

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАРАМШИНА Людмила Александровна

МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ
ОФТАЛЬМОЛОГИИ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор БАУЭР Светлана Михайловна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор МИХАСЕВ Геннадий Иванович
(Белорусский государственный
университет)

кандидат физико-математических наук,
доцент СЕМЕНОВ Борис Николаевич
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В.И.Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ)

Защита состоится “__” декабря 2011 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан “__” _____ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее время различные модели теории оболочек широко применяются для решения ряда медицинских проблем, в том числе и в задачах офтальмологии. Новые знания в офтальмологии помогают более качественно диагностировать ряд заболеваний и разрабатывать эффективные методы их лечения.

Структурные характеристики глаза требуют использования достаточно сложных математических моделей. На первых этапах строились простейшие модели, во многих задачах оболочка глаза рассматривалась как однородная изотропная сферическая оболочка. В настоящее время для решения большого класса задач механики глаза широкое распространение получили численные методы, такие как метод конечных разностей и другие, что связано с наличием быстродействующих вычислительных машин. Также для исследования ряда задач используются некоторые пакеты прикладных программ, такие как ANSYS, ABAQUS и другие, основанные на методе конечных элементов. При построении математических моделей важно учитывать особенности сложной структуры глаза, многие элементы которой, с точки зрения механики, являются многослойными оболочками. Слои некоторых оболочек под действием внутреннего давления могут смещаться друг относительно друга; некоторые оболочки состоят из слоев, которые отличаются как по толщине, так и по своим биомеханическим свойствам; слои некоторых структур способны изменять свои биомеханические свойства в течение суток. Данные особенности биологических тканей заметно влияют на общую деформацию оболочек глаза.

В рамках теории многослойных оболочек разработаны подходы, позволяющие учесть анизотропию физико-механических свойств слоев, неоднородность внутреннего строения и повышенную деформируемость слоистых структур глаза.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является построение моделей многослойных оболочек для исследования напряженно-деформированного состояния внешней фиброзной слоистой оболочки глаза и решетчатой пластинки диска зрительного нерва под действием внутриглазного давления, а также исследования влияния учета многослойной структуры роговицы на показатели измерения внутриглазного давления, получаемые аппланационными тонометрами Гольдмана и Маклакова.

Результаты работы вошли в выполняемую на математико-механическом факультете тему Российского фонда фундаментальных исследований “Модели

механики деформируемого твердого тела в задачах офтальмологии”, грант № 09-01-00140-а.

Основные методы исследований. Для достижения поставленной цели использованы некоторые варианты теории тонких оболочек, созданы программы для построения численных решений на базе пакета Maple. Ряд результатов получен с помощью программной системы конечно-элементного анализа ANSYS.

Научная новизна полученных в диссертации результатов:

- Построено решение задачи о деформации решетчатой пластинки диска зрительного нерва как многослойной моментной оболочки вращения с упругими связями между слоями и упругой заделкой на краю, находящейся под действием внутриглазного давления.

- Получены аналитические решения задач о деформации трехслойных изотропных и двухслойных трансверсально-изотропных сферических слоев под действием внутреннего и внешнего давления. Проанализировано влияние упругих свойств склеральной, сосудистой и сетчатой оболочек глаза на общую картину деформации и возможность возникновения разрывов, и как следствие, отслоек более мягких слоев при увеличении внутриглазного давления. Проведено сравнение с результатами, которые получаются на основе теории анизотропных оболочек средней толщины Паляя-Спиро.

- С использованием конечно-элементного пакета ANSYS построена математическая модель апланационных методов измерения внутриглазного давления с учетом многослойности роговицы. Проведен анализ влияния учета многослойности роговицы на показания измерений ВГД проводимых тонометрами Гольдмана и Маклакова (грузом 5 и 10 г) до и после операций по коррекции зрения.

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически корректной постановкой задач, использованием строгих аналитических методов, сравнением аналитических и численных результатов, а также согласованностью с экспериментальными клиническими данными.

Научная и практическая ценность. Рассмотрение моментной постановки задачи о деформации многослойной оболочки вращения с упругими связями между слоями позволяет определить “точки перегиба”, возникающие при прогибе решетчатой пластинки диска зрительного нерва под действием внутриглазного давления. Рассмотренные задачи о деформации трехслойной изотропной и двухслойной трансверсально-изотропной оболочек могут описывать изменение напряженно-деформированного состояния внешних оболочек глаз-

ного яблока при введении внутриглазных инъекций, а также помогают оценить влияние упругих характеристик склеральной, сосудистой и сетчатой оболочек глаза на возможность возникновения разрывов и отслоек внутренних, более мягких оболочек при повышенном внутриглазном давлении. Сравнение решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек Палия-Спиро, позволяет оценить насколько точно теория Палия-Спиро может описывать решения задачи, и применима, например, для оболочек эллипсоидальной формы (глаза с миопией и гиперметропией). Математическая модель измерения апланационных методов измерения внутриглазного давления показала существенное влияние учета многослойности роговицы на показания измерений, проводимых тонометрами Маклакова и Гольдмана, что важно учитывать при диагностике различных заболеваний глаза.

