа выполнена на кафедре математической физики
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, доцент
Назаров Александр Ильич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
Ивочкина Нина Михайловна
(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

доктор физико-математических наук
Коньков Андрей Александрович
(Московский государственный университет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Математический институт РАН им. В.А. Стеклова
(Москва)

Защита состоится «___» __________ 2011 года в «_____» ч. на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите кандидатских и докторских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 29, ауд. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт--Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» __________ 2010 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Качественные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных активно исследуются в последние полвека. Разнообразным аспектам качественной теории посвящены работы Похожаева, Серрина, Ниренберга, Кондратьева, Верона, Скрыпника, Конькова, Каволя и многие другие.

Диссертация посвящена эффекту возникновения множественных положительных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений вариационной структуры. Впервые этот эффект был открыт в 1984 году С. Коффманом [11], который показал, что при $n = 2$ задача

$$-\Delta u = u^{q-1} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

в кольце $\Omega = B_{R+1} \setminus B_R \subset \mathbb{R}^n$ имеет любое наперед заданное количество неэквивалентных (то есть не получающихся друг из друга при помощи поворотов) положительных решений при $q > 2$, если R достаточно велико.

В 1990 году Я.-Я. Ли [14] этот результат был обобщен на случай $n \geqslant 4$, $2 < q < 2^* \equiv \frac{2n}{n-2}$, а также построены нерадиальные решения задачи (1) в достаточно тонком слое при некоторых $q \geqslant 2^*$. Отметим, что в коротком замечании в конце работы Коффмана была сделана попытка обобщения основного результата на случай произвольного четного n, но, как указано в работе А.И. Назарова [2], это замечание нельзя считать обоснованным.

В 1993 С.-С. Лин [15] предпринял попытку усилить результаты Ли и, в частности, получить соответствующее утверждение при $n = 3$. Однако в доказательствах имеются серьезные пробелы. Более того, как показал в 1997 году Ж. Бьен [5] с использованием результатов Н. Мизогучи и Т. Сузуки [16], «грубый» метод, который использовали Я.-Я. Ли и С.-С. Лин, вообще не может дать при $n = 3$ более пяти неэквивалентных нерадиальных решений.

В 1997 году трехмерная задача была решена Ж. Бьеном [5] с помощью существенно более деликатной техники — минимизации функционала энергии для задачи (1) при специальных дополнительных ограничениях, с использованием принципа концентрации Лионса и тонких поточечных оценок решений. В 1999 Ф. Катрина и Ж.-К. Ванг [9] предложили несколько иной метод, основанный на той же идее, который позволяет строить решения (1) при любом $n \geqslant 2$ с предписанной группой симметрий.

Заметим, что авторы перечисленных работ рассматривают лишь уравнения с оператором Лапласа в главной части. В то же время, как показал в 2004 году А.И. Назаров [2], при $n \neq 3$ «грубая» техника дает возможность не только усилить результаты [14], но и распространить их на задачу

$$-\Delta_p u = u^{q-1} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\Delta_p\, u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ – p-лапласиан, при произвольных $1 < p < \infty$ и $p < q < p^*$ (при $q < p$ положительное решение задачи (2) единственно). Также в А.И. Назаровым был обнаружен "двойственный" эффект множественности при четных n и $p \geqslant n$ – для фиксированного R и достаточно больших q. Кроме того, А.И. Назаровым были построены нерадиальные решения задачи (2) для произвольного $1 < p < \infty$, $2 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$ и $p < q < p^*_{n-m}$. Именно, существует такое $R_0 = R_0(n,p,q,m)$, что при всех $R > R_0$ существует как минимум два неэквивалентных решения. Решения, построенные в этой работе, концентрировались не в окрестности точек, а в окрестности некоторых многообразий. При $[(n+1)/2] + 1 \leqslant p < n$ нерадиальное решение существует для любых $q \in (p, \infty)$, в то время как радиальные решения существуют при всех p и всех $q < \infty$.

В 2005 году А.П. Щегловой [4] была установлена множественность положительных решений для задачи Неймана

$$-\Delta_p u + u^{p-1} = 0 \quad \text{в} \quad B_R, \qquad |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u; \mathbf{n}\rangle = u^{q-1} \quad \text{на} \quad \partial B_R \tag{3}$$

также в двух случаях: при фиксированном $q > p$ и достаточно больших R или (для четных n и $p \geqslant n$) при фиксированном R и достаточно больших q.

