САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Горячко Евгений Евгеньевич

ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПЕРЕКЛАДЫВАНИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и вычислительной математики Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ВЕРШИК Анатолий Моисеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВАВИЛОВ Николай Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет)
	доктор физико-математических наук, профессор ВИНБЕРГ Эрнест Борисович (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)
Ведущая организация:	Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Защита состоится "___" _________ 2011 г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

Адрес диссертационного совета: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "___" _________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации изучаются характеры и представления некоторых локально-конечных групп, то есть индуктивных пределов не более чем счетных семейств конечных групп. Уже из определения локально-конечных групп видно, что различные вопросы теории представлений этих групп естественно пытаться решить с помощью сведения к вопросам о представлениях конечных групп. Эта идея реализуется в асимптотическом методе, предложенном А. М. Вершиком и С. В. Керовым в 1980-х годах. С другой стороны, теория представлений локально-конечных групп естественно связана с теорией представлений аппроксимативно-конечномерных алгебр, то есть индуктивных пределов не более чем счетных семейств конечномерных C^*-алгебр (групповые C^*-алгебры локально-конечных групп, в частности, являются такими алгебрами), развитой в работах О. Браттели (1972 г.), Г. Эллиотта (1976 г.), Э. Эффроса, Д. Хандельмана и Ч. Шена (1980 г.) и других.

Одной из классических задач теории представлений локально-конечных групп является задача об описании K_0-функторов и неразложимых характеров конкретных групп. Пожалуй, самым интересным примером здесь является бесконечная симметрическая группа S_∞ — индуктивный предел симметрических групп S_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, относительно естественных вложений. K_0-функтор и неразложимые характеры этой группы были описаны в серии работ А. М. Вершика и С. В. Керова (1981, 1983, 1985 гг.). Описание K_0-функтора группы S_∞ оказывается связанным с классической теорией симметрических функций. Неразложимые характеры группы S_∞ описываются при помощи эргодического метода. Его реализация в данном случае состоит в исследовании асимптотики неразложимых характеров групп S_n при естественных вложениях (слабые пределы последовательностей таких характеров суть неразложимые характеры группы S_∞). Таким образом, задача сводится к теореме о предельном поведении неразложимых характеров групп S_n. Ее доказательство получается из классических фактов о представлениях этих групп. Среди других методов решения рассматриваемой задачи мы отметим подход Э. Тома, связанный с теорией целых функций (1964 г.), полугрупповой метод Г. И. Ольшанского и А. Ю. Окунькова (1990-е годы), новый метод А. М. Вершика, связанный с несвободными действиями групп (2010 г.).

Кроме описанного выше примера группы S_∞ аналогичные вопросы были решены для бесконечномерной полной линейной группы над конечным полем (Х.-Л. Скудларек, 1976 г.), бесконечномерной унитарной группы (Д. Войкулеску, 1976 г.; А. М. Вершик и С. В. Керов, 1982 г.), различных групп матриц над счетными полями ненулевой характеристики (А. М. Вершик и К. П. Кохась, 1990 г.; К. П. Кохась, 2001 и 2002 гг.).

В первых двух главах диссертации рассматривается еще одна группа такого типа — группа рациональных перекладываний полуинтервала $[0,1)$ (мы будем называть его "отрезок"). Она состоит из всех таких симметрий отрезка, что действие каждой из них является перекладыванием конечного числа полуинтервалов с рациональными концами, образующих разбиение отрезка. Эта группа — плотная подгруппа в группе всех автоморфизмов отрезка как пространства с мерой. С другой стороны, она является индуктивным пределом групп S_n, где $n \in \mathbb{N}$, относительно периодических вложений. Группа перекладываний (или близкие группы) ранее возникала в литературе в контексте эргодической теории (А. М. Вершик, 1974 г.), теории групп (Н. В. Крошко и В. И. Сущанский, 1998 г.) и в связи с другими вопросами. Мы описываем K_0-функтор этой группы как кольцо Рисса и все ее неразложимые характеры. Для описания характеров мы используем эргодический метод; как и в случае группы S_∞, он позволяет свести задачу к асимптотическому анализу некоторых классических фактов о характерах групп S_n.

