САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ПРИКЛАДНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его приложений факультета прикладной математики и физики Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Малозёмов Василий Николаевич
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор
Скворцов Валентин Анатольевич
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

доктор физико-математических наук, профессор
Певный Александр Борисович,
(Сыктывкарский государственный университет)

Ведущая организация: Московский государственный институт электронной техники
(Национальный исследовательский университет "МИЭТ")

Защита состоится "____" ________________ 2011 г. в ____ часов ____ мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, аудитория 405.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Автореферат разослан "____" ________________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.А. Архипова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В работе рассматриваются и решаются задачи прикладного гармонического анализа. Основную часть прикладного гармонического анализа составляет дискретный гармонический анализ, в котором выделяются следующие разделы: дискретное преобразование Фурье (ДПФ), дискретное преобразование Уолша (ДПУ), дискретное преобразование Крестенсона (ДПК) и дискретное мультипликативное преобразование Фурье (ДМПФ). Последние два вида преобразований служат обобщением дискретного преобразования Уолша. Дискретное преобразование Фурье составляет основу учебных курсов по цифровой обработке информации. Рассмотренные дискретные преобразования используются для решения одинаковых или аналогичных задач. В последнее время в прикладных исследованиях чаще стали использовать ДПУ или ДПК вместо ДПФ и анализировать преимущества этой замены.

В классическом гармоническом анализе, который к прикладному гармоническому анализу не относим, выделяются два раздела: тригонометрические ряды Фурье и преобразование Фурье. Хотя дискретное преобразование Фурье имеет внешнее сходство с этими разделами, оно более тесно связано с ДПК или ДМПФ, так как совпадает с последними на некотором классе финитных ступечатых функций.

Современным разделом гармонического анализа служит двоичный гармонический анализ, изложению которого посвящены работы [1]. Двоичный гармонический анализ составляет главную часть прикладного гармонического анализа, представляя собой основную модель прикладного гармонического анализа. Он также подразделяется на три части: ряды Уолша, преобразования Уолша и дискретные преобразования Уолша. Следующим обобщением двоичного служит p-ичный гармонический анализ также состоящий из трех разделов: ряд Крестенсона-Леви, преобразование Крестенсона-Леви и дискретные преобразования Крестенсона. Аналогично осуществляется дальнейшее обобщение двоичного гармонического анализа на случай мультипликативных систем функций.

При решении прикладных задач с применением ДПФ не столь часто обращаются к классическому гармоническому анализу. В двоичном гармоническом анализе, наоборот, наблюдается тесная взаимосвязь между непрерывным и дискретным случаем, обусловленная видом функций Уолша. В технической литературе, посвященной ДПУ, изложение обычно начинают с функций Уолша, введенных в статье [2]. Основной нумерацией функций Уолша считается нуме-

---

[1] Schipp F., Wade W.R., Simon P., Pal J. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. – Budapest: Acad. Kiado, 1990;

Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. - М.: Наука, 1987;

Голубов Б.И. Элементы двоичного анализа. - М.: URSS/ЛКИ, 2007.

[2] Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 45. 5-24.

рация предложенная Пэли [3]. Третьей традиционной нумерацией функций Уолша служит нумерация Качмажа, изученим которой занимались А.А.Шнейдер, Л.А.Балашов, В.А.Скворцов, Н.В.Гуличев, Ф. Шипп. Отмеченные свойства этой системы обусловлены видом её ядра Дирихле. Другим фундаментальным понятием в теории рядов Фурье служат константы Лебега, формулы для которых в случае нумерации Пэли получил Файн [4]. Для случая других нумераций отмечались [5] лишь оценки Шнейдера, записанные относительно непривычного представления двоичных чисел.

Преобразование Уолша, введенное Файном [6], составляет раздел, для которого отмечается структурная близость с рядом Уолша и решаются проблемы, возникающие для дискретных преобразований Уолша. Одной из таких проблем является спектральное разложение соответствующего оператора. Базис из собственных функций преобразования Уолша нашел Ж. Пал [7], а Ф. Шипп высказал заинтересованность в решении аналогичной задачи для дискретных преобразований Уолша. Размерность собственных подпространств для дискретного преобразования Фурье вычислена в статье [8], а для дискретных преобразований Уолша традиционных нумераций Пэли, Уолша и Адамара найдена в статье[9].

Обзор сфер применения дискретных преобразований Уолша трех традиционных нумераций, который приведен в монографии [10], обширен. В книге [11] высказано сожаление, что "среди возможных систем изучены с точки зрения быстроты сходимости спектров при разложении сигналов и удобства практического применения только системы Пэли, Адамара и Уолша". Там же поставлена задача вычисления числа возможных симметричных матриц ДПУ, так как только этот класс дискретных преобразований Уолша позволяет вычислять спектральные характеристики и восстанавливать сигнал с помощью той же матрицы.

Повышенный интерес к дискретным преобразованием вызван развитием вычислительной техники и появлением быстрых алгоритмов их реализации. Нача-

---

[3] Paley R.E.A.C. A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II // Proc. Lond. Math. Soc. 1932. V. 34. 241-279.

[4] Fine N.J. On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V.65:3. 372-414.

[5] Балашов Л.А., Рубинштейн А.И. Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Математический анализ. 1970. - М.: ВИНИТИ, 1971. 147-202.

[6] Fine N.J. The generalized Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. 66-77.

[7] Pal J. The eigenfunctions of the Walsh-Fourier transform // Proc. Int. Conf. Approximation and Functions Spaces. Gdansk, 1979(1981), 553-557.

[8] McClellan J.H., Parks T.W. Eigenvalues and eigenvectors of the discrete Fourier transformation. *IEEE Trans. Audio Electroacoust*, **20**:1 (1972), 66-74.

[9] Bois P. Determination des valeurs propres des matrices de Walsh, Hadamard et Walsh-Fourier // Rev. CETHEDEC. 1973. V. 37. 65-71.

[10] Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. - М.: Наука, 1989.

[11] Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Советское радио, 1975.