Апробация работы. Результаты обсуждались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, на международной научной конференции по механике “Пятые Поляховские чтения” (Санкт-Петербург, 2009), на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС “Компьютерные методы в механике сплошной среды” (Санкт-Петербург, 2010), на 24-ом семинаре Северных стран по компьютерной механике (3 – 4.11.2011, Хельсинки, Финляндия).

Список публикаций. По материалам диссертации опубликовано 5 работ, в том числе три работы [1] – [3] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий.

Результаты, выносимые на защиту:

1. В рамках модифицированной геометрической гипотезы Кирхгофа (Черных К. Ф., 1980: материальное волокно, нормальное к материальной срединной поверхности до деформации, остается нормальной к ней и после деформации, удлиняясь по линейному закону), проведен анализ напряженно-деформированного состояния моментной многослойной оболочки вращения с упругими связями между слоями под действием нормального давления. В явном виде получена полная разрешающая система $8n + 3$ дифференциальных уравнений для симметрично деформируемой оболочки вращения, состоящей из n слоев. Численные результаты позволяют определить “точки перегиба”, возникающие под действием нормального давления, а также форму прогиба решетчатой пластинки диска зрительного нерва, согласующуюся с экспериментальными данными.

2. На основе трехмерной теории упругости в виде явных формул для напряжений и перемещений представлено решение задач о деформации трехслойной изотропной и двухслойной трансверсально-изотропной сферических оболочек под действием нормального давления. В явном виде получены соотношения для давлений, действующих в зоне контакта слоев.

3. Проведен анализ влияния механических свойств основных слоев оболочек на общую картину деформации слоистой корнеосклеральной оболочки глаза при увеличении внутриглазного давления.

4. В прикладном пакете ANSYS рассмотрена контактная задача о напряженно-деформированном состоянии сопряженных многослойных по толщине трансверсально-изотропных оболочек, находящихся под действием внутреннего давления, при механическом воздействии на роговую оболочку глаза тонометрами Маклакова и Гольдмана.

5. Проведена оценка влияния учета многослойности роговицы на размеры площадки контакта тонометров и роговицы, распределение контактных напряжений и общую картину деформации до и после рефракционных операций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 95 наименований. Число иллюстраций равно 61. Общий объем работы 101 страниц.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится краткая история развития теории многослойных оболочек, дается обзор литературы, формулируются цели и задачи работы.

Первая глава посвящена изучению напряженно-деформированного состояния решетчатой мембраны диска зрительного нерва в рамках двумерной теории оболочек.

В работе офтальмологов (Нестеров А.Г., Егоров Е.А., 1981) отмечается, что решетчатая пластинка состоит из нескольких параллельно расположенных листов плотной соединительной ткани, имеющих отверстия круглой или овальной формы через которые проходят пучки нервных волокон. Было высказано предположение о том, что ущемление нервных волокон в отверстиях решетчатой пластины происходит из-за вызванного повышенным внутриглазным давлением смещения составляющих ее пластин друг относительно друга. В связи с этим в работе Бауэр С.М., Товстик П.Е., Зимин Б.А. (2000) рассматривались большие осесимметричные деформации тонкой безмоментной многослойной оболочки вращения в форме купола с упругими связями между слоями. Было получено, что наиболее сильные относительные смещения происходят на уровне

последнего слоя, причем эти смещения увеличиваются к краю пластины. Однако в работах офтальмологов отмечается, что при увеличении внутриглазного давления появляется “точка перегиба” и форма прогиба решетчатой пластинки принимает вид, показанный на рис. 1.

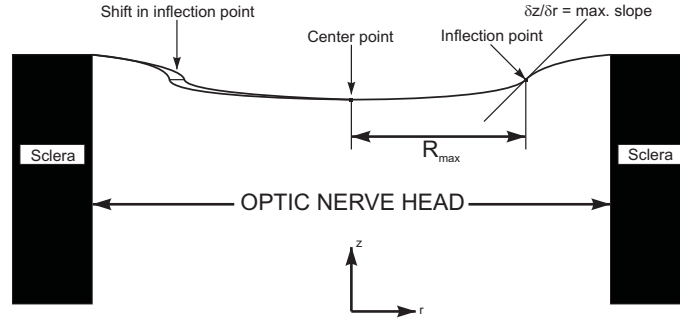


Рис. 1. Схема решетчатой пластинки диска зрительного нерва (Yan D. B. et al., 1998.)