В статье [3] изучались положительные решения задачи Дирихле

$$-\Delta_p u = |x|^{\alpha q} u^{q-1} \quad \text{в} \quad B_1, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_1, \tag{4}$$

а также задач для уравнения с радиальным весом более общего вида. В частности, была изучена потеря симметрии решения (4) с минимальной энергией при фиксированном $q > p$ и достаточно больших α или при фиксированном α и достаточно больших q. При $p = 2$ (в этом случае уравнение (4) именуют *уравнением Хенона*, см. [12]) часть результатов [3] была получена также в [18]. Еще один пример задачи, в которой "центробежный" вес приводит к потере симметрии решения, – задача о точной константе в неравенстве Каффарелли – Кона – Ниренберга ([10], [19]). Отметим еще работы, в которых (также при $p = 2$) исследуются асимптотические профили решений задачи (4) с минимальной энергией: в [19, 6, 7] для заданного $2 < q < 2^*$ и $\alpha \to \infty$, в [8] для заданного $\alpha > 0$ и $q \to 2^*$.

В качестве следствия основных теорем в [3] были выявлен эффект множественности положительных решений задачи (4) в двумерном случае.

Цель работы.

1. Исследование эффекта множественности решений задачи Дирихле для уравнения обобщенного уравнения Хенона (краевая задача (4)).
2. Исследование эффекта множественности решений задачи Дирихле для модельного уравнения с p-лапласианом (краевая задача (2)) в трехмерном сферическом слое.
3. Исследование эффекта множественности решений задачи Дирихле для модельного уравнения с p-лапласианом (краевая задача (2)) с $q > p^*$.

Методы исследования.

В диссертационной работе используются классические методы функционального анализа и вариационного исчисления, метод априорных оценок и принцип концентрации-компактности.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Доказана неединственность решений задачи (4) при некоторых $q \geqslant p^*$ и больших α.
2. Доказана множественность решений задачи (4) при фиксированном $q \in (p, p^*)$ и больших α.
3. Доказана множественность решений задачи (4) при фиксированном α, $p > n$ и больших q.
4. Доказана множественность решений задачи (2) при $n = 3$, $q \in (p, p^*)$ и больших R.
5. Доказана множественность решений задачи (2) при четном $n \geqslant 4$, некоторых $q \geqslant p^*$ и больших R.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в различных вопросах теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложениях в геометрии и математической физике.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на семинаре им. В.И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН (2007-2010), на семинаре по нелинейным дифференциальным уравнениям в Московском Государственном Университете (2008, 2010), на семинаре отдела теории функций Математического института им. В.А.Стеклова РАН (2010), на конференции NPDE-2007 (Алушта, 2007), на конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2008, 2010), на конференции Spring School in PDE (Лувен-ла-Нев, Бельгия, 2008).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора (две из них в соавторстве). Работа [1*] опубликована в журнале из перечня ВАК. Работа [2*] опубликована в журнале, удовлетворяющем достаточному условию для включения в перечень ВАК (переводная версия этого журнала “Journal of Mathematical Sciences” входит в системы цитирования Springer и Scopus) в соответствии с решением Президиума ВАК № 9/11 от 07.03.2008.

В работах [2*] и [3*] научному руководителю А.И. Назарову принадлежит постановка задачи и общее руководство работой, а диссертанту - доказательство основных теорем.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08 – 01 – 00748 и НШ – 4210.2010.1.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, списка обозначений, трех глав, включающих 7 параграфов, и списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 103 страницы.

Список обозначений

При $1 < p < \infty$ обозначим p_m^* предельный показатель в теореме вложения Соболева в $\mathbb{R}^m$: $\frac{1}{p_m^*} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)_+$; $p_n^* = p^*$ – обычный предельный показатель вложения в $\mathbb{R}^n$.

Для произвольной замкнутой подгруппы $\mathcal{G}$ группы вращений $\mathcal{O}(n)$ обозначим $\mathcal{L}_\mathcal{G}$ пространство $\mathcal{G}$-инвариантных функций из $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Содержание работы

В диссертации исследуется эффект множественности решений задач (2) и (4). Под решением краевой задачи понимается обобщенное решение из пространства Соболева $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$. Норму функции u в пространстве $L_p(\Omega)$ будем в дальнейшем обозначать $\|u\|_p$.