В третьей главе диссертации мы работаем с представлениями конечных групп, однако мотивация рассматриваемой нами задачи связана с бесконечномерной теорией представлений. В 1998-м году А. М. Вершик и С. В. Керов определили локально-компактную группу $\mathrm{GLB}(q)$; она состоит из почти треугольных бесконечных матриц над полем из q элементов. Оказывается, что с теоретико-представленческой точки зрения именно эта группа является правильным "q-аналогом" группы S_∞: ее неразложимые характеры в существенной части описываются по аналогии с неразложимыми характерами группы S_∞ (что совершенно не верно для полной линейной группы бесконечных матриц). На конечном уровне рассмотрение группы $\mathrm{GLB}(q)$ приводит к определению параболических вложений групповых алгебр групп $\mathrm{GL}(n,q)$ (их пределом является групповая алгебра Брюа–Шварца группы $\mathrm{GLB}(q)$).

Ключевое свойство параболических вложений, которое также объединяет группы $\mathrm{GLB}(q)$ и S_∞, состоит в том, что ветвление представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при ограничениях, определяемых этими вложениями (параболических ограничениях), простое. Этот факт может быть получен как следствие глубокой теории, в которой дается полное описание неприводимых представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$, развитой в работах Дж. А. Грина (1955 г.), С. И. Гельфанда (1970 г.), Д. К. Фаддеева (1974 г.) и А. В. Зелевинского (1981 г.). Мы даем прямое доказательство простоты ветвления, не зависящее от классификации всех неприводимых представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$.

Цели работы. Основные цели работы состоят в реализации асимптотического подхода к описанию K_0-функтора и неразложимых характеров группы перекладываний и в отыскании прямого доказательства простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при параболических ограничениях.

Общая методика работы. В работе используются как общие методы теории представлений, так и специфические комбинаторные методы, связанные с представлениями симметрических групп, и аналитические методы, разработанные в теории представлений локально-конечных групп.

Основные результаты работы. Получено описание K_0-функтора и неразложимых характеров группы перекладываний. В рамках эргодического метода доказана более общая теорема (описание характеров является ее следствием) об асимптотике неразложимых характеров групп S_n при периодических вложениях. Найден новый прямой способ доказательства простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при параболических ограничениях.

Научная новизна. Результаты первой и второй глав диссертации являются новыми. В третьей главе диссертации предлагается новый прямой способ доказательства известного утверждения.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты первых двух глав могут быть использованы в дальнейшем исследовании теории представлений группы перекладываний и в решении других алгебраических и аналитических задач, связанных с этой группой. Результат третьей главы может быть полезен для исследования и более глубокого понимания теории представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ и $\mathrm{GLB}(q)$.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории представлений и динамическим системам ПОМИ РАН, а также на международных конференциях “Noncommutative harmonic analysis, theory of group representations, and quantification” (Тамбов, Россия, 2009 г.) и “Groups and their actions” (Бендлево, Польша, 2010 г.) и на российской конференции “Математика — XXI век. 70 лет ПОМИ” (Санкт-Петербург, 2010 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в статьях [1–5]. В работе [2] диссертанту принадлежит формулировка основной теоремы об асимптотике неразложимых характеров групп S_n при периодических вложениях, а также доказательство этой теоремы для случая, когда количество клеток под первой строкой диаграмм Юнга стабилизируется; доказательство для случая, когда это условие не выполнено, получено совместно с Ф. В. Петровым. Статьи [1–3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 3 глав, разбитых на разделы и подразделы. Текст диссертации изложен на 55 страницах. Список литературы содержит 37 наименований.

Содержание работы

Введение к диссертации начинается с определения основных понятий теории представлений локально-конечных групп и изложения краткой истории изучаемого круга вопросов и примеров описания K_0-функтора и неразложимых характеров (эти понятия определены ниже) для некоторых важных локально-конечных групп. Далее G есть локально-конечная группа.

Определение. K_0-*функтор* $\mathrm{K}_0(G)$ есть упорядоченная абелева группа с порядковой единицей, состоящая из классов изоморфизма конечно-порожденных проективных виртуальных G-модулей. Конус неотрицательных элементов K_0-функтора состоит из истинных G-модулей. Порядковая единица K_0-функтора — G-модуль, отвечающий регулярному представлению группы G. Функция $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ — *характер*, если χ центральна ($\chi(gh) = \chi(hg)$ для любых $g, h \in G$), нормирована ($\chi(1) = 1$), неотрицательно определена (матрица $\bigl(\chi(g_i g_j^{-1})\bigr)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ неотрицательно определена для всех $g_1, \ldots, g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$). Характер называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде нетривиальной выпуклой комбинации других характеров.

