

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

ЧИСТОВ Алексей Леонидович

**ПРИМЕНЕНИЕ И РАЗВИТИЕ  
ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ  $f$  – МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ  
ДЛЯ РАСЧЁТА ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Павловский Валерий Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Исаев Сергей Александрович  
(Санкт-Петербургский Государственный  
Университет Гражданской Авиации)

доктор физико-математических наук,  
профессор Мирошин Роман Николаевич  
(Санкт-Петербургский Государственный  
Университет)

Ведущая организация: Центральный Научно-Исследовательский  
Институт им. акад. А. Н. Крылова  
(Санкт-Петербург)

Защита состоится «9» июня 2011 года в 14:00 часов на заседании совета Д-212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Университетская пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., дом 7/9.

Автореферат разослан «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физ.-мат. наук, профессор



Е. В. Кустова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В современной гидродинамике ламинарный и турбулентный режимы течения жидкости изучаются раздельно. Результатом такого подхода стало возникновение обособленных и различных по содержанию теорий двух режимов течения, в рамках которых записываются свои реологические соотношения, что в свою очередь порождает разные аналитические выражения для профилей скорости, коэффициентов сопротивления и других гидродинамических характеристик. В сложившейся ситуации рассмотрение последовательного преобразования ламинарного потока в турбулентный является нетривиальной задачей.

Раздельным изучением режимов обусловлены возможные сложности, возникающие при выборе математической модели течения жидкости. Это связано с тем что, во-первых, не всегда можно заранее указать критическое число Рейнольдса перехода от ламинарного режима к турбулентному, что бывает, например, при создании новой техники, когда течение мало исследовано экспериментально. Во-вторых, при рассмотрении обтекания тел во многих случаях неизвестно, какой режим течения реализуется на том или ином участке поверхности. Указанные неопределенности могут стать причиной некорректного выбора модели течения, что негативно сказывается на точности получаемых при расчетах результатов.

Описание турбулентных течений, ввиду сложности явления, представляет крайне сложную задачу. В теории турбулентности развивается несколько существенно отличающихся направлений, однако наибольшие успехи связаны с феноменологическим подходом. В нём возникает проблема замыкания системы уравнений движения жидкости, которая решается посредством записи дополнительных реологических соотношений, содержащих эмпирические параметры. На данный момент времени существует целый перечень уже апробированных моделей турбулентности, в то же время интенсивно ведутся работы по созданию новых. Это связано с развитием вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD), которая за последние десятилетия проделала путь, сопоставимый со столетиями для классической гидродинамики. Практическое применение моделей турбулентности значительно упрощается посредством использования специальных вычислительных комплексов, содержащих широкий перечень математических моделей, описывающих течения жидкости и предназначенных для инженерных расчётов разнообразных течений жидкости. Однако при рассмотрении конкретных турбулентных течений каждый раз возникает дополнительная проблема – проблемы выбора модели турбулентности, поскольку каждая из них, как правило, ориентирована на некоторый класс течений, применительно к которому её использование особенно эффективно. Существующие модели турбулентности, к сожалению, нельзя считать универсальными, поскольку их применение к различным классам турбулентных течений, не позволяет получать результаты одинаково высокой степени точности и достоверности. Это означает, что научные исследования в облас-

ти гидродинамики турбулентных течений, в том числе и в рамках феноменологического подхода всё ещё не закончены.

Проблема описания турбулентности является сложной и многоплановой, и до настоящего времени окончательно не решена в рамках какого-либо одного подхода. В то же время рассмотрение её с различных точек зрения, использование различных методов исследований позволяет надеяться на существенное продвижение. На основании этого может быть полезным новый подход к описанию течений вязкой жидкости, основанный на использовании такого реологического соотношения, которое независимо от режима течения, и удовлетворительно, в согласии с опытом, описывает поле осреднённых скоростей и трение на стенках для каждого конкретного числа Рейнольдса.

Следует отметить, что в настоящее время различными авторами предпринимаются попытки разработать подобную модель. В этом плане характерны работы В. С. Мингалева с сотрудниками, в которых используются наборы специальных параметров и функций.

Достичь этой цели можно также и на чисто феноменологическом уровне, анализируя обширные экспериментальные данные по течениям вязкой жидкости, прежде всего в турбулентном режиме, поскольку для ламинарного режима течения теория и опыт блестяще согласуются. Основы такой феноменологической модели, являющейся в некотором смысле чисто феноменологической альтернативой гипотезе длины пути перемешивания Л. Прандтля, содержатся в работах В. А. Павловского.

В фундамент настоящего исследования положена именно эта феноменологическая теория для течения вязкой жидкости. Предложенную в ней модель течения в дальнейшем, для краткости, будем называть  $f$  – моделью турбулентности. Теория нуждается в дальнейшем развитии и распространении ее на различные случаи течений, что позволит строить достаточно простые инженерные методики расчетов течений жидкости при произвольных числах Рейнольдса. На основе расчётов течения по этой модели можно выполнить предварительную оценку гидродинамических характеристик потока и затем, если требуется уточнение расчётов, выбрать из существующих моделей турбулентности наиболее подходящую. В работе последовательно изложено развитие  $f$  – модели, предложенной с целью наилучшего описания гидродинамических характеристик при любом режиме течения вязкой несжимаемой жидкости.

Для исследования работоспособности  $f$  – модели и её развития в работе были выбраны внутренние течения, а именно плоское напорное течение Куэтта, которое до настоящего времени представляет существенный исследовательский интерес ввиду его важности для гидродинамической теории смазки.