Модель безмоментной оболочки не позволяет определить “точку перегиба” — точку, в которой, производная от нормального прогиба по радиальной координате имеет максимальное значение, поэтому была рассмотрена моментная постановка задачи.

Предполагается, что слои могут проскальзывать друг относительно друга. Пусть s^k , $k = 1, \dots, n$, указывающие дуговую координату точки s_0 k -го слоя после деформации. Имеют место соотношения

$$\lambda_1^k = \frac{ds^k}{ds_0}, \quad \lambda_2^k = \frac{r^k}{r_0}, \quad r^k = r(s^k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где λ_1^k и λ_2^k — кратности удлинения срединной поверхности k -го слоя в меридиональном и окружном направлениях.

Предполагается, что касательные напряжения являются заданными функциями относительного смещения слоев, нормальные напряжения определяются нагрузками, действующими на оболочку в целом.

$$q_1^k = \alpha_k (s^{k+1} - s^k) (r^k - r_0^*).$$

Давления, действующие в зоне контакта слоев q_3^k , $k = 2, \dots, n - 1$, выражаются из общей системы уравнений через заданные значения внутреннего и внешнего давления p_1 и p_n .

Усилия в меридиональном и окружном направлениях T_1^k и T_2^k являются заданными функциями кратности удлинения слоев зависящими от упругих свойств слоев, а моменты M_1^k и M_2^k — заданными функциями кривизн:

$$\begin{aligned} T_1^k &= T_1^k(s_0, \lambda_1^k, \lambda_2^k), & M_1^k &= M_1^k(s_0, \kappa_1^k, \kappa_2^k), \\ T_2^k &= T_2^k(s_0, \lambda_1^k, \lambda_2^k), & M_2^k &= M_2^k(s_0, \kappa_1^k, \kappa_2^k). \end{aligned}$$

Исходя из описания структуры решетчатой пластинки, последний “наружный” слой моделируется более мощным и плотным с более жесткими граничными условиями на краю пластинки: $c_N < c_k$ при $k < N$.

Получена разрешающая система $8n+3$ дифференциальных уравнений в безразмерном виде для симметрично деформированной оболочки вращения относительно следующих переменных

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{V^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k}, & y_{n+k} &= \frac{U^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k}, & y_{2n+k} &= \lambda_2^k(\bar{s}_0), & y_{3n+k} &= \frac{M_1^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k r_0^*}, \\ y_{4n+k} &= \varphi^k(\bar{s}_0), & y_{5n+k} &= \frac{s^k(\bar{s}_0)}{r_0^*}, & y_{6n+k} &= \frac{r^k(\bar{s}_0)}{r_0^*}, & y_{7n+k} &= \frac{z^k(\bar{s}_0)}{r_0^*}, \\ y_{8n+1} &= \frac{r_0(\bar{s}_0)}{r_0^*}, & y_{8n+2} &= \frac{z_0(\bar{s}_0)}{r_0^*}, & y_{8n+3} &= \varphi_0(\bar{s}_0), \end{aligned}$$

где $\bar{s}_0 = s_0 / r_0^*$, r_0^* — радиус крайнего слоя пластинки; U^k и V^k — проекции внутренних усилий соответственно на осевое и перпендикулярное к нему направления.

На краю оболочки задаются условия упругой заделки слоев

$$T^k = c_k(s^k - s_0), \quad \varphi^k = \varphi_0, \quad \text{при} \quad r_0 = r_0^*.$$

Расчеты проводились для трехслойных и двухслойных оболочек при различных упругих параметрах c_k и α_k . На рис. 2 приведены в безразмерном виде результаты расчетов для двухслойной решетчатой пластинки радиуса $r = 1.0$ мм и толщиной 0.2 мм под действием внутриглазного давления 30 мм рт. ст. При этом толщина внутреннего слоя h_1 составляет 0.08 мм, толщина внешнего слоя $h_2 = 0.12$ мм, $\alpha_k = 1$, $c_1/E_p = 0.067$, $c_2/E_p = 0.063$ при $E_p = 1.43$ МПа, $\nu = 0.45$.

На рис. 2 сплошной линией показана форма прогиба решетчатой пластинки до деформации, пунктирными линиями обозначены формы прогиба внутреннего более тонкого и внешнего более плотного слоев после деформации.

В табл. 1 приведены безразмерные значения изгибающих моментов M_1^i , углов φ^i и кратностей удлинения λ_2^i , $i = 1, 2$ после деформации. Численные расчеты показали, что в точках $s_0 = 0.80$ и $s_0 = 0.85$ моменты меняют знак и углы достигают максимального значения, поэтому данные точки можно считать “точками перегиба”.