ло исследованиям положила статья Гуда [12], в которой предложен метод факторизации матрицы кронекеровой степени. Наиболее популярным стал быстрый алгоритм реализации ДПФ, предложенный Кули и Тьюки [13]. Однако при практической реализации быстрых алгоритмов ДПУ в нумерации Пэли и Уолша часто прибегают к процедуре перестановки координат при переходе от нумерации Адамара, что увеличивает число операций в алгоритме.

Аналогичные проблемы возникают и при исследовании дискретных преобразований Крестенсона, а также дискретных мультипликативных преобразований Фурье. Последние, в силу сложности конструкции, менее востребованы в прикладных задачах.

Цель работы следующая.

1. Исследование ядер Дирихле и констант Лебега для систем Уолша различных нумераций и их обобщений.

2. Выделение класса перестановок дискретных преобразований Уолша и Крестенсона, удобных для применения при цифровой обработке информации. Спектральное разложение операторов прикладного гармонического анализа.

3. Разработка новых подходов к построению быстрых алгоритмов дискретных преобразований.

4. Решение конкретных задач вычислительной математики методами прикладного гармонического анализа.

Научная новизна. Основные теоремы и большинство предложений, приведенных в работе, являются новыми. Разработаны новые конструкции и методы исследований. Введен новый вариант тензорного произведения матриц, для которого дана сравнительная характеристика с известным вариантом тензорного произведения матриц в виде кронекерова произведения. Введено понятие W-матриц, применение операторов анализа и синтеза с любой из которых позволяет обработать и точно восстановить сигнал в классе дискретных функций Уолша. Предложено определение дискретных функций Уолша, не привязанное к нумерации элементов системы, что позволяет три традиционных определения для нумераций Пэли, Уолша и Адамара заменить одним. Предложенные понятия можно оценить как элементы нового математического языка для изложения основ теории дискретных преобразований на конечных интервалах.

Методы исследования. В работе использованы методы вычислительной математики, теории функций и функционального анализа, алгебры, теории разностных уравнений, дискретной математики и другие. Активно применялся метод компьютерного моделирования.

---

[12] Good I.J. The interaction algorithm and practical Fourier analysis// J. Royal Stat. Soc. (London), Ser.B. 1958. V. 20. 361-372.

[13] Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. April 1965. V. 19. 297-301.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят как теоретический, так и практический характер. Они могут найти применение в вычислительной математике, теории ортогональных рядов и преобразований, дискретном гармоническом анализе, в теории цифровой обработке информации. Некоторые затруднения при изложении результатов исследований вызвано еще и тем, что до сих пор не выработана единая терминология в этой сфере среди математиков и прикладников. В последнии годы преподаватели прикладных дисциплин вузов чаще стали высказывать заинтересованность в ознакомлении студентов с азами прикладного гармонического анализа. Поэтому есть потребность в появлении учебного пособия по данной дисциплине, написанного простым и правильным математическим языком. Результаты проведенных исследований положены в основу нового учебного курса "Введение в прикладной гармонический анализ", первоначальный вариант изложения которого дан в учебном пособии [14], рекомендованном учебно-методическим Советом по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов. В диссертации приводятся практические рекомендации по различным вариантам реализации дискретного преобразования Уолша. Разработаны быстрые алгоритмы реализации дискретных преобразований Уолша и Крестенсона. Детальная разработка метода двоичного интегрирования может быть использована в качестве нового способа табличного задания функций в ЭВМ. Полученные тригонометрические формулы могут быть включены в справочники формул сумм и рядов.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на зимних математических школах в Саратове (1982, 1984, 1986, 1996, 1998, 2000, 2004, 2006 гг.) и в Воронеже (1997, 1999, 2003, 2007 гг.), на симпозиумах "Ряды Фурье и их приложение"в Новороссийске (2002, 2005 гг.), на конференциях в Москве (2007, 2008 гг.), Воронеже (2004, 2005 гг.), Суздале (2002, 2004, 2006 гг.), Казани (1997, 2009 гг.), Владимире (2004, 2010 гг.), на семинаре "Дискретный гармонический анализ и геометрическое моделирование"в Санкт-Петербурге (2010 г.), на научно-исследовательском семинаре в МГУ (2007, 2009, 2010 гг.) и на научных семинарах в МИЭТ, ВлГГУ и ВлГУ. Доклад "Rearrergement on the Walsh system", сделан на международной конференции "Workshop on Walsh and Dyadic Analysis"в 2007 г. в гор. Ниш в Сербии.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-14], из которых [1-11] в математических журналах из перечня ВАК. Остальные работы из приведенного списка публикаций автора в основном являются докладами или тезисами докладов на конференциях по теме диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация, изложенная на 257 страницах, состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 203 наименования, включая работы автора.

Содержание работы

Во **введении** выделены разделы прикладного гармонического анализа, обсуждаются объекты исследований и ранее полученные результаты. Сформулированы цели работы. Проведен краткий обзор содержания диссертации.

Первая глава посвящена системе функций Уолша. Сначала приведены определения и свойства основных нумераций функций Уолша, а также групповые свойства функций Уолша. Для сравнения здесь же рассмотрены дискретные функции Уолша, для которых предложено следующее не зависящее от нумерации

Определение 1.2. Дискретной функцией Уолша уровня n назовем любое кронекерово произведение матриц (векторов) $S = (1\ 1)$ и $A = (1\ -1)$ в количестве n сомножителей.

Предложение 1.2. *Любая дискретная функция Уолша уровня n (обозначим ее для определенности $\mathbf{a} = (a_0\ a_1\ a_2 \dots a_{2^n-1})$) однозначно определяется своими n координатами (в наших обозначениях a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, $\dots$, $a_{2^{n-1}}$) с номерами 2^k.*

Предложение 1.3. *Число перемен знака у разных дискретных функций Уолша одинакового уровня различно.*

Это предложение позволяет ввести более короткое определение *дискретных функций Уолша в нумерации Уолша:* номер функции равен числу перемен знака. Доказаны рекуррентные формулы (леммы 1.5, 1.7, 1.8) вычисления дискретных функций Уолша очередной пачки через предыдущие функции в случае нумераций Пэли, Адамара и Уолша.