**Предметом исследования** является  $f$  – модель турбулентности. Применительно к простым сдвиговым течениям эта модель позволяет получать решения в квадратурах. Содержащаяся в  $f$  – модели эмпирическая функция  $\Psi(f)$  может быть модифицирована с целью лучшего согласования с экспериментом, особенно в зоне перехода от ламинарного режима к турбулентному. Ревизия

эмпирической функции может исключить возможность получения решения в квадратурах, поэтому полезно реализовать процедуру численного решения задач о внутренних течениях в рамках рассматриваемой модели, что также является предметом исследования. Для верификации  $f$  – модели результаты расчётов требуется сравнить с данными, полученными экспериментально и по другим методикам расчёта.

#### **Цели и задачи исследования**

- Применение  $f$  – модели турбулентности для расчёта внутренних течений
- Получение аналитического решения задачи о плоском напорном течении Куэтта при произвольных числах Рейнольдса
- Разработка и верификация процедуры численного решения задачи о плоском напорном течении Куэтта в рамках используемой модели
- Сопоставление полученных результатов с расчётами по другим методикам и имеющимся экспериментальными данными
- Обобщение  $f$  – модели турбулентности для учета анизотропии и памяти течения
- Расчёт осреднённых и пульсационных характеристик течения на основе обобщенной модели

**Методы исследования.** В диссертации использованы теоретические методы исследования – методы механики сплошных сред, гидродинамики, аналитические методы и численные методы решения краевых задач, в том числе методы решения нелинейных уравнений.

**Достоверность** основных полученных результатов базируется на корректном использовании методов и аппарата механики сплошных сред, гидромеханики, математического анализа и численных методов. Характеристики течений, рассчитанные по представленным расчётным методикам, сравниваются с известными экспериментальными данными и результатами других авторов.

**Научная новизна** результатов диссертации состоит в следующем:

- Расчёты внутренних течений выполнены на основе  $f$  – модели турбулентности
- В рамках  $f$  – модели турбулентности решена задача о плоском напорном течении Куэтта в широком диапазоне чисел Рейнольдса
- Рассматриваемая  $f$  – модель турбулентности обобщена на случай учета анизотропии и памяти турбулентного потока
- На основе обобщённой модели рассчитаны пульсационные характеристики турбулентного течения в плоском канале

**Результаты, выносимые на защиту:**

- Результаты применения  $f$  – модели турбулентности для расчёта внутренних течений
- Решение задачи о напорном течении Куэтта при произвольных числах Рейнольдса

- Развитие  $f$  – модели турбулентности с целью учета анизотропии и памяти турбулентного потока
- Расчёт пульсационных характеристик турбулентного течения в плоском канале в рамках обобщённой феноменологической модели

**Практическая значимость.** Результаты, полученные в работе, развивают теорию течений вязкой жидкости и могут быть использованы для расчета внутренних течений жидкости в широком диапазоне чисел Рейнольдса. При этом проблема выбора математической модели течения, соответствующей ламинарному либо турбулентному режимам течения решается в рамках  $f$  – модели автоматически и не требует дополнительных усилий со стороны исследователя. Данное свойство позволяет в первом приближении рассчитывать течения независимо от режима движения жидкости, что особенно ценно при неизвестных критериях переходного режима. На основе результатов расчётов может быть сделан вывод о режиме течения жидкости, а затем, с целью повышения точности, могут быть использованы другие, отличные от  $f$  – модели, методы решения.

Разрабатываемая  $f$  – модель в перспективе может быть включена в расчётные комплексы, предназначенные для численного интегрирования уравнений движения жидкости.

Результаты работы могут быть использованы в энергетической и транспортной отраслях промышленности.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты исследований по теме диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры, а также на международной научной конференции студентов и аспирантов «Процессы управления и устойчивость» на факультете ПМ-ПУ СПбГУ в 2007 году, XVI Республиканской научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов «Физика конденсированного состояния» в ГГУ им. Янки Купалы в 2008 году; международной научной конференции по механике «Пятые поляховские чтения» в 2009 году.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы отражены в 5 публикациях [1]–[5]. В совместной работе [2] соавтору Д. В. Никущенко принадлежит постановка задачи и реализация расчетов, диссертанту – участие в теоретической модификации алгоритма, в работе [4] соавтору В. А. Павловскому – постановка задачи, диссертанту – аналитические выкладки, в [5] соавтору В. А. Павловскому – постановка задачи и анализ результатов, диссертанту – теоретические выкладки и реализация численных расчетов.

Статьи [1]-[2] опубликованы в изданиях, входящем в перечень ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 145 страницах, содержит 39 рисунков, 4 таблицы. Список литературы содержит 165 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** кратко освещается современное состояние проблемы описания течений жидкости. Обосновывается актуальность темы диссертации, указывается цель и методы исследования. Перечислены основные результаты, выносимые на защиту. Также кратко описана структура работы и содержание последующих глав.

**В первой главе** кратко освещается проблема теоретического описания течений вязкой жидкости в ламинарном и турбулентном режимах. Рассмотрены некоторые полуэмпирические модели турбулентности, используемые при решении прикладных инженерных задач, а также механизм их построения, основанный на использовании уравнений переноса характеристик турбулентного течения, являющихся той или иной модификацией уравнений Навье-Стокса. Описана положенная в основу работы модель течения, разработанная В. А. Павловским как чисто феноменологическая альтернатива гипотезе длины пути перемешивания Л. Прандтля.