Доказательство множественности решений в модельных случаях обычно происходит по следующему плану:

Краевая задача зависит от некоторого параметра T.

1) Строится набор групп $\mathcal{G}_k \leqslant O(n)$, зависящих от параметра $k \in \mathbb{N}$.

2) Рассмотрим $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_k}$ — пространство функций из $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega_R)$ с группой симметрий $\mathcal{G}_k$. Докажем, что $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_k}$ компактно вкладывается в некоторое (возможно, весовое) пространство L_q. Иногда (если, например, группа дискретная), достаточно обычной теоремы вложения Соболева. Если группа непрерывная, то фактически функция $u \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}_k}$ зависит от меньшего количества переменных и поэтому в некоторых случаях удается доказать вложение в L_q с $q \geqslant p_n^*$ (см., например, [13], [1]).

3) Минимизируем функционал $J[u] = \|\nabla u\|_p^p$ на замкнутом в норме L_q множестве $\widetilde{\mathcal{L}_k} \subset \mathfrak{S}_k = \{v \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}_k} | \|v\|_q = 1\}$. Так как вложение $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_k}$ в L_q компактно, минимум достигается. Легко показать, что минимайзер (обозначим его $u_{T,k}$) неотрицателен.

4) Докажем, что при достаточно больших T минимум достигается во внутренней (с точки зрения топологии на $\mathfrak{S}_k$) точке $\widetilde{\mathcal{L}_k}$ (Если $\widetilde{\mathcal{L}_k} = \mathfrak{S}_k$, то этот шаг тривиален). Таким образом, $u_{T,k}$ — точка локального минимума на $\mathfrak{S}_k$.

5) По принципу симметричной критичности (см. [17]) $u_{T,k}$ — критическая точка функционала J. Отсюда с использованием неравенства Харнака для p-гармонических функций получаем, что после подходящей перенормировки функция $u_{T,k}$ будет положительным решением краевой задачи.

6) Докажем, что при достаточно больших T (т.е. $T > T_0(k_1, k_2)$) функции u_{T,k_1} и u_{T,k_2} различны (не эквивалентны).

7) Заметим, что, задавшись произвольным числом N, мы можем подобрать такой набор $k_1, \ldots, k_N$ и такое число $T_0(N, k_1, \ldots, k_N)$, что при $T > T_0$ функции $u_{T,k_1}, \ldots, u_{T,k_N}$ различны.

Наибольшую сложность представляют шаги 1, 4, 6.

В главе 1 рассматривается краевая задача (4). Основные результаты главы 1 следующие:

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $n \geqslant 4$, $2 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$ и $p < q < p^*_{n-m+1}$. Тогда существует $\alpha_0 = \alpha_N(n, m, p, q)$, такое, что при любом $\alpha > \alpha_0$ существует не менее двух неэквивалентных положительных решений задачи (4).*

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $n = 2$ или $n \geqslant 4$ и $p < q < p^*$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует $\alpha_N = \alpha_N(n, p, q)$, такое, что при любом $\alpha > \alpha_N$ существует* *не менее N неэквивалентных положительных решений задачи (4).*

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2$ четно, $n < p < \infty$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует $q_N = q_N(n, p, \alpha)$, такое, что при любом $q > q_N$ существует не менее N неэквивалентных положительных решений задачи (4).*

Решение задачи (4) при подходящей перенормировке будет критической точкой для функционала

$$J[u] = \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|ur^\alpha\|_q^p} = \frac{\int\limits_{B_1} |\nabla u|^p dx}{(\int\limits_{B_1} |u|^q r^{\alpha q} dx)^{\frac{p}{q}}}, \tag{5}$$

Пусть пара чисел $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} m \cdot \ell + k = n \text{ для некоторого } \ell \in \mathbb{N}; \\ m \geqslant 2; \qquad k = 0 \text{ или } k \geqslant m. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда разложение пространства $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^\ell \oplus \mathbb{R}^k$ будем называть (m,k)-разложением. Отметим, что если $m < n$, то (6) влечет $n \geqslant 4$.