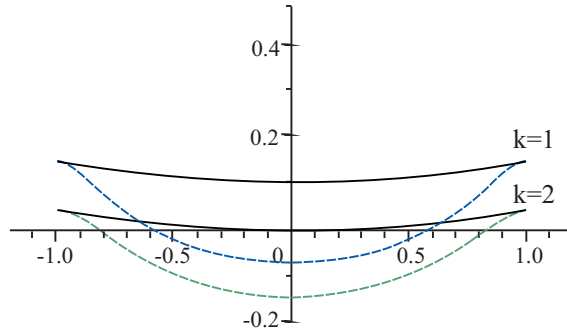


Рис. 2. Прогиб деформированной решетчатой пластинки толщиной $h = 0.2$ при внутриглазном давлении 30 мм рт. ст.

Таблица 1. Безразмерные значения изгибающих моментов и углов

s_0	φ^1	φ^2	φ_0	λ_2^1	λ_2^2	M_1^1	M_1^2
...
0.7	0.3515	0.3162	0.0642	1.015	1.008	0.00038	0.00052
0.8	0.4128	0.3389	0.0733	1.008	1.004	0.00026	0.00005
0.81	0.4167	0.3385	0.07425	1.007	1.003	0.00022	-0.00003
0.85	0.4241	0.3296	0.07792	1.004	1.002	0.00002	-0.0004
0.86	0.4230	0.3251	0.07883	1.004	1.001	-0.00005	-0.0005
...

С увеличением давления “точки перегиба” смещаются к краю решетчатой пластинки. Для оболочек с более жесткими характеристиками (за счет большей толщины или при больших значениях модуля Юнга) “точки перегиба” возникают ближе к центру решетчатой пластинки. Внешний слой решетчатой пластинки диска зрительного нерва является более жестким $h_N > h_k$, $k < N$, поэтому наиболее сильные относительные смещения слоев происходят на уровне внешнего слоя, что согласуется с экспериментальными данными.

Во второй главе строятся аналитические решения задач о деформации сферических трехслойной изотропной и двухслойной трансверсально-изотропной оболочек под действием внутреннего и внешнего давления. Для каждого из слоев решается задача Ламе — определения напряженно-деформированного состояния сферического слоя по трехмерной теории упругости в сферических координатах.

Предполагается, что имеет место жесткий контакт слоев, условия контакта имеют вид

$$\sigma_{\rho\rho}^i = \sigma_{\rho\rho}^i, \quad u_{\rho}^i = u_{\rho}^i, \quad \text{при } \rho = R_{i+1}, \quad i = 2, \dots, (n-1).$$

Построение математических моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние глазного яблока под действием внутреннего и внешнего давления, проводится с учетом различных значений толщины и упругих свойств его внешних оболочек, а также с учетом возможности сосудистой оболочки изменять свои биомеханические свойства.

Из граничных условий по перемещениям $u^i = u^{i+1}$ (при $\rho = R_i$) определяются величины давления, действующего в зоне контакта слоев.

Расчеты для оболочки, состоящей из трех слоев с различными упругими свойствам, показывают существенное изменение напряженно-деформированного состояния глаза, по сравнению с расчетами, проведенными для однородной оболочки с осредненными значениями упругих коэффициентов. Для многослойной оболочки с различными упругими свойствами на графиках для перемещений $u^i(\rho)$, $i = 1, 2, 3$ и нормальных напряжений $\sigma_{\rho\rho}^i(\rho)$ появляются изломы в точках $\rho = [R_2, R_3]$, соответствующих границам контакта слоев. На графиках для окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^i(\rho)$ на поверхностях контакта возникают разрывы. При увеличении внутриглазного давления наблюдается увеличение изломов на графиках для перемещений и нормальных напряжений, и разрывов на графике для окружных напряжений. Последнее позволяет говорить о возможности возникновения разрывов, и как следствие, отслоек внутренних, более мягких оболочек глаза (сосудистой и сетчатой) при повышении внутриглазного давления.

На рис. 3 – 4 приведены зависимости перемещений и напряжений для внешней оболочки глаза состоящей из внутренней сетчатой $\rho = [11.0; 11.1]$, средней сосудистой $\rho = [11.1; 11.4]$ и внешней склеральной $\rho = [11.4; 12.0]$ оболочек с различными упругими свойствами для внутриглазного давления 15, 25, 35 мм рт. ст., при упругих коэффициентах: $E_1 = 17.4$ МПа, $E_2 = 0.2$ МПа, $E_3 = 0.02$ МПа, где E_1 — модуль Юнга сетчатки, E_2 — хориоидеи, а E_3 — модуль Юнга склеры.