Подробнее дискретные функции Уолша рассматриваются в третьей главе.

Фундаментальным понятием в теории рядов Фурье является ядро Дирихле, которое в работе изучается для системы Уолша сначала в нумерации Пэли: $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)$.

Введены для числа $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$ понятия *срезки числа*

$$[n]_i = n_1 \cdot 2^0 + n_2 \cdot 2^1 + ... + n_i \cdot 2^{i-1},$$

и *отклонения числа*

$$< n >_i = min\ (\ [n]_i\ \ ,\ 2^i - [n]_i\ \ ).$$

Теорема 1.1 (явный вид модуля ядра Дирихле). *Для всех $x \in (0,1)$ верно*

$$|D_n(x)| =< n >_k,$$

где натуральное k определяется из условия $x \in \Delta_k^1 = [\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k})$.

Следующую функцию назовем *мажорантой ядра Дирихле*

$$h(x) = 2^m \qquad \text{при} \quad x \in \Delta_{m+1}^1\ , \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Вывод о поведение модуля ядра Дирихле.

В любой фиксированной точке $x \in (0,1)$ значение модуля ядра Дирихле $|D_n(x)|$ как функция целочисленного аргумента n совершает периодические колебания (сначала растет, а потом убывает) с постоянной скоростью равной 1 от исходного положения (от функции $e(x) \equiv 0$) до своей мажоранты (до функции $h(x)$) и обратно.

Лемма 1.14 (рекуррентная формула для норм ядра Дирихле). *Если $k < 2^m$, $p \geq 1$, то*

$$||D_{2^m+k}(\cdot)||_p^p = \frac{(2^m+k)^p + (2^m-k)^p}{2^{m+1}} - \frac{k^p}{2^m} + ||D_k(\cdot)||_p^p.$$

Далее для функций

$$f(x) = f(x;p) = \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} - x^p,$$

$$g(x) = g(x;p) = (1+x)^{p-1} - x^{p-1},$$

которые рассмотрим при фиксированном $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$, поставлена

Задача на экстремум. Найти величины

$$A(p) = \inf\{\ C \mid \quad f(x) \leq C^p \cdot g(x) \text{ для всех } x \in [0,1]\} \quad \text{при } 1 < p < 2,$$

$$a(p) = \sup\{\ C \mid \quad f(x) \geq C^p \cdot g(x) \text{ для всех } x \in [0,1]\} \quad \text{при } p > 2.$$

В работе приведены основные результаты в виде табличной функции решения этой задачи, полученные с помощью составленной компьютерной программы.

Теорема 1.2. *Верны следующие оценки норм ядер Дирихле.*

1. Если $1 < p < 2$ *, то* $\quad n^{\frac{1}{p'}} \leq ||D_n||_p \leq A(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}}$,
причем левое неравенство обращается в равенство только при $n = 2^m$.

2. $||D_n||_2 = \sqrt{n}$.

3. Если $p > 2$, то: *a)* $0,9 \cdot n^{\frac{1}{p'}} < a(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}} \leq ||D_n||_p \leq n^{\frac{1}{p'}}$,
причем правое неравенство обращается в равенство только при $n = 2^m$;

b) $||D_n||_p < ||D_{n+1}||_p$ *для всех n.*

При $1 < p < 2$ точность верхней границы подтверждает следующий результат, полученный с привлечением метода компьютерного моделирования – $A(p)$ и $C(p)$ различаются менее, чем на 0,1%, где

$$\lim_{m\to\infty} ||D_{t_m}||_p^p = \frac{2^p - 1}{3(2^{p-1} - 1)} = C(p),$$

t_m - левая точка максимума константы Лебега в пачке. С помощью той же компьютерной программы устанавливается, что и нижняя граница $a(p)$ при $p > 2$ вычислена с 0,1% точностью.

Далее более подробно рассмотрены константы Лебега системы Уолша-Пэли, основные результаты о которых принадлежат Файну (сноска 4). Их дополняет

Лемма 1.18 (симметрии). *Константы Лебега симметричны внутри пачки:* $L_{2^{n-1}+k} = L_{2^n-k}$ *для всех* $0 \le k < 2^{n-1}$.

Следуя Файну введем: $e(n) = L_n - f(n)$ *отклонение констант Лебега от своей почти-мажоранты* $f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2 3n$ и

$\max\limits_{2^m \le n \le 2^{m+1}} L_n = L_{t_m}$ - константы Лебега в точке максимума пачки.

Теорема 1.3. *Во всех точках, кроме левых точек максимума с четным номером, константы Лебега меньше* $f(n)$, *то есть* $e(n) < 0$ *при* $n \ne t_{2m}$. *В отмеченных точках отклонение от функции* $f(n)$ *мало:*

$$0 < e(t_{2m}) < \frac{1}{10} \cdot 4^{-m} < (t_{2m})^{-1}.$$

Это улучшение **теоремы Радемахера-Файна**: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} e(n) = 0$, при доказательстве которой Файн допустил (сноска 4) неаккуратность.

Теорема Радемахера-Файна и формулы Файна для констант Лебега были установлены только в случае нумерации Пэли системы Уолша. В случае других нумераций задача получения оценок констант Лебега была не решенной, а система Уолша-Качмажа выделялась как система с существенно отличным ядром Дирихле.

Ф. Шипп предложил [14] понятие линейной перестановки системы Уолша, которое вводится через линейно независимую систему функций Уолша $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ в качестве *образующих.* В докладе С.В. Бочкарева [15] данная система названа диадической с образующими $\{R_n\}$. Примером линейной перестановки служит система Уолша в нумерации Уолша, а система Уолша-Качмажа в терминологии Шиппа является кусочно-линейной перестановкой.

Теорема 1.4. *Для линейных и кусочно-линейных перестановок системы Уолша нормы ядер Дирихле (следовательно и константы Лебега) совпадают.*

Предложение 1.9. *Существует регулярная, то есть внутри пачки, перестановка системы Уолша, константы Лебега которой больше (для многих номеров) констант Лебега системы Уолша-Пэли.*

Если константы Лебега линейных и кусочно-линейных перестановок системы Уолша дают минимум констант Лебега по всем возможным перестановкам системы Уолша, то максимум констант Лебега по всем возможным перестановкам системы Уолша достигается для системы Радемахера.