Согласно данной модели выражение для суммарного касательного напряжения, которое включает в себя вязкие и турбулентные напряжения записывается в виде:

$$t = \frac{2mS}{(1-f)} \quad (1)$$

где  $t$  – тензор суммарных напряжений;  $m$  – динамическая вязкость;  $S = \frac{1}{2}[\tilde{N}u + (\tilde{N}u)^T]$  – тензор скоростей деформаций;  $u$  – скорость жидкости в рассматриваемой точке потока, причем в случае турбулентного режима она понимается как осредненная по Рейнольдсу; величина  $f$  является функцией координат и характеристик течения, причем при числах  $Re \rightarrow 0$  функция  $f \rightarrow 0$  и во всей зоне течения имеет место чисто ламинарный режим течения, а при  $Re \rightarrow \infty$ ,  $f \rightarrow 1$  течение является полностью турбулентным с профилем предельной полноты.

Подстановка реологического соотношения (1) в уравнение движения сплошной среды в напряжениях позволяет получить уравнение движение жидкости согласно рассматриваемой модели:

$$r \frac{du}{dt} = -\tilde{N}p + \frac{m}{(1-f)} \Delta u + \frac{m}{(1-f)^2} S \cdot \tilde{N}f \quad (2)$$

Видно, что уравнение (2) представляет собой модификацию уравнения Навье-Стокса, в которое оно и переходит при  $f = 0$ .

Введение в рассмотрение функции  $f$ , характеризующей режим течения, нарушает замкнутость системы, состоящей из уравнения движения жидкости и уравнения неразрывности, в результате чего необходимо дополнительное скалярное соотношение для функции  $f$ . Такое уравнение имеет вид:

$$r \frac{df}{dt} = m \Delta f + m \frac{\Psi(f)}{(1-f)} \tilde{N}f \cdot \tilde{N}f + r(1-f) \frac{(\tilde{N}p \times \tilde{N}f) \cdot (\tilde{N} \times u)}{\sqrt{2} |S : S| \sqrt{2} |W : W|} \quad (3)$$

где  $\Psi(f) = (2a + b(1-f)) / (a + b(1-f))$  – алгебраическая функция  $f$ ; величины  $a = 2,5$ ;  $b = 8,5$  – феноменологические константы, найденные посредством обработки опытных данных для широкого класса пристенных турбулентных течений;  $W = \frac{1}{2} [\tilde{N}u - (\tilde{N}u)^T]$  – антисимметричная часть тензора градиентов скоростей; двоеточие – символ двойного скалярного произведения (двойной свертки).

Система уравнений, состоящая из уравнения движения (2), уравнения переноса (3) и уравнения неразрывности, позволяет описывать течения жидкости в широком диапазоне чисел Рейнольдса, включающем в себя как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. Все величины в уравнениях системы понимаются как осредненные по Рейнольдсу (в ламинарном режиме, очевидно, осредненные и мгновенные значения величин совпадают).

Краевые условия для этой системы уравнений формируются исходя из условий прилипания и вязкого ньютоновского трения на твердой границе  $S$  с нормалью  $n$

$$u|_S = V_{TB}; \quad |2S \cdot n|_S = v_*^2/n; \quad f|_S = 0; \quad |du/df|_S = (a + b)v_* \quad (4)$$

здесь  $n$  – кинематическая вязкость;  $V_{TB}$  – скорость твердой границы;  $v_*$  – динамическая скорость, связанная с трением на стенке  $t_w$  ( $v_* = \sqrt{t_w/r}$ );  $r$  – плотность жидкости.

Во **второй главе** рассматриваются задачи о плоском и круговом течениях Пуазейля. Введение в рассмотрение безразмерных величин  $h = y/h$  и  $v = u/v_*$  (где  $y$  – поперечная координата,  $h$  – полуширина канала,  $u$  – продольная компонента скорости) позволяет свести задачу о плоском течении Пуазейля к двум дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{cases} \text{Re}_* + v''/(1-f) + v'f'/(1-f)^2 = 0 \\ f'' + \Psi(f)f'^2/(1-f) + \text{Re}_*(1-f)f'/v' = 0 \end{cases} \quad (5)$$

здесь  $\text{Re}_* = hv_*/n$  – число Рейнольдса, вычисленное по динамической скорости.

Решение системы (5) может быть получено в квадратурах, в результате для профиля скорости имеем выражение

$$v = bf - a \ln(1-f) \quad (6)$$

В (6) величина  $f$  в каждой точке  $h$  определяется уравнением

$$\text{Re}_*(h - h^2/2) = af/(1-f) - b \ln(1-f) \quad (7)$$

Решение задачи о круговом течении Пуазейля также приводит к соотношениям (6)-(7).



На рис.1, 2 показаны результаты расчетов (сплошные линии) распределения скоростей и коэффициентов сопротивления для рассматриваемых течений.