Изменение упругих коэффициентов средней сосудистой оболочки глаза в наибольшей степени сказывается на перемещениях $u^i(\rho)$, $i = 1, 2, 3$. При более низких значениях модуля Юнга для сосудистой оболочки наблюдаются большие перемещения и более сильные истончения хориоидеи и сетчатки. Сильные истончения тканей также могут приводит к возникновению разрывов и отслоек.

Расчеты для двухслойной сферической оболочки, состоящей из двух

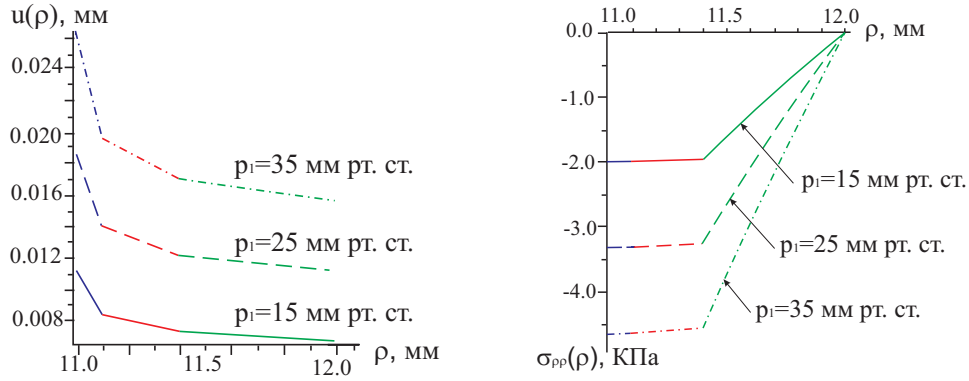


Рис. 3. Зависимости для перемещений (слева) и нормальных напряжений (справа)

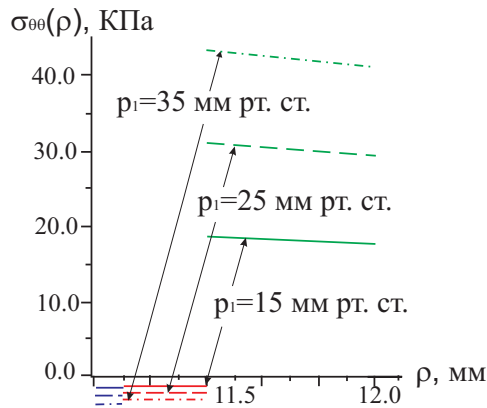


Рис. 4. Зависимости для тангенциальных напряжений

трансверсально-изотропных слоев с различными упругими свойствами, показали, что чем больше разность упругих коэффициентов оболочек в тангенциальном направлении материала и в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, тем сильнее возникают изломы перемещений и напряжений на поверхности контакта.

Расчеты проводились при $E_1 = 0.5$ МПа, $E'_1 = E_1/n_1$, $\nu_1 = 0.45$, $\nu'_1 = \nu_1/n_1$, $E_2 = 5.0$ МПа, $E'_2 = E_2/n_2$, $\nu_2 = 0.45$, $\nu'_2 = \nu_2/n_2$, где E_1, E'_1, ν_1, ν'_1 — упругие коэффициенты внутренней мягкой сосудистой оболочки, E_2, E'_2, ν_2, ν'_2 — упругие коэффициенты внешней, более жесткой склеральной оболочки.

На рис. 5 приведены зависимости перемещений и напряжений для внутренней сосудистой и внешней склеральной оболочек глаза при $n_1 = 2.5$, $n_2 = 10$. Пунктирными линиями обозначены соответствующие перемещения и напряжения оболочек для случая $n_1 = n_2 = 1$ при тех же значениях внутреннего давления глаза.

Известно, что классическая теория оболочек приводит в исходных уравнениях к погрешности порядка h/R по сравнению с единицей, а биологические