Предложение 1.10. *Константы Лебега системы Радемахера вычисляются по формулам* $R_{2k+1} = R_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$.

[14] Шипп Ф. О некоторых перестановках рядов по системе Уолша. // Мат. заметки. 1975. Т.18:2. 193-201.

[15] Бочкарев С.В. О некоторых свойствах матриц Уолша // Докл. расш. зас. семинара ин-та прик. мат. им. И.Н.Векуа. Тбилиси. 1988. Т. 3: 2. 15-18.

В последнем параграфе первой главы рассмотрены конкретные случаи системы Уолша-Пэли относительно произвольной меры (обобщающей системы Уолша), которые могут быть полезны при задачах обработки изображений.

Во **второй главе** рассмотрено преобразование Уолша, введенное в 1950 г. Файном (сноска 6). Сначала отмечены основные свойства, которые позволяют переносить отдельные результаты, полученные для преобразований Уолша, на ряды Уолша и на дискретные преобразования Уолша.

В дополнение к известному понятию *обобщенное ядро Дирихле* (или ядро Дирихле для преобразования Уолша) вводятся обобщенные константы Лебега. Понятие срезки и отклонения числа, введенное в предыдущей главе для натуральных чисел, распространено на двоичные дроби. Основные результаты для ядер Дирихле и констант Лебега рядов Уолша перенесены на случай преобразований Уолша с теми же величинами $a(p)$ и $A(p)$.

Теорема 2.1 (явный вид модуля обобщенного ядра Дирихле). *Для всех $x, t \in [0, \infty)$ верно*

$$|D(x;t)| = < t >_m,$$

где $m \in \mathbb{Z}$ находится из условия $x \in \Delta_m^1$.

Вывод о поведении модуля обобщенного ядра Дирихле. *В любой фиксированной точке $x \in [0, \infty)$ значение модуля обобщенного ядра Дирихле $|D(x;t)|$ как функция аргумента t с постоянной скоростью равной 1 совершает периодические изменения (колебания) от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно.*

Теорема 2.2 (оценка нормы обобщенного ядра Дирихле).

1. Если $1 < p < 2$, то $t^{\frac{1}{p'}} \leq ||D(\cdot\,;t)||_{L^p[0,\infty)} < A(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}}$.

2. $\int_0^\infty (D(x;t))^2 dx = t$.

3. Если $p > 2$, то: a) $a(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}} < ||D(\cdot\,;t)||_{L^p[0,\infty)} \leq t^{\frac{1}{p'}}$,
b) величина $||D(\cdot\,;t)||_{L^p[0,\infty)}$ монотонно возрастает с ростом t.

Третий параграф, который уместно было бы разместить как в первой, так и в третьей главе, посвящен интегрированию в двоичном анализе.

В анализе Фурье-Уолша широкое распространение получили двоичное дифференцирование, введенное Джозефом Гиббсом, и разные виды двоичного интегрирования, которым занимались П.Л. Бутцер, Й.Х. Вагнер, Б.И. Голубов и другие. В работе предлагается более простая конструкция, позволяющая вычислять обычные интегралы от элементарных функций.

Предложение 2.3. *Если $t \in [0, 1)$, то верна* **формула интегрирования**

$$\int_0^t f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_i[f] \int_i^{i+1} D(x;t) dx = (\hat{f}, \tilde{D}_t),$$

где $\hat{f}$ – последовательность коэффициентов Фурье-Уолша функции $f \in L[0, 1)$, $\tilde{D}_t = (D(0;t), D(1;t), \ldots, D(j;t), \ldots)$ - последовательность значений обобщенного ядра Дирихле на целочисленных интервалах.

Разработан матричный вариант реализации данной конструкции. После детальной разработки данный метод можно рекомендовать как метод табличного задания функций в ЭВМ, при котором в памяти ЭВМ хранятся коэффициенты Фурье-Уолша.

Сначала в параграфе "Преобразование Уолша в L_2"приводится результат, ранее полученный автором для мультипликативных преобразований Фурье.

Теорема 2.3. *Следующие три способа определения оператора преобразования Уолша, действующего из $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$, эквивалентны.*
А. $\mathfrak{F}[f](y) = \lim\limits_{N\to\infty}(2)\ \int_0^N f(x)W(x,y)dx.$
Б. Почти всюду $\mathfrak{F}[f](y) = \frac{d}{dy}\int_0^\infty f(x)D(x;y)dx.$
В. $\mathfrak{F}[f](y) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{kn}\Psi_{n,k}(y);$
где
$$a_{kn} = \int_k^{k+1} f(\{x\})w_n(\{x\})dx = \int_0^\infty f(x)\Psi_{k,n}(x)dx = (f, \Psi_{k,n})$$
коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\Psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^\infty$; сходимость ряда рассматривается по норме пространства $L_2[0,\infty)$, в силу чего не зависит от порядка слагаемых.

Далее приведена конструкция спектрального разложения, повторяющаяся в следующих главах (указанный базис, как отмечено выше, нашел Ж. Пал).

Теорема 2.4. *Пространство $L_2[0,\infty)$ можно представить в виде прямой суммы двух ортогональных дополнений*
$$L_2[0,\infty) = L_2^+[0,\infty) \oplus L_2^-[0,\infty)$$
инвариантных относительно оператора $\mathfrak{F}$ преобразования Уолша, действующего из пространства $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$:
$\mathfrak{F}[f] = f$ *для любой* $f \in L_2^+[0,\infty)$ *и* $\mathfrak{F}[f] = -f$ *для любой* $f \in L_2^-[0,\infty)$.

Пространство $L_2^+[0,\infty)$ есть образ оператора $(I+\mathfrak{F})$, действующего из $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$, а пространство $L_2^-[0,\infty)$ есть образ оператора $(I-\mathfrak{F}) : L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, где I — тождественный оператор.