Неразложимые характеры конечной группы суть в точности нормированные (поделенные на размерность) неприводимые характеры данной группы в смысле теории представлений конечных групп.

Далее во введении мы определяем основные объекты, о которых будет идти речь в диссертации, формулируем наши основные результаты, анализируем их в контексте результатов, полученных ранее другими авторами, и в завершение описываем структуру диссертации.

В **главе 1** мы описываем K_0-функтор и находим некоторые алгебраические свойства неразложимых характеров группы рациональных перекладываний; эту группу мы обозначаем через R. Процитируем основные определения, связанные с группой R (в них мы считаем, что группа S_n действует на множестве $\{0, \ldots, n-1\}$, а id_n — единичный элемент этой группы).

Определение 5. Биекцию $g\colon [0,1) \to [0,1)$ назовем *рациональным перекладыванием отрезка*, если найдутся такие число $n \in \mathbb{N}$, перестановка $u \in \mathrm{S}_n$ и разбиение $\big\{[x_0, x_1), \ldots, [x_{n-1}, x_n)\big\}$ отрезка на полуинтервалы с рациональными концами, что $g(x) = x - x_i + x_{u(i)}$ для всех $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Определение 6. *Прямое произведение* $u \sqcap v \in \mathrm{S}_{lm}$, где $l, m \in \mathbb{N}$, перестановок $u \in \mathrm{S}_l$, $v \in \mathrm{S}_m$ — перестановка, определенная для всех $z \in \{0, \ldots, lm-1\}$ по формуле $u \sqcap v(z) = m\, u(\lfloor z/m \rfloor) + v(z \bmod m)$.

Определение 7. *Периодическое вложение* группы S_l в группу S_{lm} есть сопоставление каждой перестановке $u \in \mathrm{S}_l$ перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m \in \mathrm{S}_{lm}$.

Определение 8. *Натуральным характером* χ_{nat} группы R будем называть функцию, значение которой на данном перекладывании есть мера множества неподвижных относительно него точек отрезка.

Определение 1.3. *Внешнее произведение* $\pi \boxtimes \rho \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_{lm})$, где $l, m \in \mathbb{N}$, *определяемое операцией прямого произведения перестановок*, представлений $\pi \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_l)$ и $\rho \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_m)$ есть представление $\mathrm{ind}_{\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m}^{\mathrm{S}_{lm}}(\pi \otimes \rho)$ (здесь мы полагаем, что $\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m$ вкладывается в S_{lm} при помощи операции $\sqcap$).

Группа R является индуктивным пределом групп S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно периодических вложений (мы считаем, что множество $\mathbb{N}$ упорядочено по делимости). Вложение $\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathrm{R}$, согласованное с периодическими вложениями, задается так: $u \mapsto g_u$, где $g_u(x) = \frac{u(\lfloor xn \rfloor) + \{xn\}}{n}$ для всех $x \in [0, 1)$.

Продолжение по линейности операции $\boxtimes$ на абелеву группу $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ определяет на ней структуру ассоциативного и коммутативного кольца с единицей. K_0-функтор группы R есть фактор абелевой группы $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ по идеалу (относительно умножения $\boxtimes$), порожденному элементами $\mathrm{reg}_1 - \mathrm{reg}_n$, $n \in \mathbb{N}$ (здесь reg_n — регулярное представление группы S_n). Таким образом, на абелевой группе $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ возникает ассоциативное и коммутативное фактор-умножение $\boxtimes$, превращающее ее в кольцо Рисса.

В **разделе 1.2** мы получаем описание кольца $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ в терминах симметрических функций; для этого сначала мы вводим вспомогательную структуру моноида на множестве разбиений натуральных чисел.

Обозначим через $[\omega_1, \ldots, \omega_s]$ разбиение натурального числа $\omega_1 + \ldots + \omega_s$ на слагаемые $\omega_1, \ldots, \omega_s \in \mathbb{N}$ (порядок их перечисления нам не важен, поэтому мы используем квадратные, а не круглые скобки); пусть $\mathcal{P}^\times$ — множество всех разбиений. Операция $\sqcap$ обладает следующим свойством: класс сопряженности результата ее применения к данным перестановкам не зависит от замены этих перестановок на сопряженные. Пользуясь этим свойством и тем, что разбиения параметризуют классы сопряженных элементов в симметрических группах, мы получаем, что операция $\sqcap$ определяет фактор-операцию на множестве $\mathcal{P}^\times$, которую мы называем умножением разбиений. Множество $\mathcal{P}^\times$ — коммутативный моноид относительно этой операции.