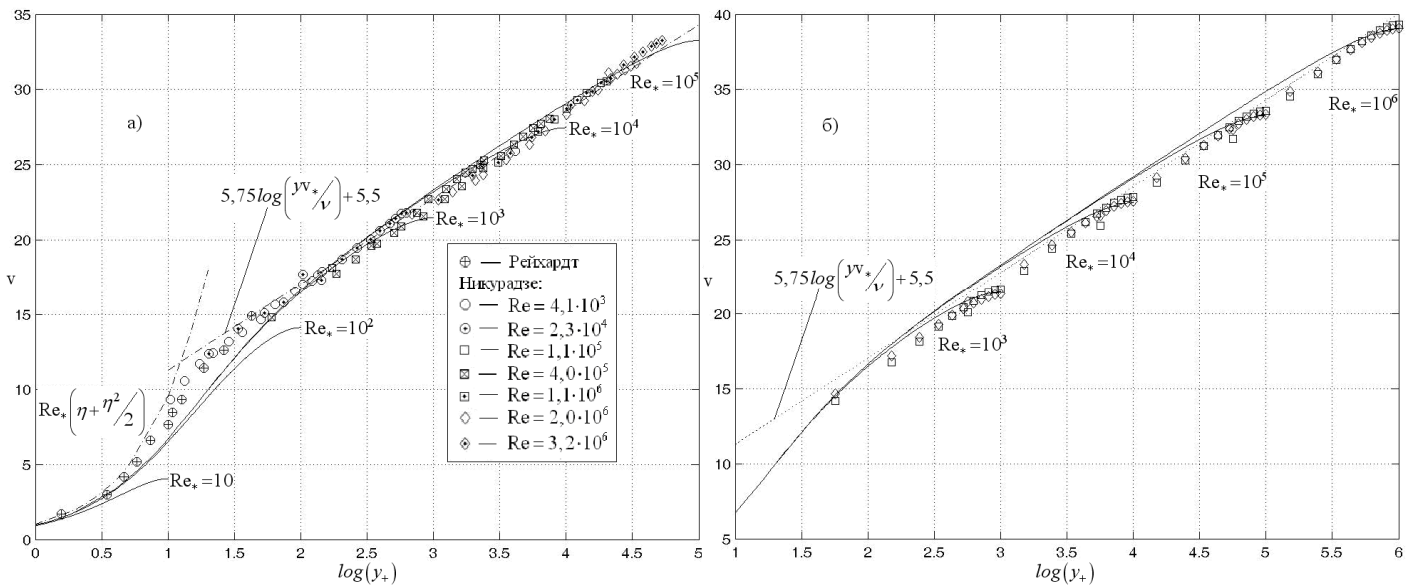


Рис.1. Универсальный закон распределения скоростей для течения Пуазейля. Сплошная линия – расчёт, маркерами обозначены: а) – опытные данные Рейхардта и Никурадзе, б) – результаты, полученные по  $k - e$  ( $\mathbf{W}$ ) и  $k - w$  ( $\diamond$ ) моделям турбулентности.

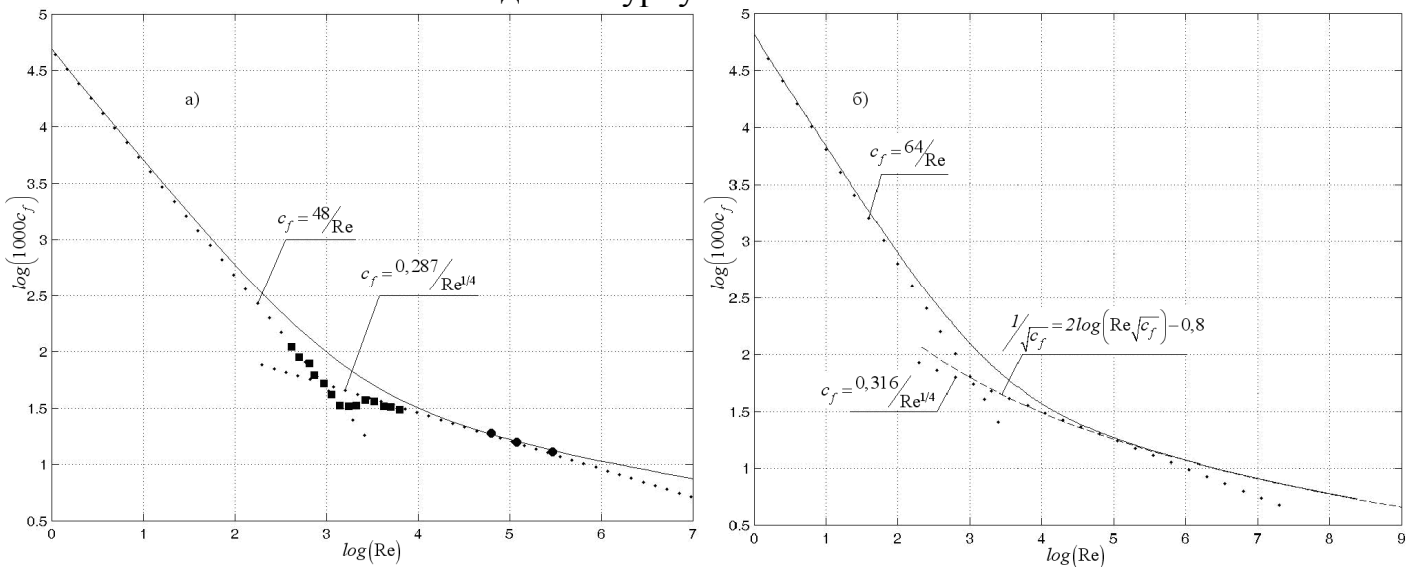


Рис.2. Коэффициент сопротивления для течения Пуазейля. а) – плоский канал. Маркерами нанесены данные А. С. Монины ( $\blacksquare$ ) и Ж. Конт-Белло ( $\bullet$ ); б) – круглая труба. Точками показаны линии, соответствующие законам сопротивления Пуазейля и Блазиуса. Пунктиром – закон Прандтля-Никурадзе для гладких труб.