Система функций $\{\Psi_{n,n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n}+\Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$ является ортонормированным базисом в $L_2^+[0,\infty)$, а система $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k,n}-\Psi_{n,k})\}_{k,n=0(k<n)}^\infty$ является ортонормированным базисом в $L_2^-[0,\infty)$.

В **третьей главе** рассмотрены дискретные преобразования Уолша (ДПУ) разных нумераций. Традиционно рассматривают ДПУ в трех нумерациях: Пэли, Адамара и Уолша. Но уже для ДПУ второго уровня (т.е. порядка 4) возможны 4 симметричные матрицы ДПУ. В работе предлагается новая (четвертая) нумерация ДПУ произвольного уровня. Основные результаты работы получены или для двух главных нумераций Пэли и Адамара, или для четырех основных нумераций. Кроме этого рассмотрены возможные (заданные как симметричными матрицами, так и несимметричными) нумерации ДПУ.

Повышенный интерес к нумерации Адамара матрицы ДПУ вызван простотой её определения $H_n := H^{(n)} = H \otimes H^{(n-1)} = \begin{pmatrix} H^{(n-1)} & H^{(n-1)} \\ H^{(n-1)} & -H^{(n-1)} \end{pmatrix}$ в виде кронекеровой степени матрицы ДПУ первого уровня (т.е. второго порядка), впервые рассмотренных в статье [16].

В диссертации вводится (определение 3.1) *новое тензорное произведение матриц* как блочной матрицы $C = A \oslash B$ с блоками $c_{ij} = A^j \cdot B_i$, где нижним индексом обозначаем A_i - строки матрицы A, а верхним A^j - столбцы матрицы A. Проведено (предложения 3.1 – 3.11) сравнение свойств нового тензорного произведения со свойствами (утверждения 3.2 – 3.11) кронекерова призведения.

Теорема 3.1. *Матрица W_n дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли есть степень относительно нового тензорного произведения матрицы H:* $\quad W_n = H^{\{n\}} = H \oslash H^{\{n-1\}}$.

Далее понятие линейной перестановки, предложенное Ф. Шиппом для систем функций Уолша, перенесено на матрицы ДПУ. Для четырех выбранных основных нумераций указаны их образующие.

Из всех возможных перестановок матриц ДПУ при цифровой обработке сигналов выделяют только симметричные матрицы потому, что после применения *оператора анализа* с выбранной матрицей ДПУ, исходный сигнал восстанавливается *оператором синтеза*, задаваемого транспонированной к этой матрице ДПУ. В работе существенно расширен набор возможных матриц ДПУ, удобных при цифровой обработке сигналов, введением следующего понятия.

Определение 3.3. W-матрицей уровня n назовем невырожденную матрицу порядка 2^n, все строки и столбцы которой есть дискретные функции Уолша.

Переобозначением (перекодировкой) $1 \to 0$, $-1 \to 1$ дискретные функции Уолша уровня n переходят в булевы векторы специального вида, которые назовем n-dd-векторы, что позволяет от мультипликативной формы записи перейти к аддитивной и ввести

Определение 3.4. A-матрицей уровня n назовем такую невырожденную над полем $\mathbb{Z}_2$ булеву матрицу порядка 2^n, все строки и столбцы которой есть n-dd-векторы.

Теорема 3.2. *Множество матриц линейных перстановок ДПУ уровня n совпадает с множеством W-матриц уровня n.*

О возможности подобной конструкции говорилось в упомянутой выше (сноска 15) заметке С.В. Бочкарева. Однако ни доказательства, ни соответствующих определений там не приводится. В основе доказательства теоремы 3.2 лежит следующая конструкция генерирования W-матриц.

---

[16]Sylvester J.J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous simg-successions, and tessalated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers // Phil. Mag., 1867. V. 34. 461-475.

Зададим матрицы C_n размера $n \times 2^n$ рекуррентными соотношениями

$$C_1 = (0\,1), \quad C_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & C_{n-1} \\ 0_{n-1} & 1_{n-1} \end{pmatrix},$$

где блоки $0_{n-1} = (0\,0\ \ldots 0)$, $1_{n-1} = (1\,1\ \ldots 1)$ есть векторы длины 2^{n-1}.

Предложение 3.13. *Произвольная невырожденная булева матрица K порядка n задает: A-матрицу уровня n билинейной формы $a(i,j)$*

$$A = C_n^T \cdot K \cdot C_n; \tag{1}$$

и соответствующую W-матрицу уровня n с элементами $v_{ij} = (-1)^{a(i,j)}$.

Подматрица K произвольной W-матрицы V_n, строки и столбцы которой выборкой $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}\}$ выделены из соответствующей A-матрицы A, служит для V_n кодирующей матрицей, восстанавливающей A-матрицу формулой (1).

На основе формулы (1) составлена, не включенная в диссертацию, компьютерная программа генерирования всех возможных W-матриц. С помощью этой программы проводится классификация W-матриц. Например, в случае уровня 2 возможны 6 матриц ДПУ. Две из них несимметричные, получаются друг из друга транспонированием. Обозначим любую из этих несимметричных матриц после операции нормировки (деление всех элементов матрицы на 2) символом J. Обе несимметричные нормированные матрицы оказались порядка 6, то есть $J^6 = E$. В частности, $J^T = J^5 = J^{-1}$. Матрица J^3 оказалась нормированной матрицей ДПУ в нумерации Пэли. Матрицы J, J^3, J^5 составляют цепочку корней шестой степени из единичной матрицы четвертого порядка в виде нормированных матриц ДПУ. Другие три симметричные матрицы ДПУ составляют три разные цепочки второй степени (квадратных корней) из единичной матрицы четвертого порядка.

Аналогичная классификация по цепочкам корней из единичной матрицы восьмого порядка (то есть в случае уровня 3) приводит к 28 цепочкам корней шестой степени и 21 цепочки корней восьмой степени. В этих цепочках представлены все 168 матриц ДПУ уровня 3, ровно 28 из которых симметричны.