Пусть G — замкнутая подгруппа $O(m)$. Введем группы

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_{(m,k,G)} = G \times \ldots \times G \times O(k), \qquad \mathcal{K}_{(m,k)} = \{P_\sigma \otimes I_m | \sigma \in S_l\} \times O(k) \\ \text{и} \quad \mathcal{G}_{(m,k,G)} = \left\langle \mathcal{H}_{(m.k.G)}, \mathcal{K}_{(m,k)} \right\rangle. \end{gathered}$$

Функцию u будем называть

– m-радиальной, если она инвариантна относительно $\mathcal{H}_{m,k,O(m)}$,

– (m,k)-симметричной, если она инвариантна относительно $\mathcal{K}_{(m,k)}$,

– (m,k)-радиальной, если она инвариантна относительно $\mathcal{G}_{m,k,O(m)}$.

В [1] показано, что при $2 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ пространство $\mathcal{L}_{\mathcal{G}m,k,O(m)}$ компактно вкладывается в $L_q(B_1, |x|^{\alpha q})$ с $1 \leqslant q < p^*_{n-m+1}$, если $\alpha > (\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 1)_+$.

В §1.1 вводятся группы симметрий $\mathcal{G}_{m,k,O(m)}$, указанным образом доказываются пункты 3, 4, 5 для произвольной группы симметрий $\mathcal{G} \leqslant O(n)$, и доказывается оценка для (m,k)-радиального решения:

$$C_1 \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{p(1-(n-m+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \leqslant J[u_{(m,k)}] \leqslant C\alpha^{p(1-(n-m+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

При больших α эти оценки дают возможность отличить друг от друга (m,k)-радиальные решения при разных m, что доказывает теорему 1. Аналогичные оценки на порядок роста дают возможность отличить друг от друга (m,k)-радиальные решения при одинаковых m и различных k, за одним исключением: решения с $k=0$ и с $k=m$ различить не удалось.

В §1.2 вводится группа $\mathcal{G}_{2,k,G_t}$, где группа G_t порождена поворотом на $\frac{2\pi}{t}$. В пункте 2 для них используется обычная теорема вложения. Далее доказывается оценка

$$J[u_{(m,k,G)}] \leqslant C(G).$$

Таким образом, эти решения при больших α не $(2,k)$-радиальны. Затем доказывается, что если решения с группой симметрий $\mathcal{G}_{(2,k,G_t)}$ и различными t совпадают при всех α, то они $(2,k)$-радиальны, что противоречит предыдущей оценке. Таким образом, решения с различными t различны, что доказывает теорему 2. Различить решения при различных k удается в силу того, что решения концентрируются в окрестности подпространства размерности $n-k$. Единственный случай, в котором не удалось доказать различие решений с такими симметриями, таков: $t_1=2, t_2=4$ и $2k_2-k_1=n$. Таким образом, пункт 6 доказан.

В §1.3 исследуется эффект множественности решений при четных n, $p>n$ и больших q. В качестве групп $\mathcal{G}_k$ выберем группы $\mathcal{G}_{2,k,G_t}$. Пункты 2 – 5 уже доказаны в предыдущих параграфах. Далее, решения с различными t могут совпадать только в том случае, если они $(2,k)$-радиальны. Доказывается, что вторая вариация функционала J на минимайзере в классе $(2,k)$-радиальных функций не знакоопределена, и, следовательно,этот минимайзер не может быть минимайзером в классе $(2,k,t)$-инвариантных функций, а значит, для различных t $(2,k,t)$-инвариантные минимайзеры различны при больших q, что доказывает теорему 3.

Отметим, что в работе [2*] результаты теорем 1 и 2 распространяются на более общие краевые задачи.

В главе 2 рассматривается краевая задача (2) в трехмерном пространстве. Основной результат этой главы следующий:

Теорема 4. *Пусть $1 < p < \infty$, $n = 3$ и $p < q < p^*$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует $R_N = R_N(n, p, q)$, такое, что при любом $R > R_N$ существует не менее N неэквивалентных положительных решений задачи (2).*

В §2.1 собраны некоторые вспомогательные утверждения. Множественность решений задачи (2) при $n = 3$ и $p < q < p^*$ доказывается по описанному алгоритму с использованием техники концентрации в §2.2.