Обозначим через $\Lambda^\times$ абелеву группу симметрических функций с нулевым свободным членом; пусть $\mathrm{p}_n \in \Lambda^\times$ — n-я степенная сумма для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{p}_\omega = \mathrm{p}_{\omega_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_{\omega_s}$ для любого разбиения $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_s]$. В силу того, что любая симметрическая функция однозначно представляется в виде многочлена с рациональными коэффициентами от степенных сумм, группа $\Lambda^\times$ вкладывается в пространство многочленов над $\mathbb{Q}$ от переменных $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ с нулевым свободным членом. Это пространство изоморфно моноидному кольцу $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$ моноида $\mathcal{P}^\times$, рассматриваемому как пространство над $\mathbb{Q}$. Перенесем умножение из $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$ в пространство многочленов; обозначим это пространство также через $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$. Наконец, отождествим группу $\Lambda^\times$ с ее образом при описанном выше вложении в кольцо $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$. В теореме 1.1 доказано, что $\Lambda^\times$ есть подкольцо этого кольца, изоморфное кольцу $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$; основной результат о кольце $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ содержится в следствии из этой теоремы.

Следствие. *Кольцо* $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ *изоморфно факторкольцу кольца* $\Lambda^\times$ *по идеалу, порожденному элементами* $\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_{n[1]}$, $n \in \mathbb{N}$ *(здесь* $n[1] = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}}]$*).*

В терминах характеров наличие структуры кольца на K_0-функторе группы R влечет важное свойство мультипликативности ее неразложимых характеров; в **разделе 1.3** сначала мы доказываем это свойство и с его помощью находим счетную серию неразложимых характеров группы R.

Теорема 1.2. *Пусть* χ *— характер группы* R*; тогда он неразложим, если и только если он мультипликативен относительно операции* $\sqcap$ *(то есть* $\chi(g_{u\sqcap v}) = \chi(g_u)\chi(g_v)$ *для всех* $u \in \mathrm{S}_l$, $v \in \mathrm{S}_m$, $l, m \in \mathbb{N}$*).*

Предложение 1.3. *Функции* χ^k_{nat} *(см. определение* 8*) суть неразложимые характеры группы* R *для всех* $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Описать все неразложимые характеры группы R без применения дополнительных идей не удается, однако в следствии из теоремы 1.3 мы устанавливаем еще одно их свойство, которым мы воспользуемся в главе 2.

Следствие. *Пусть* χ *и* u *— нееединичный неразложимый характер группы* R *и перестановка, длины циклов которой не взаимно просты в совокупности, соответственно, тогда* $\chi(g_u) = 0$.

Связь между симметрическими функциями и представлениями групп S_n восходит к работам Ф. Г. Фробениуса и И. Шура (1900-е годы). Описание K_0-функтора группы R и свойство мультипликативности мы получаем по аналогии с тем, как это было сделано для группы S_∞ (А. М. Вершик и С. В. Керов, 1983 г.). Результаты главы 1 опубликованы в [4] и частично в [2].

В **главе 2** мы даем описание всех неразложимых характеров группы R в рамках эргодического метода; мы получаем это описание как следствие теоремы 2.2 об асимптотике неразложимых характеров групп S_n при периодических вложениях. Далее под кофинальными подмножествами множества $\mathbb{N}$ мы понимаем подмножества, содержащие кратные любых чисел.

Определение 2.1. Сеть $(\chi_n)_{n\in N}$, где N — кофинальное подмножество множества $\mathbb{N}$ и χ_n — характер группы S_n для всех $n \in N$, *слабо сходится относительно периодических вложений* к характеру χ группы R, если для всех $l \in N$ и $u \in \mathrm{S}_l$ числовая сеть $\big(\chi_{lm}(u \sqcap \mathrm{id}_m)\big)_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}$ сходится к $\chi(g_u)$.

Теорема 2.1. *Неразложимые характеры группы* R *и только они суть пределы слабо сходящихся относительно периодических вложений сетей неразложимых характеров групп* S_n, $n \in \mathbb{N}$.