Очевидно следующее **Утверждение 3.12.** *Собственными числами любого оператора дискретного преобразования Уолша уровня n, заданного симметричной W-матрицей, служат $\lambda_1 = \sqrt{2^n}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{2^n}$.*

Размерности собственных подпространств R_- (соответствует числу λ_2) и R_+ (соответствует числу λ_1) дискретного преобразования Уолша вычислил Буа (сноска 9). В случае нумераций Адамара, Уолша, а также в случае нумерации Пэли нечетного уровня они совпадают и равны 2^{n-1}. Для дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли четного уровня: $dimR_+ = \frac{1}{2}(2^n + \sqrt{2^n})$, $dimR_- = \frac{1}{2}(2^n - \sqrt{2^n})$. Обобщает этот результат следующая

Теорема 3.3. *Если на главной диагонали невырожденной симметричной булевой матрицы K, генерирующей с помощью формулы (1) и перекодировки* *данную W-матрицу, встречается элемент 1, то кратность собственных чисел λ_1 и λ_2 одинаковая и равная 2^{n-1}; если же на главной диагонали матрицы K только нули, то кратность числа λ_1 равна $\frac{1}{2}(2^n + \sqrt{2^n})$, а кратность числа λ_2 равна $\frac{1}{2}(2^n - \sqrt{2^n})$.*

Далее в диссертации получены результаты о выделении из столбцов каждой из матриц $V_n - \lambda_i \cdot E$ $(i = 1, 2)$ базиса из собственных векторов для случая матриц ДПУ различных нумераций.

Продуктивным при новых видах описания быстрых алгоритмов реализации ДПУ оказался другой подход по выделению базиса ДПУ из собственных векторов, который приведем.

Обозначаем: $w_j\{m\}$ дискретную функцию Уолша уровня m (то есть длины 2^m) с номером j в нумерации Пэли; $e_k\{m\} = (\underbrace{0\ldots0}_{k}1\underbrace{0\ldots0}_{2^m-k-1})$ – вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^{2^m}$.

Теорема 3.4. *Для матрицы дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли четного уровня $n = 2m$ набор векторов*

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} - e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{0 \le k < l < 2^m}$$

составляет ортогональный базис собственного подпространства R_- (для собственного числа $\lambda_2 = -2^m$), а набор

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{k=0}^{2^m-1} \cup \big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} + e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\big\}_{0 \le k < l < 2^m}$$

есть ортогональный базис подпространства R_+ (для числа $\lambda_1 = 2^m$).

В статье [17] приведен следующий вариант быстрого алгоритма Гуда (сноска 12).

Утверждение 3.16. *Матрица дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара представима в виде*

$$H_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n,$$

где $T_k = E^{(k-1)} \otimes H_1 \otimes E^{(n-k)}$, E – единичная матрица второго порядка.

Матрицы-сомножители перестановочны $T_i \cdot T_j = T_j \cdot T_i$.

В работе получен аналог этого алгоритма.

Предложение 3.16. *Матрица дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли представима в виде*

$$W_n = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n,$$

где E – единичная матрица второго порядка, $E^{(0)} = (1)$ и возможны 8 основных вариантов расстановки сомножителей:

[17] Малоземов В.Н., Третьяков А.А. Секционирование, ортогональность и перестановки // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 1, 1999. В. 1. 16-21.

1 – $\quad S_k = E^{(k-1)} \otimes (H \oslash E^{(n-k)})$*;*
2 – $\quad S_k = E^{(n-k)} \otimes (E^{(k-1)} \oslash H)$*...*

В работе приведены еще 6 вариантов расстановки сомножителей. Далее в работе получен другой матричный вариант быстрого алгоритма.

Теорема 3.5. *Быстрый алгоритм дискретного преобразования Уолша в нумерациях Адамара и Пэли можно задать в матричном виде одной из формул:*

$$H_n = (H_m \otimes E^{(n-m)}) \cdot (E^{(m)} \otimes H_{n-m}) = (E^{(m)} \otimes H_{n-m}) \cdot (H_m \otimes E^{(n-m)});$$

$$\begin{aligned} W_n &= (W_m \oslash E^{(n-m)}) \cdot (E^{(m)} \otimes W_{n-m}), \\ W_n &= (E^{(n-m)} \otimes W_m) \cdot (E^{(m)} \oslash W_{n-m}), \\ W_n &= (E^{(m)} \oslash W_{n-m}) \cdot (W_m \otimes E^{(n-m)}), \\ W_n &= (W_{n-m} \otimes E^{(m)}) \cdot (W_m \oslash E^{(n-m)}). \end{aligned}$$

Этот алгоритм при $n = 2^s$*,* $m = 2^{s-1}$ *рассматривается как каскадный быстрый алгоритм, в котором каждое* H_m *(или* W_m *соответственно) вычисляется по этой же формуле и так далее.*

Входной сигнал x и выходной сигнал y длины 2^n, где $n = 2m$, более наглядно представлять в виде квадратной матрицы X или Y (для x или y соответственно) порядка 2^m, располагая сигнал по столбцам.

Предложение 3.17. *В приведенных обозначениях вычисление выходного сигнала в случае нумерации Адамара* $y = H_n \cdot x$ *по формуле теоремы 3.5 представляется в виде*

$$Y = H_{n-m} \cdot X \cdot H_m.$$

В случае нумерации Пэли аналогичная формула для вычисление выходного сигнала $y = W_n \cdot x$ *по первой формуле теоремы 3.5 имеет вид*

$$Y = W_m \cdot X^T \cdot W_{n-m},$$

то есть исходный сигнал помещается в матрицу по строчкам, а выдается по столбцам (или наоборот, что получаем транспонированием формулы).

Напомним, что в фигурных скобках указывается уровень сигнала: $x\{n\}$ есть сигнал длины 2^n. В двух следующих предложениях речь идет о подсигналах уровня 1, выделяемых из сигналов $x\{n\}$ и $y\{n\}$. Второй индекс в фигурных скобках $x_j\{1; i\}$ указывает уровень прореживания при выборе подсигнала уровня 1, то есть координаты выбираются с шагом 2^i. Последовательная нумерация всех таких подсигналов осуществляется индексом j.