Представленные данные позволяют говорить об удовлетворительном поведении  $f$  – модели при малых и больших числа Рейнольдса, буферная зона при этом описывается достаточно грубо, что возможно исправить посредством введения в рассмотрение дополнительных эмпирических констант и усложнением формы записи функции  $\Psi$ . Стоит отметить, что для гладкой трубы (рис.2.б) имеет место практически полное совпадение расчетных сопротивлений с законом Прандтля-Никурадзе.

В **третьей главе** рассматривается задача о плоском напорном течении Куэтта, которое до настоящего времени привлекает внимание исследователей и является в определенном смысле эталонным, поскольку позволяет выявить достоинства и недостатки тех или иных моделей турбулентности.

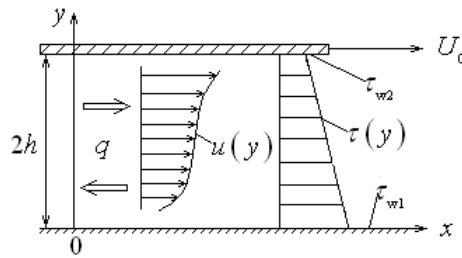


Рис.3. Схема напорного течения Куэтта.

На рис.3.  $q = -\frac{dp}{dx}$  – постоянный градиент давления, действующий вдоль оси канала, направление которого либо совпадает с направлением движения верхней стенки ( $q > 0$ ), либо ему противоположно ( $q < 0$ );  $U_0$  – постоянная скорость движения верхней стенки;  $u(y)$  – продольная компонента скорости;  $t(y)$  – касательное напряжение.

В зависимости от соотношения между величинами  $U_0$  и  $q$  возникает многообразие профилей скорости и касательных напряжений, которые обладают либо ярко выраженными чертами течения Куэтта (куэттообразные течения, течения КТ) либо чертами течения Пуазейля (пуазейлеобразные течения, течения ПТ). Это многообразие можно охарактеризовать некоторыми безразмерными параметрами, например, связанными с трением на стенках

$$Re_{*1} = \frac{v_{*1}h}{n}, \quad k = \frac{t_{w1}}{2qh} \quad (8)$$

где  $t_{w1}$  – касательное напряжение на нижней стенке,  $v_{*1} = \sqrt{|t_{w1}|/r}$  – динамическая скорость, вычисленная на нижней стенке.

Анализ показывает, что использование этих параметров обеспечивает наиболее простой способ решения рассматриваемой задачи в рамках  $f$  – модели. Переход к естественным параметрам – числам Рейнольдса, характеризующим

движение верхней стенки  $\left( Re = \frac{2hU_0}{n} \right)$  и напорное течение  $\left( R_p = \frac{q(2h)^3}{rn^2} \right)$  мо-

жет быть выполнен на заключительном этапе расчетов посредством простых зависимостей:

$$k = 4 \frac{Re_{*1}^2}{R_p} \text{sign}(t_{w1}), \quad Re_{*1} = \frac{Re}{2} \frac{v_{*1}}{U_0}, \quad (9)$$

где величина  $v_{*1}/U_0$  определяется в процессе решения задачи, а значение  $\text{sign}(t_{w1}) = -1$  только при  $0 < k < 0,5$ .

Классификация возникающих профилей скоростей и касательных напряжений, в зависимости от параметра  $k$  представлена на рис.4.

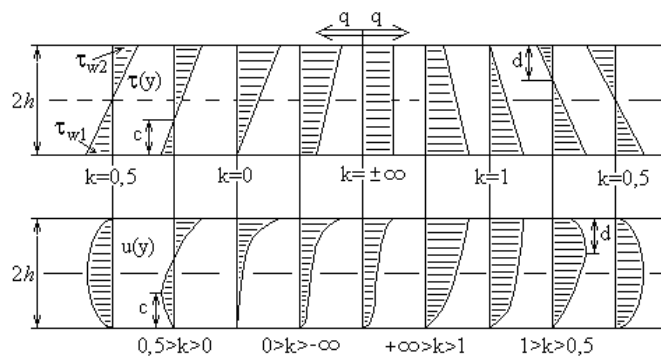


Рис.4. Профили касательных напряжений и скоростей течения Куэтта.

Представленная классификация и характер профилей  $t$  и  $u$  будут справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения. Профили скоростей для этих режимов, будут отличаться только своей полнотой вблизи стенок. Многообразие возникающих течений может быть условно разделено на следующие подтипы

Таблица 1.

	Значение параметра $k$	Тип течения
1	$k = 0,5$	Чистое течение Пуазейля (течение П)
2	$k = \pm\infty$	Чистое (безнапорное) течение Куэтта (течение К)
3	$k \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	Течения с куэтообразными профилями скоростей (течения КТ)
4	$k \in (0; 0,5)$	Пуазейлеобразные течения с возвратной зоной вблизи нижней границы (течения ПТ)
5	$k \in (0,5; 1)$	Пуазейлеобразные течения без возвратной зоны (течения ПТ)
6	$k = 0$	Особый случай
7	$k = 1$	Особый случай

Каждый, из представленных в таблице 1 типов течений, рассматривается в рамках  $f$  – модели индивидуально.