Пусть группа $\mathcal{G}_k$ порождена вращениями на угол $\frac{2\pi}{k}$ в плоскости (x_1, x_2) и отражением относительно плоскости (x_1, x_2). У этой группы есть выделенные орбиты, порожденные, например, точками $N_R = (0, 0, R)$ и $M_R = (R, 0, 0)$. Орбиту точки N_R будем называть полярной орбитой, орбиту M_R — экваториальной (так же мы будем называть орбиты всех точек, для которых $x_3 = 0$). Отметим, что полярная орбита имеет кратность 2, экваториальная орбита имеет кратность k, и орбиты всех остальных точек сферы имеют кратность $2k$. Минимизируем функционал $J[u] = \|\nabla u\|_p^p$ на множестве $\widetilde{\mathcal{L}_k} = \{v \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}_k} | \|v\|_q = 1, \int\limits_{A_\varkappa} u^q dx \geqslant 1 - \delta\}$, где $A_\varkappa$ — $\mathcal{G}_k$-инвариантное множество, содержащее M_R. В пункте 2 используется обычная теорема вложения Соболева. Пункт 3 доказывается стандартно. Пункт 4 доказывается следующим образом: сначала мы устанавливаем, что последовательность функций, ограниченная в $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega_R)$ и отделенная от нуля в $L_q(\Omega_R)$, обязательно имеет точки концентрации. Затем мы доказываем, что последовательность минимайзеров функционала J на множестве $\widetilde{\mathcal{L}_k}$ имеет не более чем одну последовательность концентрации в каждом из множеств $\mathrm{Int}A_\varkappa$, $\mathrm{Ext}A_\varkappa$ и $\partial A_\varkappa$. После этого доказывается, что ни для какой последовательности минимайзеров не может быть выполнено условие $\int\limits_{A_\varkappa} u^q dx = 1 - \delta$. Таким образом, пункт 4 доказан. Попутно доказывается, что минимайзеры при разных k имеют разное количество точек концентрации, что доказывает пункт 6. Пункты 5 и 7 доказываются стандартно.

В главе 3 рассматривается краевая задача (2) при четном $n \geqslant 4$. Основной результат этой главы следующий:

Теорема 5. *Пусть $1 < p < \infty$, $n \geqslant 4$ четно и $p < q < p^*_{n-1}$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует $R_N = R_N(n, p, q)$, такое, что при любом $R > R_N$ существует* *не менее N неэквивалентных положительных решений задачи (2).*

Решения, которые строятся в теореме 5, даже при $p \in (p, p^*)$ отличаются от решений, построенных в [2], тем, что они концентрируются в окрестности не дискретного множества точек, а в окрестности некоторых кривых.

В §3.1 подробно рассматривается случай $n = 4$, в §3.2 рассматривается случай четного $n \geqslant 6$.

Именно, вводится некоторое семейство групп $\mathcal{G}_k$, для каждой из которых орбита любой точки, кроме начала координат, имеет размерность 1. Выбираются исключительные орбиты этих групп, для которых длина квалифицированно меньше длины любой орбиты в некоторой окрестности, и $\mathcal{G}_k$-инвариантное множество $A_\varkappa$, содержащее некоторую исключительную орбиту. Далее на множестве $\widetilde{\mathcal{L}_k} = \{v \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}_k} | \|v\|_q = 1, \int\limits_{A_\varkappa} u^q dx \geqslant 1 - \delta\}$ минимизируется функционал $J[u] = \|\nabla u\|_p^p$. Результаты [13] гарантируют для $\mathcal{G}_k$-инвариантных функций необходимую в пункте 2 компактность вложения $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_k}$ в $L_q(\Omega_R)$ при $p < q < p^*_{n-1}$. Пункт 3 доказывается стандартно. Затем мы доказываем, что последовательность минимайзеров функционала J на множестве $\widetilde{\mathcal{L}_k}$ имеет не более чем одну последовательность орбит концентрации в каждом из множеств $\mathrm{Int}A_\varkappa$, $\mathrm{Ext}A_\varkappa$ и $\partial A_\varkappa$. После этого доказывается, что ни для какой последовательности минимайзеров не может быть выполнено условие $\int\limits_{A_\varkappa} u^q dx = 1 - \delta$. Таким образом, пункт 4 доказан. Попутно доказывается, что минимайзеры при разных k имеют разное количество компонент связности множества концентрации, что доказывает пункт 6. Пункты 5 и 7 доказываются стандартно.