Предложение 3.18. *Алгоритм записи быстрого алгоритма реализации дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара вида* $y\{n\} = H_n \cdot x\{n\}$ *следующий.*

Для i от 0 до $n-1$ выполняем

(для j от 0 до $2^{n-1}-1$ выполняем $x_j\{1;i\} := H \cdot x_j\{1;i\}$). $y := x$.

В приведенной формуле алгоритма запись $b\{1\} := H \cdot a\{1\}$ расшифровывается как дискретное преобразование Хаара: $b_0 = a_0 + a_1$, $b_1 = a_0 - a_1$.

Предложение 3.19. *Алгоритм записи быстрого алгоритма реализации дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли вида $y\{n\} = W_n \cdot x\{n\}$, примененного к входному сигналу $x\{n\}$, один из следующих.*

Вариант 1. Для i от 0 до $n-1$ выполняем

(для j от 0 до $2^{n-1}-1$ делать $y_j\{1;0\} := H \cdot x_j\{1;i\}$. $\quad x := y$).

В работе приведено еще 3 варианта. В предложениях 3.20 и 3.21 получены аналогичные алгоритмические формы записи быстрого алгоритма реализации дискретного преобразования Уолша в нумерациях Уолша и новой.

Предложение 3.22. *Нормированное дискретное преобразование Уолша $\tilde{W}_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} W_n$ есть оператор кручения второго порядка $(\tilde{W}_n)^2 = E$, действующий на произвольный $x = x_+ + x_-$, где $x_+ \in R_+$ и $x_- \in R_-$, по правилу $\tilde{W}_n(x_+ + x_-) = x_+ - x_-$.*

В следующем параграфе рассмотрены фреймы Парсеваля для собственных подпространств дискретного преобразования Уолша. Понятие фрейма одно из основных в теории всплесков [18]. Метод проектирования ортонормированного базиса легко позволяет получать матрицы фреймов Парсеваля. Если в качестве оператора анализа взять оператор с матрицей фрейма Парсеваля, а в качестве оператора синтеза оператор заданный транспонированной матрицей, то происходит точное восстанавление входного сигнала. Причем из всех фреймов только фреймы Парсеваля (и их вырожденный случай в виде ортонормированной системы) обладают этим свойством точного восстановления. Интерес представляют те фреймы Парсеваля, которые связаны с какими-либо инвариантными подпространствами. В качестве таковых в диссертации рассмотрены собственные подпространства дискретного преобразования Уолша.

Ортонормированный базис собственных векторов ДПУ-Пэли уровня 4 состоит из строк следующих матриц A_- и A_+, умноженных на $\frac{1}{2\sqrt{2}}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

[18] Новиков И.Я., Протасов В. Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. - М.: ФМЛИТ, 2005; Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М. - Ижевск: НИЦ РХД, 2004.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этих матриц составляют взаимно дополняющие фреймы Парсеваля собственных подпространств ДПУ-Пэли. На примере этих дополняющих фреймов Парсеваля в работе показано как можно *организовать контроль и исправление ошибок при передаче информации по каналу связи с возможными отдельными ошибками.*

В последнем параграфе главы рассмотрены несимметричные W-матрицы.

Теорема 3.6. *Любая несимметричная нормированная W-матрица вида $J = \frac{1}{\lambda} V_n$ (где $\lambda = \sqrt{2^n}$), удовлетворяющая условию $J^{2m} = E$, порождает операторы ортопроектирования $Q_k = \frac{1}{2m} \sum_{l=0}^{2m-1} q^{kl} J^l$ на собственные подпространства R_k (где $k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1$, $q = e^{\frac{2\pi i}{2m}}$) пространства $\mathbb{C}^{2^n}$: $Q_k J = (\overline{q})^k Q_k$. Причем $\overline{Q}_k = Q_{2m-k}$.*

При этом имеет место разложение степеней оператора

$$J^k = Q_0 + \overline{q}^k Q_1 + (\overline{q})^{2k} Q_2 + \ldots + (\overline{q})^{(2m-1)k} Q_{2m-1}.$$

Четвертая глава посвящена дискретному преобразованию Фурье (ДПФ).

Показывается, что унитарный оператор дискретного преобразования Фурье с матрицей $F = \frac{1}{\sqrt{n}} F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (q^{kl})$ (где $q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$) является периодическим, а точнее есть оператор кручения четвертого порядка.

Лемма 4.2. *Пусть $F : X \to X$ есть унитарный оператор кручения четвертого порядка. Тогда операторы $Q_k = \frac{1}{4}\big(I + i^k F + (i^k F)^2 + (i^k F)^3\big)$, $k = 0, 1, 2, 3$, являются ортопроекторами на собственные подпространства R_k, такие, что $X = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$, $R_l \perp R_j$ при $l \neq j$.*

Имеет место спектральное разложение оператора

$$F = F \cdot (Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3) = Q_0 - iQ_1 - Q_2 + iQ_3 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k Q_k.$$

Размерности собственных подпространств R_k, совпадающих с кратностью собственных чисел, установили Макклиллан и Парк (сноска 8): $n_0 = \big[n/4\big] + 1$ (применен знак целой части числа) , $n_1 = \big[\frac{n-1}{4}\big]$, $n_2 = \big[\frac{n+2}{4}\big]$, $n_3 = \big[\frac{n+1}{4}\big]$. Если обозначим $\sigma(F_n)$ набор с учетом кратности всех собственных чисел унитарного оператора ДПФ и заметим, что $\sigma(F_2) = \{1, -1\}$, то этот результат формулируется более красиво как

Утверждение 4.1. *Спектр унитарной матрицы дискретного преобразования Фурье вычисляется присоединением очередного собственного числа по рекуррентной формуле* $\sigma(F_{4m+k}) = \sigma(F_{4m+k-1}) \cup \lambda_k$, $k = 0, 1, 2, 3.$

Приведено доказательство этого утверждения со ссылкой на классические суммы Гаусса, изучаемые в теории чисел.

Далее дано описание метода построения ортогональных матриц U специального вида, где применяется новая нумерация матриц ДПУ. Ортогональное преобразование с этими матрицами позволяет отделить базис действительного инвариантного подпространства $R_+ = R_0 \oplus R_2$ от базиса мнимого инвариантного подпространства $R_- = R_1 \oplus R_3$.