Эта теорема есть следствие в частном случае группы R общей теоремы об аппроксимации неразложимых характеров локально-конечных групп. Далее мы формулируем основную теорему главы 2; используя эту теорему совместно с теоремой 2.1, мы получаем следствие об описании неразложимых характеров группы R. Мы работаем с неразложимыми характерами групп S_n, используя классическое соответствие между ними и диаграммами Юнга. Обозначим через $\mathcal{Y}_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, множество диаграмм Юнга с n клетками, а через $\overline{\chi}_\lambda$ — неразложимый характер группы S_n, соответствующий $\lambda \in \mathcal{Y}_n$; пусть $\mathrm{r}_1(\lambda)$ и $\mathrm{c}_1(\lambda)$ — длины первых строки и столбца диаграммы λ.

Теорема 2.2. *Пусть* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$. *Тогда сходимость сети* $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *неразложимых характеров симметрических групп эквивалентна сходимости числовой сети* $\big(n - \max(\mathrm{r}_1(\lambda_n), \mathrm{c}_1(\lambda_n))\big)_{n\in\mathbb{N}}$, *причем если эта сеть сходится к* $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, *то сеть* $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к характеру* χ^k_{nat}.

Следствие. *Неразложимые характеры группы* R *исчерпываются характерами* χ^k_{nat} *для всех* $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Как видно, в теореме 2.2 устанавливается более сильный результат, чем только описание неразложимых характеров группы R; оставшаяся часть главы 2 посвящена доказательству теоремы 2.2; в нем возникает несколько фактов, представляющих самостоятельный интерес. Оно начинается со сведения теоремы 2.2 к следующей теореме с более простой формулировкой.

Теорема 2.3. *Пусть* $(\lambda_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N} \mathcal{Y}_n$ *(где* N *— кофинальное подмножество в* $\mathbb{N}$*),* $\mathrm{r}_1(\lambda_n) \geqslant \mathrm{c}_1(\lambda_n)$ *для любых* $n \in N$, $\lim_{n\in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = k$; *тогда сеть* $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ *слабо сходится к характеру* χ^k_{nat}, *то есть для любых* $l \in N$ *и* $u \in \mathrm{S}_l$ *мы имеем* $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}} \overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = \chi^k_{\mathrm{nat}}(g_u)$.

Доказательство теоремы 2.3 распадается на два больших случая: $k < \infty$ и $k = \infty$. В первом из них доказательство следует из специальной формулы для характеров $\overline{\chi}_\lambda$, удобной для перехода к пределу при периодических вложениях. Во втором случае мы работаем напрямую с классическим правилом Мурнагана–Накаямы для вычисления этих характеров.

В **разделе 2.2** рассматривается случай $k<\infty$. Обозначим через χ_λ, где $\lambda\in\mathcal{Y}_n$ и $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, ненормированный неприводимый характер группы S_n, соответствующий диаграмме λ; тогда $\overline{\chi}_\lambda=\frac{\chi_\lambda}{\chi_\lambda(\mathrm{id}_n)}$. Обозначим через $a_l(u)$, где $u\in\mathrm{S}_n$, а $l\in\mathbb{N}$, число циклов длины l в цикловой записи перестановки u (в частности, $a_1(u)$ равно числу неподвижных точек); тогда $\chi_{\mathrm{nat}}(g_u)=a_1(u)/l$. Теорема 2.3 в случае $k<\infty$ сводится к следующей теореме.

Теорема 2.4. *Пусть* $(\lambda_n)_{n\in N}\in\prod_{n\in N}\mathcal{Y}_n$ *(где N — кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$),* $n-\mathrm{r}_1(\lambda_n)=k$ *для любых* $n\in N$*; тогда для любых* $l\in N$ *и* $u\in\mathrm{S}_l$ *мы имеем* $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}\bigl(\chi_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)/\chi_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})\bigr)=(a_1(u)/l)^k$.