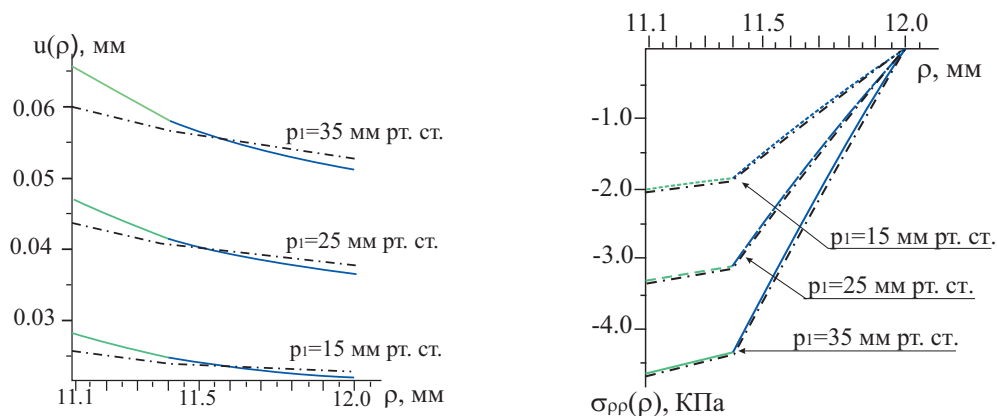


Рис. 5. Зависимости для перемещений (слева) и нормальных напряжений (справа) внутренней и внешней оболочек глаза.

оболочки иногда обладают достаточно большим отношением толщины к радиусу, и, кроме того, часто обладают большой податливостью на межслоевой сдвиг, поэтому исследование напряженно-деформированного состояния таких оболочек требует введения менее строгих гипотез, чем гипотезы Кирхгофа-Лява. На основе теории анизотропных оболочек средней толщины Палия-Спиро рассматривается задача о деформации сферической оболочки, состоящей из конечного числа трансверсально-изотропных слоев. Величина давления, действующего в зоне контакта слоев, определяется методом, предложенным Палием О. М. Проведенные расчеты показали, что теория Палия-Спиро позволяет получить достаточно точные результаты для оценки величины давления, действующего в зоне контакта слоев, число которых в биологических оболочках может варьироваться в широких пределах.

Сравнение решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек показывает, что теория анизотропных оболочек Палия-Спиро достаточно точно описывает решение задачи, и применима, например, для оболочек эллипсоидальной формы (глаза с миопией и гиперметропией).

В третьей главе представлено конечно-элементное моделирование апланационных методов измерения внутриглазного давления в программном пакете Ansys с учетом многослойной структуры роговицы.

При апланационном методе измерения внутриглазного давления роговица деформируется грузом с плоским основанием. Давление, возникающее под грузом тонометра в процессе измерения внутриглазного давления, называется “тонометрическим”. По диаметру образованной зоны контакта (метод Макла-

кова) или по величине нагрузки при заданной зоне контакта груза и роговицы (метод Гольдмана) определяют истинное (до нагружения) внутриглазное давление с помощью специальных таблиц, которые прилагаются к приборам.

Корнеосклеральная оболочка глаза моделируется сопряженными сферическими сегментами с разными диаметрами и разными упругими свойствами (см. рис. 6). Роговица моделируется сегментом меньшего радиуса, который разбивается на четыре слоя: первый (внешний) слой отвечает биомеханическим свойствам эпителия, второй — боуеновой оболочки, третий — стромы, четвертый (внутренний) слой — свойствам десцементовой оболочки (см. рис. 7). Склера моделируется однородным сегментом большего радиуса. Исследуется зависимость диаметра площади контакта груза и роговицы (или нагрузки при заданной зоне контакта) от упругих свойств ее слоев и сопряженной с ней склеры при одном и том же внутриглазном давлении. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными при таком же истинном давлении, но для однородной по толщине роговицы с осредненным значением упругих свойств составляющих ее слоев.

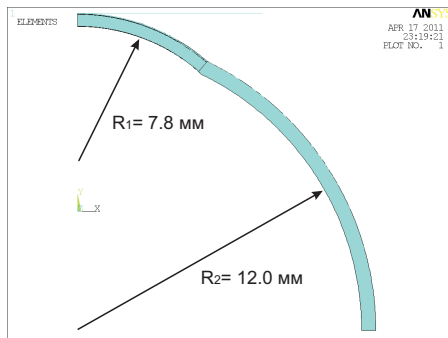


Рис.6.

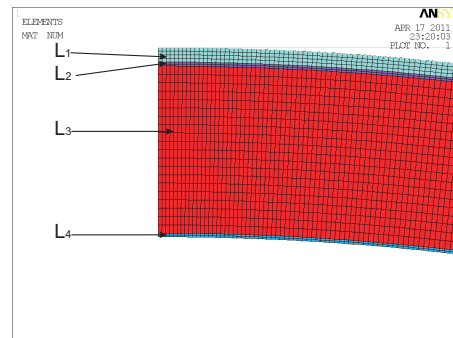


Рис. 7.

При построении конечно-элементной модели рассматривается осесимметричная задача. В силу симметрии выполняется двумерное моделирование (2D) с использованием в качестве конечного элемента PLANE82.