Для напорного течения Куэтта уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, а уравнение движения в проекции на ось  $x$  и уравнение переноса функции  $f$  дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} q + \frac{m}{(1-f)} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{m}{(1-f)^2} \frac{du}{dy} \frac{df}{dy} = 0 \\ \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{\Psi(f)}{(1-f)} \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + q \frac{(1-f)}{n} \frac{df}{dy} / \frac{du}{dy} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

с соответствующими краевыми условиями:

$$\begin{cases} y=0: u=0; \frac{du}{dy} = \frac{v_{*1}^2}{n}; f=0; \left| \frac{du}{df} \right| = (a+b)v_{*1} \\ y=2h: u=U_0; \frac{du}{dy} = \frac{v_{*2}^2}{n}; f=0; \left| \frac{du}{df} \right| = (a+b)v_{*2} \end{cases} \quad (11)$$

здесь  $v_{*2} = \sqrt{\frac{t_{w2}}{r}}$  – динамическая скорость, вычисленная на верхней стенке.

Используемая  $f$  – модель турбулентности для каждой пары параметров  $k$  и  $Re_{*1}$  позволяет получать решение в квадратурах и выполнить расчет профилей скорости, коэффициентов сопротивления и далее сопоставить им соответствующие значения естественных параметров  $Re$  и  $R_p$ . Также в работе выполнено численное решение задач для каждого типа течения. Использование процедуры численного интегрирования, несмотря на наличие аналитического решения, обусловлено возможной ревизией функции  $\Psi$  с целью улучшения качества описания течения в буферной зоне, которая связана с введением в рассмотрение дополнительных феноменологических констант и усложнением структуры самой функции, что в свою очередь исключает возможность получения решения в квадратурах.

Определение достоверности расчётных данных по профилям скоростей и сопротивлений на фоне экспериментальных данных Эль Телбани и Рейнольдса представлены в таблице 2, где в столбцах 3-8 в верхней строке приведены экспериментальные данные, во второй строке - результаты аналитического расчета, в третьей строке – численное решение.

Таблица 2.

$k$	$Re_{*1}$	$\frac{Re}{1000}$	$\frac{Re_{cp}}{1000}$	$\frac{U_0}{v_{*1}}$	$\frac{u_{cp}}{v_{*1}}$	$\frac{u_{max}}{v_{*1}}$	$c_f \cdot 10^4$	Тип профиля
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\infty$	626,04	57,01	28,5	45,5319	22,7659	45,5319	38,5885	К
		55,3165	27,6545	44,1797	22,0869	44,1797	40,9977	
		55,3165	27,6546	44,1797	22,0869	44,1797	40,9977	
2,0187	728,66	57,01	32,33	39,1463	22,1951	39,1463	30,5429	КТ
		55,2118	31,9622	37,8858	21,9321	37,8858	31,2799	
		55,2118	31,9623	37,8858	21,9322	37,8858	31,2798	
1,3333	803,95	57,01	35,80	35,4696	22,2651	35,4696	25,2093	КТ
		53,6968	35,0833	33,3956	21,8193	33,3956	26,2553	
		53,6968	35,0835	33,3956	21,8194	33,3956	26,2552	
1,2788	793,69	57,01	36,14	35,9663	22,8011	35,9663	23,4287	КТ
		51,7382	34,4877	32,5934	21,7262	32,5934	25,8038	
		51,7382	34,4878	32,5934	21,7262	32,5934	25,8037	
1,0402	698,49	38,14	29,79	27,4440	21,4376	27,4440	22,5992	КТ
		36,7522	29,1683	26,3083	20,8795	26,3083	23,8245	
		36,7522	29,1686	26,3083	20,8797	26,3083	23,8240	
1,0045	2040,6	16,05	98,8	28,4666	24,2500	28,4666	17,0805	КТ
		16,5815	96,2493	26,6877	23,5835	26,6877	18,0601	
		16,5815	96,2505	26,6877	23,5838	26,6877	18,0597	

Таблица 2 (окончание).

-3,4741	614,93	57,01	27,17	48,0898	22,9213	48,0898	43,5457	КТ
		58,3581	27,4537	47,4510	22,3226	47,4510	45,9128	
		58,3581	27,4537	47,4510	22,3226	47,4510	45,9128	
0,5	1462,9	-	64,60	-	22,0789	24,2792	41,0274	П
		-	60,5786	-	20,7049	22,5063	46,6531	
			60,5797		20,7053	22,5063	46,6514	
0,6729	2131,8	38,14	97,25	8,9386	22,7887	24,5785	28,6153	ПТ
		39,8706	96,7838	9,3513	22,7000	24,2745	28,8396	
		39,8706	96,7853	9,3513	22,7003	24,2745	28,8387	
0,7809	2163,8	57,01	99,48	13,1288	22,9038	24,5501	24,4102	ПТ
		62,0840	100,161	14,3460	23,1447	24,6980	23,9046	
		62,0839	100,162	14,3460	23,1450	24,6980	23,9039	
0,7968	1431,7	38,14	62,24	13,3178	21,7364	23,3333	25,9289	ПТ
		41,8790	63,1936	14,6256	22,0694	23,6783	25,7668	
		41,8790	63,1946	14,6256	22,0698	23,6783	25,7660	
0,8186	1950,0	57,01	89,28	14,5909	22,8522	24,5113	23,3910	ПТ
		62,1280	89,6257	15,9302	22,9809	24,5512	23,1297	
		62,1280	89,6270	15,9302	22,9813	24,5512	23,1290	
0,9302	1503,1	57,01	67,05	18,9101	22,2385	24,0500	21,7375	ПТ
		63,1166	67,8544	20,9954	22,5715	24,2080	21,1009	
		63,1166	67,8555	20,9954	22,5718	24,2080	21,1003	
0,9972	1251,9	57,01	55,07	22,7659	21,9858	23,4929	20,7463	ПТ
		59,8495	55,5833	23,9035	22,1995	23,9134	20,3487	
		59,8495	55,5842	23,9035	22,1999	23,9134	20,3480	

В целом, результаты сравнения демонстрируют удовлетворительное согласие расчетов с опытными данными. Результаты решения, полученные в квадратурах, практически совпадают с численными, на основании чего можно сделать вывод о работоспособности вычислительной процедуры и возможности ее использования в случае ревизии функции  $\Psi$ .