Эта теорема является следствием представляющего независимый интерес свойства полиномиальности неприводимых характеров групп S_n. Его смысл заключается в том, что величина $\chi_\lambda(u)$ является многочленом специального вида относительно параметров $a_1(u),a_2(u),\ldots$, зависящим только от формы диаграммы λ под первой строкой. Полиномиальность неприводимых характеров групп S_n доказана в теореме 2.5. Прежде чем сформулировать эту теорему, проиллюстрируем ее на простейших примерах (в этих примерах и далее через $(\lambda_1,\ldots,\lambda_c)$, где $c\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_c\in\mathbb{N}$ и $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_c$, обозначается диаграмма, длины строк которой суть числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_c$):

- $\chi_{(n-1,1)}(u)=a_1(u)-1$;
- $\chi_{(n-2,2)}(u)=\frac{1}{2}a_1(u)(a_1(u)-3)+a_2(u)$;
- $\chi_{(n-2,1,1)}(u)=\frac{1}{2}(a_1(u)-1)(a_1(u)-2)-a_2(u)$.

Теорема 2.5. *Пусть* $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *и* $\mu\in\mathcal{Y}_j$*; тогда существует такой многочлен* P_μ *от переменных* $a_1,\ldots,a_j$ *степени* j*, что*

(1) *для любых* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$*, где* $n\geqslant 2j$*, и* $u\in\mathrm{S}_n$*, мы имеем* $\chi_{(n-j)\cup\mu}(u)=$ $=P_\mu(a_1(u),\ldots,a_j(u))$ *(здесь $(n-j)\cup\mu$ есть диаграмма, получающаяся из диаграммы μ добавлением первой строки длины $n-j$);*

(2) *старшую степень j в P_μ имеет только одночлен* $\frac{\chi_\mu(\mathrm{id}_j)}{j!}a_1^j$.

Раздел 2.3 посвящен случаю $k=\infty$; используя то, что $\chi^\infty_{\mathrm{nat}}=\delta_{\mathrm{id}}$ — дельта-функция в единице на группе R, мы сводим его к следующей теореме.

Теорема 2.6. *Пусть* $(\lambda_n)_{n\in N}\in\prod_{n\in N}\mathcal{Y}_n$ *(где N — кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$),* $\mathrm{r}_1(\lambda_n)\geqslant\mathrm{c}_1(\lambda_n)$ *для любых* $n\in N$, $\lim_{n\in N}(n-\mathrm{r}_1(\lambda_n))=\infty$*; тогда для любых* $l\in N$ *и* $u\in\mathrm{S}_l\setminus\{\mathrm{id}_l\}$ *мы имеем* $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)=0$.

Пользуясь следствием из теоремы 1.3, сначала мы проверяем, что теорему 2.6 нам достаточно доказать только для перестановок $u \in \mathrm{S}_l \setminus \{\mathrm{id}_l\}$, длины циклов которых взаимно просты в совокупности. Пусть u — такая перестановка; обозначим количество циклов этой перестановки через c, а их длины — через $l_1, \ldots, l_c$; тогда $l_1 + \ldots + l_c = l$ и $\gcd(l_1, \ldots, l_c) = 1$.

Определение 2.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$; тогда *m-порядок* есть разбиение отрезка $\{1, 2, \ldots, lm\}$ на cm отрезков длин $\underbrace{l_1, \ldots, l_1}_{m \text{ раз}}, \underbrace{l_2, \ldots, l_2}_{m \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{l_c, \ldots, l_c}_{m \text{ раз}}$.

Обозначим через $\mathcal{O}_m$ множество всех m-порядков. Ясно, что любой m-порядок σ задает упорядочивание длин циклов перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m$. Для любого $i \in \{1, \ldots, cm\}$ обозначим i-ю из этих длин через σ_i. Кроме того, пусть $(\lambda_n)_{n \in N}$ — сеть диаграмм, указанная в формулировке теоремы 2.6.

Определение 2.5. Пусть $m \in (\frac{1}{l}N) \cap \mathbb{N}$ и $\sigma \in \mathcal{O}_m$; тогда *σ-замощение* ζ — такая последовательность диаграмм $(\,) = \lambda_0^\zeta \subset \ldots \subset \lambda_{cm}^\zeta = \lambda_{lm}$, что для всех $i \in \{1, \ldots, cm\}$ мы имеем: $\lambda_i^\zeta / \lambda_{i-1}^\zeta$ — косой крюк (то есть связная косая диаграмма, не содержащая поддиаграммы $(2, 2)$), состоящий из σ_i клеток.