На рис. 8 – 11 представлены распределения контактных напряжений при измерении ВГД тонометрами Гольдмана и Маклакова (10 г) для корнеосклеральной оболочки, у которой модули упругости каждого слоя роговицы в направлении толщины оболочки в 20 раз меньше тангенциальных модулей, модули роговицы на порядок меньше, чем модули склеры: $h_1 = 0.043$ мм, $h_2 = 0.012$ мм, $h_3 = 0.5$ мм, $h_4 = 0.01$ мм, $h_5 = 0.6$ мм, $E_1 = 0.06$ МПа, $E_2 = 0.6$ МПа, $E_3 = 0.03$ МПа, $E_4 = 0.09$ МПа, $E_5 = 5.0$ МПа, $E'_i/E_i = 0.05$ МПа. Истинное внутреннее давление на представленных рисунках 15 mm Hg.

На поверхности изотропии коэффициенты Пуассона роговицы и склеры принимались $\nu_i = 0.499$, $i = 1, \dots, 5$, а в направлении толщины, в виду отсутствия экспериментальных данных, накладывались только ограничения, справедливые для трансверсально-изотропного тела, и принимались равными $\nu'_i = 0.01$. Значения для коэффициентов сдвига $G_i = 0.9$, $G'_i = 0.1$, $i = 1, \dots, 5$.

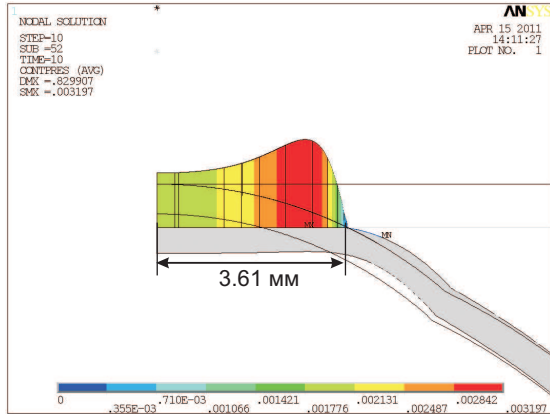


Рис. 8. Распределение контактных напряжений при измерении ВГД тонометром Маклакова (груз 10 г) для случая многослойной по толщине роговицы $E'_i/E_i = 0.05$, $i = 1, \dots, 4$.

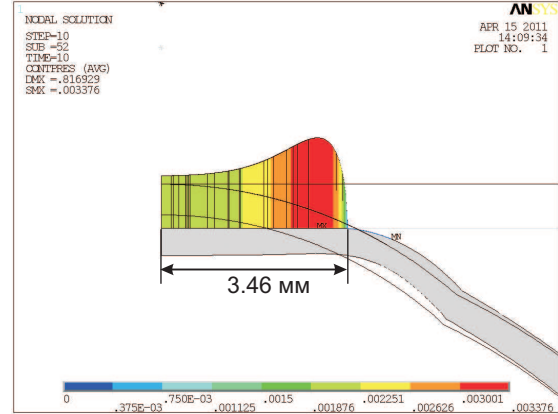


Рис. 9. Распределение контактных напряжений при измерении ВГД тонометром Маклакова (груз 10 г) для случая однородной по толщине роговицы $E = 0.3$ МПа и $E'/E = 0.05$.

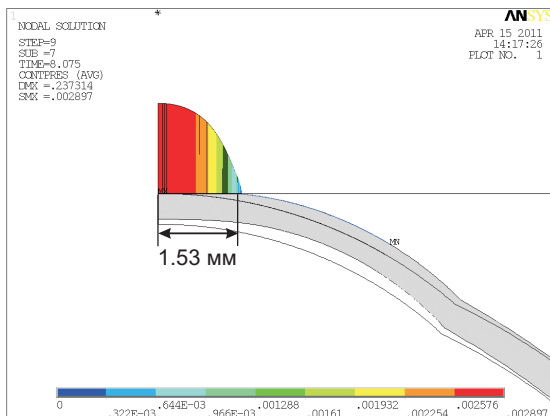


Рис. 10. Распределение контактных напряжений при измерении ВГД тонометром Гольдмана для случая многослойной по толщине роговицы $E'_i/E_i = 0.05$, $i = 1, \dots, 4$.

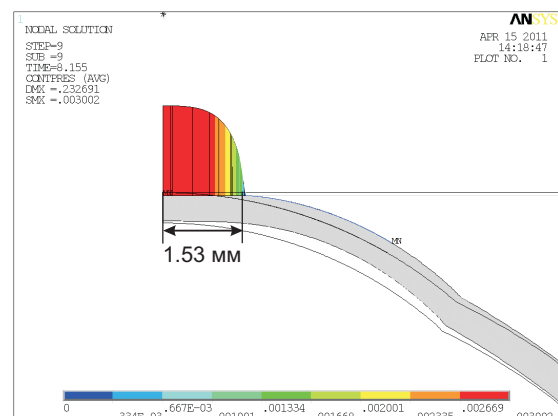


Рис. 11. Распределение контактных напряжений при измерении ВГД тонометром Гольдмана для случая однородной по толщине роговицы $E = 0.3$ МПа и $E'/E = 0.05$.