Список литературы

[1] С.В. Иванов, А.И. Назаров. О теоремах вложения Соболева с весом для функций с симметриями // Алгебра и анализ, Т.18 (2006), N1, С.108-123.

[2] А.И. Назаров. О решениях задачи Дирихле уравнения, содержащего p-лапласиан, в сферическом слое // Труды СПбМО, Т.10 (2004), С.33-62.

[3] А.И. Назаров. О симметричности экстремали в весовой теореме вложения // Пробл. мат. ан. Т.23 (2001), С.50-75.

[4] А.П. Щеглова. Множественность решений для краевой задачи с нелинейным условием Неймана // Пробл. мат. ан., Т.30 (2005), С.121-144.

[5] J. Byeon. Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli // J. Diff. Eq., V.136 (1997), P.136-165.

[6] J. Byeon, Z.-Q. Wang. On the Hénon equation: asymptotic profile of ground states. I // Ann. Inst. H.Poincaré. Anal. Nonlin., V.23 (2006), P.803-828.

[7] J. Byeon, Z.-Q. Wang. On the Hénon equation: asymptotic profile of ground states. II // J. Diff. Eq., V.216 (2005), P.78-108.

[8] D. Cao, S. Peng. The asymptotic behavior of the ground state solutions for Hénon equation // J. Math. Anal. Appl., V.278 (2003), P.1-17.

[9] F. Catrina, Z.-Q. Wang. Nonlinear elliptic equations on expanding symmetric domains // J. Diff. Eq., V.156 (1999), P.153-181.

[10] F. Catrina, Z.-Q. Wang. On the Caffarelli – Kohn – Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions // Comm. Pure Appl. Math., V.54 (2001), P.229-258.

[11] C.V. Coffman. A non-linear boundary value problem with many positive solutions // J. Diff. Eq., V.54 (1984), P.429-437.

[12] M. Hénon. Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems // Astronomy & Astrophysics, V.24 (1973), P.229-238.

[13] E. Hebey, M. Vaugon. Sobolev spaces in the presence of symmetries // J. Math. Pures Appl., V.76, Issue 9 (1997), 859–881

[14] Y.Y. Li. Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus // J. Diff. Eq., V.83 (1990), P.348-367.

[15] S.-S. Lin. Existence of many positive nonradial solutions for nonlinear elliptic equations on an annulus // J. Diff. Eq., V.103 (1993), P.338-349.

[16] N. Mizoguchi, T. Suzuki. Semilinear elliptic equations on annuli in three and higher dimensions // Houston J. Math., V.1 (1996), P.199-215.

[17] R.S.Palais. The principle of symmetric criticality //Comm. in Math. Phys. V. 69 (1979), P.19-30.

[18] D. Smets, J. Su, M. Willem. Non radial ground states for the Hénon equation // Comm. Contemp. Math., V.4 (2002), P.467-480.

[19] D. Smets, M. Willem. Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic variational problems // Calc. Var., V.18 (2003), P.57-75.

[20] J. Wei, S. Yan. Infinitely many solutions for the prescribed scalar curvature problem on $\mathbb{S}^N$ // Journal of Functional Analysis, V.258 (2010), P.3048-3081.

[Работы автора по теме диссертации]

[Статьи в журналах, рекомендованных ВАК]

[1*] С.Б.Колоницкий. Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое // Алгебра и анализ, Т.22, выпуск 3 (2010), С.206-221.

[Другие публикации]

[2*] С.Б. Колоницкий, А.И. Назаров. Множественность решений задачи Дирихле для обобщенного уравнения Хенона // Проблемы математического анализа, Т. 35. (2007) С.91-110.

[3*] S.B. Kolonitskii, A.I. Nazarov. The multiplicity of positive solutions for the Dirichlet problem to the generalized Henon equation // Int. Conf. "NPDE-2007"dedic. to the memory of I.V. Skrypnik. Book of abstracts. Donetsk (2007) P.39.

[4*] S.B. Kolonitskii. Multiplicity of solutions to the Dirichlet problem for generalized Henon equation // Summer School in Nonlinear Partial Differential Equations, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve (2008) P.43–44.

[5*] С.Б.Колоницкий. Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Владимир (2008) С.135-136.

[6*] С.Б.Колоницкий. Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом с суперкритическим показателем // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. М. (2010) С.103.