Для любого $\sigma \in \mathcal{O}_m$ обозначим через $\mathcal{Z}(\sigma)$ множество всех σ-замощений. Применяя правило Мурнагана–Накаямы, мы имеем

$$\chi_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = (-1)^{cm} \sum\nolimits_{\zeta \in \mathcal{Z}(\sigma)} (-1)^{\sum_{i=1}^{cm} (\text{высота крюка } \lambda_i^\zeta / \lambda_{i-1}^\zeta)}.$$

Отсюда мы получаем, что $|\chi_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m)| \leqslant |\mathcal{Z}(\sigma)|$ для всех $\sigma \in \mathcal{O}_m$. Основная идея дальнейшего рассуждения состоит в том, что в этой оценке мы переходим к математическому ожиданию функции $\sigma \mapsto |\mathcal{Z}(\sigma)|$ относительно некоторой специальной меры α_m на множестве $\mathcal{O}_m$. Тогда доказательство теоремы 2.6 сводится к проверке того, что ожидание величины $|\mathcal{Z}(\sigma)|$ бесконечно мало по сравнению с $\chi_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})$ при $m \to \infty$. Мы проверяем этот факт с помощью различных арифметических и комбинаторных оценок.

Классическая теория представлений групп S_n связана с именами А. Юнга, Ф. Г. Фробениуса, И. Шура, В. Шпехта (1900–1930-е годы). Эргодический метод первоначально возник в теории меры (А. М. Вершик, 1974 г.). Классические примеры применения этого метода приведены в работах А. М. Вершика и С. В. Керова (1980-е годы); как и в главе 1, основным примером для нас была группа S_∞. Результаты главы 2 опубликованы в [2, 3].

В **главе 3** мы даем прямое доказательство простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n, q)$ при параболических ограничениях. Определим сначала параболические вложения групповых алгебр групп $\mathrm{GL}(n, q)$ (мы обозначаем их через $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, q)]$; здесь q — примарное число и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Определение 9. *Параболическое вложение* e_n алгебры $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, q)]$ в алгебру $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n+1, q)]$ есть линейное отображение, определенное между ними и действующее на элементах группы $\mathrm{GL}(n, q)$ по следующей формуле (на всю алгебру $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, q)]$ это отображение продолжается по линейности):

$$e_n \colon h \longmapsto \frac{1}{q^n} \sum_{u \in (\mathbb{F}_q)^n} \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что e_n — мономорфизм алгебр и $e_n(\mathrm{id}_n) \neq \mathrm{id}_{n+1}$, если $n \neq 0$. Непосредственным обобщением параболических вложений являются U-вложения. Они определяются ниже в следующем контексте: G — конечная группа, H и U — ее подгруппы, причем H нормализует U и $H \cap U = \{1\}$.

Определение 3.1. *U-вложение* $\mathrm{e}_U \colon \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ — мономорфизм алгебр, действующий по формуле $\mathrm{e}_U(h) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} hu$ для всех $h \in H$.

При помощи U-вложения мы определяем следующую операцию U-ограничения представлений группы G на подгруппу H.

Определение 3.2. *U-ограничение* $\rho = \mathrm{res}_U(\pi)$ комплексного представления π группы G есть представление группы H в пространстве $W = \mathrm{Im}\, \pi(\mathrm{e}_U(1))$, действующее по формуле $\rho(h) = \pi(\mathrm{e}_U(h))|_{W \to W}$ для всех $h \in H$.

Для группы $G = \mathrm{GL}(n+1, q)$ и ее подгрупп $H = \{ \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid h \in \mathrm{GL}(n, q)\}$ и $U = \{ \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_n & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid u \in (\mathbb{F}_q)^n\}$ U-вложение e_U совпадает с параболическим вложением e_n. Параболическое ограничение представлений группы $\mathrm{GL}(n+1, q)$ на подгруппу $\mathrm{GL}(n, q)$ определяется как U-ограничение для указанных матричных групп G, H и U. Простота ветвления означает, что любого неприводимого представления группы $\mathrm{GL}(n+1, q)$ разложение на неприводимые компоненты параболического ограничения этого представления свободно от кратностей. Наше доказательство данного факта состоит из следующих двух частей. Сначала мы доказываем сформулированный ниже абстрактный критерий простоты ветвления при U-ограничениях. Затем мы проверяем этот критерий для групп $\mathrm{GL}(n, q)$ при помощи матричных вычислений.