Сравнение результатов, полученных для тонометра Маклакова (груз 10 г) для многослойной роговицы, с результатами, полученными для однородной роговицы, но с осредненными значениями упругих параметров составляющих ее слоев, показало, что зона контакта в первом случае больше, т.е. величина тонометрического давления меньше. Аналогичные результаты получаются для тонометра Гольдмана. В этом случае зоны контакты имеют фиксированное значение 3.06 мм, но величина силы, необходимой для деформации многослойной роговицы с неоднородными по толщине упругими свойствами, меньше, чем величина силы, необходимой для деформации однородной роговицы с “осредненными” упругими свойствами. Таким образом, учет неоднородности по толщине упругих свойств основных слоев роговицы делает более близкими значения тонометрического и истинного внутриглазного давления.

Расчеты, проведенные с учетом многослойности роговицы, также как и исследования Бауэр С. М., Качанова А. Б. и др. (2007) показали, что чем меньше зона контакта груза и оболочки, тем больше доля усилий, идущих на изгибные деформации. В результате моделирования измерения ВГД тонометром Маклакова, особенно грузом 10 г, отмечается значительное увеличение зоны контакта и влияние склеральной оболочки на процесс деформирования. Так как при измерении ВГД тонометром Гольдмана диаметр зоны контакта 3.06 мм, а при измерении тонометром Маклакова (5 и 10 г) при “средних” давлениях (от 10 до 30 мм рт. ст.) диаметр зоны контакта больше, то показатели ВГД при измерении тонометром Гольдмана оказываются существенно более чувствительными к изменению толщины роговицы, чем показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова. Также влияние толщины роговицы на показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова весом 5 г больше, чем на показатели ВГД при измерении тонометром 10 г, что согласуется и с экспериментальными данными.

Результаты расчетов показывают, что после операций по коррекции зрения уменьшается изгибная жесткость роговицы, и, как следствие, уменьшаются показатели ВГД, полученные тонометром Гольдмана и тонометром Маклакова. При этом, изменение показателей ВГД по Маклакову незначительны. Изменение показателей ВГД по Гольдману после операций по коррекции зрения существенно зависят от глубины воздействия лазера (абляции). При измерении ВГД по Маклакову и по Гольдману существенно меняется картина распределения контактных напряжений.

Кроме того, результаты расчетов при разных модулях упругости показали, что на деформации оболочек, а значит и на показатели ВГД, наиболее суще-

ственное влияние оказывает модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной к поверхности, а этот модуль в трансверсально-изотропной оболочке не зависит от тангенциального модуля упругости. Для роговицы, состоящей из нескольких слоев, этот модуль характеризует связь этих слоев, и известно, что этот модуль имеет малое значение.

Для многослойной оболочки с различными упругими свойствами тангенциальные напряжения, действующие в плоскости перпендикулярной к поверхности изотропии, получаются на порядок выше, чем для роговицы с осредненными значениями упругих коэффициентов. Для более жесткой роговицы, у которой модуль упругости в направлении толщины в 20 раз меньше чем модуль упругости в плоскости изотропии $E'_i/E_i = 0.05$, значения касательных напряжений также оказываются выше, чем для более мягкой роговицы, у которой $E'_i/E_i = 0.01$.

В заключении представлены результаты выносимые на защиту.

Публикации автора по теме диссертации.

1. Золотухина Л. А. (Карамшина). О деформации многослойной решетчатой пластинки диска зрительного нерва // Российский журнал биомеханики, № 4 (42), 2008. С. 40 – 46.
2. Карамшина Л. А. О деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 1. Вып. 2. 2011. С. 133 – 138.
3. Карамшина Л. А. Механические модели аппланационной тонометрии с учетом многослойности роговицы // Российский журнал биомеханики, № 3, 2011. С. 37 – 44.
4. Золотухина Л. А. (Карамшина). К построению математической модели глаукомы // Международная научная конференция по механике “Пятое поляховские чтения”, 3 – 6.02.2009, Санкт-Петербург, Россия, Тезисы докладов. 2009. С. 209.
5. Карамшина Л. А. О деформации трехслойной изотропной сферической оболочки // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошного тела” за 2010 – 2011. Издательство СПбГУ. 2011. С. 15 – 26.