В четвертой главе выполнено обобщение исходной  $f$  – модели с целью учета анизотропии и памяти турбулентного потока. Реологическое соотношение (1) предполагает, что эллипсоиды, соответствующие тензорам напряжений и скоростей деформаций, соосны, кроме того, не учитывает эффекты памяти турбулентного потока. Опираясь на феноменологическую теорию В. В. Новожилова, реологическое соотношение, позволяющее учитывать анизотропию и память, может быть записано в виде дифференциального соотношения. Применительно к  $f$  – модели такой подход приводит к следующему дифференциальному реологическому соотношению:

$$\frac{\partial t}{\partial t} + (u \cdot \tilde{N})t = -A_r f S - 2m_{eff} \left[ S \cdot W + (S \cdot W)^T \right] + \left[ t \cdot W + (t \cdot W)^T \right] \quad (12)$$

где:

$$A_r = 7r / \sqrt{1 + 2(m_{eff}^\vee)^{1/8}} + rV_0^2/2; \quad m_{eff}^\vee = \frac{m_{eff}}{m} = \frac{1}{(1-f)}; \quad r = t : \mathbf{S} / \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}};$$

$$V_0 = \sqrt{2\mathbf{S} : \mathbf{S} / (\tilde{N}f \cdot \tilde{N}f)} \Psi_1(f), \quad \Psi_1(f) = (1-f) / (a + b(1-f))$$

Уравнение движения сплошной среды в напряжениях в совокупности с уравнением (12), уравнением неразрывности и уравнением переноса меры турбулентности (3) образуют замкнутую систему, учитывающую нелинейность, анизотропию и память турбулентного потока. Краевые условия имеют вид (4). Для простых сдвиговых течений определяющее соотношение (12) приводит к системе двух алгебраических реологических соотношений для касательных и нормальных напряжений.

$$t = t_{12} = m / (1-f) du/dy, \quad R_{11} - R_{22} = -A_r f \quad (13)$$

Напряжения Рейнольдса, согласно В. В. Новожилову, удобно представить через систему инвариантов  $(k, s_2^\vee, \chi)$  и угол  $a$  между главными осями тензоров  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{cases} R_{11} = -\left(1/3 - \sqrt{s_2^\vee/3} \sin \chi + \sqrt{s_2^\vee} \cos \chi \cos 2a\right) rk \\ R_{22} = -\left(1/3 - \sqrt{s_2^\vee/3} \sin \chi - \sqrt{s_2^\vee} \cos \chi \cos 2a\right) rk \\ R_{33} = -\left(1/3 + 2\sqrt{s_2^\vee/3} \sin \chi\right) rk; \quad R_{12} = \left(\sqrt{s_2^\vee} \cos \chi \sin 2a\right) rk \end{cases} \quad (14)$$

Используя соотношения (14) и учитывая что  $R_{12} = ft$ , можно переписать уравнения (13). Для замыкания полученной системы относительно неизвестных  $(k, s_2^\vee, \chi)$  и  $a$  можно использовать эмпирические соотношения, связывающие инварианты, полученные В. А. Павловским, которые применительно к  $f$  – модели записываются в виде

$$\cos 3\chi = 4fr/rk, \quad (20s_2^\vee \cos \chi + 1)V_0\sqrt{f/k} = 1 \quad (15)$$

Профили скорости и меры турбулентности находятся для этого течения согласно формулам (6) и (7). Результаты расчетов пульсационных характеристик для течения в канале при  $Re = 2,3 \cdot 10^5$  на фоне экспериментальных данных Конт-Белло приведены на рис.5.