Теорема 3.1. *Пусть у группы G имеется инволютивный автоморфизм θ, сохраняющий подгруппу H и удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) *любой $g \in G$ сопряжен с $\theta(g)^{-1}$, причем для каждого $g \in H$ это сопряжение можно осуществить при помощи элемента группы H;*

(2) *для любого $g \in G$ найдется такой $h \in H$, что $\theta(g)^{-1} \in h^{-1}\theta(U)gUh$.*

Тогда ветвление комплексных представлений группы G при U-ограничении на подгруппу H простое (то есть для любого неприводимого комплексного представления π группы G разложение на неприводимые компоненты представления $\mathrm{res}_U(\pi)$ свободно от кратностей).

Раздел 3.2 посвящен доказательству теоремы 3.1. Ключевую роль в доказательстве играет сформулированная ниже простая лемма; именно при помощи этой леммы мы доказываем, что разложения на неприводимые компоненты некоторых представлений свободны от кратностей (классический критерий для проверки этого свойства, состоящий в том, что оно эквивалентно коммутативности алгебры эндоморфизмов данного представления, оказывается неприменимым в рассматриваемой задаче).

Лемма 3.1. *Пусть комплексные конечномерные представления ρ и ρ' конечной группы H действуют в пространствах W и W' соответственно; тогда следующие условия равносильны:*

(1) *произведение кратностей вхождения каждого неприводимого представления группы H в представления ρ и ρ' не превосходит 1;*

(2) $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b \iff \operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} b$ *для всяких операторов a и b, действующих из W в W' и сплетающих представления ρ и ρ'.*

В **разделе 3.3** мы доказываем, что условия теоремы 3.1 выполнены для группы $G = \mathrm{GL}(n+1, K)$ и ее подгрупп $H = \{\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid h \in \mathrm{GL}(n, K)\}$ и $U = \{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_n & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid u \in K^n\}$, а также инволютивного автоморфизма $\theta\colon g \mapsto (g^{\mathrm{T}})^{-1}$, $g \in G$ (здесь K — поле и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Для поля $K = \mathbb{F}_q$ этот факт совместно с теоремой 3.1 дает нам прямое доказательство простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n, q)$ при параболических ограничениях.

Проверка условий теоремы 3.1 для указанных матричных групп основывается на простом факте о том, что любая матрица сопряжена со своей транспонированной, а также на следующей теореме, уточняющей этот факт.

Теорема 3.3. *Для любой матрицы* $f \in \mathrm{Mat}(n, K)$ *существует такая матрица* $h \in \mathrm{GL}(n, K)$*, что* $f^{\mathrm{T}} = h^{-1} f h$*,* $h = h^{\mathrm{T}}$*. Кроме того, если* $\mathrm{rk}\, f = n - 1$*, то для любых таких векторов* $u, v \in K^n$*, что* $u \notin \mathrm{Im}\, f$*,* $v \notin \mathrm{Im}\, f^{\mathrm{T}}$*, матрица* h *может быть выбрана так, что* $hv - u \in \mathrm{Im}\, f$*.*

Идея, используемая нами в теореме 3.1, происходит из теории представлений линейных групп над локальными неархимедовыми полями (И. М. Гельфанд и Д. А. Каждан, 1975 г.; И. Н. Бернштейн и А. В. Зелевинский, 1976 г.). Параболическое вложение алгебр $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, q)]$ естественно возникает в исследовании теории представлений группы $\mathrm{GLB}(q)$ (А. М. Вершик и С. В. Керов, 1998 г.). Результаты главы 3 опубликованы в [1] и частично в [5].

Автор выражает самую искреннюю благодарность своему научному руководителю Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задач, терпение и неоценимую помощь в работе над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.

[1] *Горячко Е. Е.* Элементарное доказательство простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n, q)$ при параболических ограничениях // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, вып. 2. — С. 82–87.

[2] *Горячко Е. Е., Петров Ф. В.* Неразложимые характеры группы рациональных перекладываний отрезка // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2010. — Т. 378. — С. 17–31.

[3] *Горячко Е. Е.* Полиномиальность неприводимых характеров симметрических групп // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2010. — Т. 378. — С. 32–39.

Другие публикации.

[4] *Горячко Е. Е.* K_0-функтор и характеры группы рациональных перекладываний отрезка // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2008. — Т. 360. — С. 124–138.

[5] *Горячко Е. Е.* Простота ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n, q)$ при параболических ограничениях // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2009. — Т. 373. — С. 124–133.