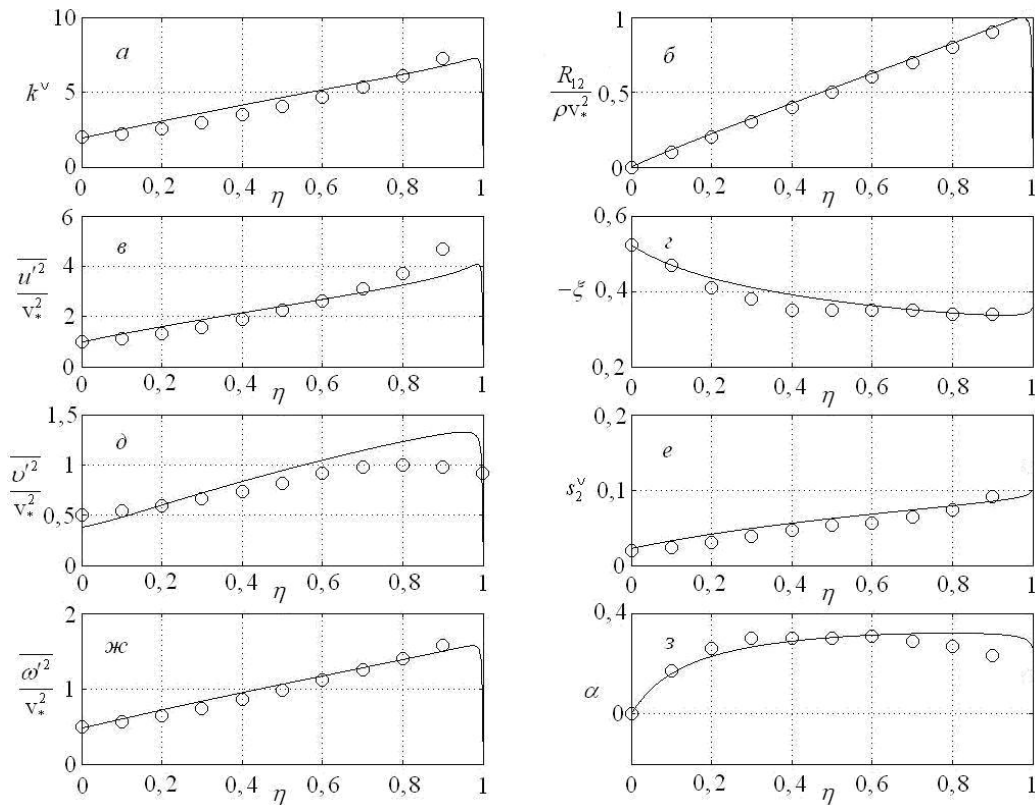


Рис. 5. Пульсационные характеристики течения в плоском канале

В целом, представленные данные демонстрирует удовлетворительное согласование расчётных и экспериментальных пульсационных характеристик.

**В заключении** излагаются основные результаты работы и формулируются выводы, которые состоят в следующем:

1. Для рассмотренных задач расчета внутренних течений несжимаемой жидкости  $f$  – модель позволяет получать решения в квадратурах при произвольных числах Рейнольдса. Эти решения удовлетворительно согласуются с опытными данными, как по профилям скоростей, так и сопротивлением, за исключением сравнительно узкой зоны ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП)

2. При больших числах Рейнольдса, для турбулентного режима течения, модель приводит к логарифмическим профилям скорости, включающим в себя также вязкий подслой, буферную зону и зону внешнего течения

3. Особенностью  $f$  – модели турбулентности является её однослойность. Феноменологических констант в ней всего две, и они являются универсальными

4. Для плоского напорного течения Куэтта  $f$  – модель демонстрирует удовлетворительное качество согласования расчётов с экспериментальными данными и результатами, полученными в рамках других подходов к расчёту турбулентных течений (DNS, применение  $k-e$ ,  $k-w$  моделей турбулентности)

5. Качество описания ЛТП может быть улучшено посредством ревизии функции  $\Psi$  и введение дополнительных эмпирических констант. Однако такая модификация может исключить возможность получения решения в квадрату-

рах, в результате чего возникает необходимость использования численных методов, поэтому в работе была реализована процедура численного интегрирования, а также выполнена ее верификация. Также данная процедура может использоваться при рассмотрении других типов задач, для которых отсутствует возможность получения решений в квадратурах

6. Обобщение  $f$  – модели турбулентности с целью учета анизотропии и памяти турбулентного потока базируется на замене алгебраического определяющего соотношения дифференциальным

7. Для простых сдвиговых течений обобщенная модель приводит к двум алгебраическим соотношениям. Первое из них представляет собой определяющее соотношение, использованное в исходной модели, и позволяет определить профили осредненных скоростей, касательных напряжений и коэффициент сопротивления. Второе, при использовании уже рассчитанных касательных напряжений, дает возможность выполнить расчет нормальных напряжений

8. Для течения в плоском канале результаты расчетов пульсационных характеристик по обобщенной модели удовлетворительно согласуются с опытными данными

9. Использование модели для расчета внутренних течений несжимаемой жидкости позволяет сделать вывод о ее работоспособности. В то же время стоит отметить, что она может быть успешно применена и для расчета более сложных гидродинамических задач, нежели простые сдвиговые течения, как, например, это сделано в работе, посвященной расчету гидродинамических характеристик систем крыльев относительно большой толщины

#### **Публикации по теме диссертации.**

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Чистов А. Л. Единая ламинарно-турбулентная дифференциальная модель для течений вязкой несжимаемой жидкости. Вестник СПбГУ. Сер.10. 2008, вып.4, с.103-106.

2. Никущенко Д. В., Чистов А. Л. Алгоритм расчета гидродинамических характеристик систем крыльев относительно большой толщины. Вестник СПбГУ. Сер.10. 2009, вып.3, с.95-104.

Другие публикации:

3. Чистов А. Л. О построении моделей турбулентных течений в пакетах прикладных программ//Процессы управления и устойчивость. Труды XXXVIII международной научной конференции аспирантов и студентов (CPS'07). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. с.221-226.

4. Павловский В. А., Чистов А. Л. Связь между истинной и изотропной диссипациями через осредненные параметры течения//Проблемы экономии топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС: Межвуз. сб. науч. трудов/ГОУВПО СПбГТУ РП. 2007. с.3-4.

5. Павловский В. А., Чистов А. Л. Расчет плоского напорного течения Куэтта при произвольных числах Рейнольдса//Проблемы экономии топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС: Межвуз. сб. науч. трудов/ГОУВПО СПбГТУ РП. 2009. с.5-12.