Во втором параграфе рассматривается быстрый алгоритм реализации ДПФ, предложенный Кули и Тьюки (сноска 13). Показано, что лемму о факторизации ДПФ составного порядка удобнее записать с использованием, введенного в данной работе, символа нового тензорного произведения матриц. Матричная форма быстрого алгоритма Кули и Тьюки в работе переписана в более коротком, чем в статьях [19], виде с использованием символа нового тензорного произведения.

В последнем параграфе главы решается задача вычисления точных тригонометрических сумм специального вида с помощью ДПФ.

Если последовательно брать входные сигналы $x(1) = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, $x(2) = \{0, 1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2\}$, ... , $x(n) = \{0, 1^n, 2^n, \ldots, (N-1)^n\}$, и применять к ним ДПФ F_N, то по формуле Парсеваля получим формулы

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2-1}{3}\,, \qquad \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2-1)(N^2+11)}{45}\,,$$

и так далее. Однако вычислительные трудности здесь столь велики, что этот прямой путь не рационален. Поэтому набор входных сигналов заменен на другой набор.

Получено (предложение 4.2.) для фиксированного N решение бесконечной, так как $n \in \mathbb{N}$, системы простейших уравнений в конечных разностях по дискретной переменной k вида (здесь $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$)

$$\Delta x_k(n) = x_k(n-1), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

[19] Johnson J., Johnson R.W., Rodriguez D., Tolimieri R. A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. V. 9, № 4. 449-500;

Малоземов В.Н., Просеков О.В. Факторизация Кули-Тьюки матрицы Фурье // Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. СПб.: СПбГУ. 2009. 20-29.

удовлетворяющей начальному условию $x_k(0) \equiv 1$ и условиям нормировки

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k(n) = 0 \qquad \text{при} \quad n \geq 1.$$

Теорема 4.2. *Следующие суммы четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах окружности выражаются через решения системы (2) простейших разностных уравнений с начальным условием $x_k(0) \equiv 1$ и условиями нормировки по формуле*

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\pi k}{N}} = \frac{4^n}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k(n))^2. \tag{3}$$

Выражение $S_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{-2n} \frac{\pi k}{N}$ при фиксированном n является четным многочленом степени $2n$, делящимся на (N^2-1).

Суммы в (3) допускают вычисление на компьютере и представляют собой многочлены четной степени, некоторые из которых приведем:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^6 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2-1)(2N^4+23N^2+191)}{945},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^8 \frac{\pi k}{N}} = \frac{1}{14175}(N^2-1)(3N^6+43N^4+337N^2+2497),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{10} \frac{\pi k}{N}} = \frac{1}{93555}(N^2-1)(2N^8+35N^6+321N^4+2125N^2+14797).$$

Основное достоинство этих формул в том, что они точные. Написана, не включенная в диссертацию, компьютерная программа вычисления точного значения этих сумм в виде рационального числа для произвольных n и N. Ограничения для n и N обусловлено только длиной записи результата.

Последняя **(пятая) глава** посвящена системе Крестенсона-Леви. Она состоит из трех параграфов, в которых решаются проблемы, рассмотренные в первых трех главах диссертации в случае системы Уолша.

Соответственно первый параграф главы назван "Ряд Фурье по системе Крестенсона-Леви".

Предложение 5.1. *Если p простое, то точной мажорантой ядра Дирихле по системе Крестенсона-Леви служит функция*

$$h(x) = \frac{p^{m-1} \cos \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{k\pi}{p}} \quad , \quad \text{если} \;\; x \in \Delta_m^k, \; 1 \leq k < p.$$

В частности, если $p = 3$, то $h(x) = 3^m$, если $x \in [3^{-(m+1)}, 3^{-m})$.

Аналогично конструкции, построенной в случае системы Уолша, строится более сложная конструкция и формулируется *вывод о поведении модуля ядра Дирихле по системе Крестенсона-Леви*. Основу этой более сложной конструкции составляет новое понятие маршрута, которое введем.

Сначала полагаем, что p простое. Символом $M_p(k;1)$ обозначим маршрут в виде правильного p-угольника со стороной $a = 1$ и углом при вершине $\varphi = \frac{(p-2k)\pi}{p}$. Геометрически его представляем в виде помеченного ориентированного графа с p узлами в вершинах p-угольника, расположенного на (комплексной) плоскости. Помечаются узлы графа числами от 0 до p, которые назовем метками маршрута. Начало маршрута с меткой 0 располагается в начале координат, а начальная дуга графа проводится по горизонтальной (действительной) оси от начала координат к точке 1. Так как маршрут циклический, то конец маршрута с меткой p тоже в точке начала координат. Считаем, что при фиксированном p различных маршрутов первого уровня ровно $\frac{p-1}{2}$, так как будем отождествлять маршруты $M_p(k;1)$ и $M_p(p-k;1)$, различающиеся лишь знаком угла φ и формально получающиеся друг из друга симметричным отражением относительно начального ребра графа. Маршрут следующего уровня $M_p(k;m)$ получаем из маршрута $M_p(k;m-1)$ гомотетией (растяжением в p раз) относительно начала координат. При этом метка с номером n перейдет в метку с номером pn. Каждый отрезок между точками с метками pn и $p(n+1)$ разбиваем на p равных частей длины 1 и помечаем точки деления метками в порядке их следования по новому маршруту.

Теперь положим, что p составное. Если p и k взаимно-просты ($(p,k) = 1$), то маршрут $M_p(k;1)$ определяется также. Если же $(p,k) = r$ (то есть $p = r \cdot p_1$, $k = r \cdot k_1$, $(p_1, k_1) = 1$), то маршрут $M_p(k;1)$ есть циклический маршрут $M_{p_1}(k_1;1)$ пройденный r раз с последовательной нумерацией меток. В частности отметим, что маршрут $M_2(1;1)$ есть цикл $0 - 1 - 0$ на комплексной плоскости.

Введем дискретную (периодическую с периодом p^m) функцию $\varphi_{k,m}(n)$ равную расстоянию от начала координат до метки n маршрута $M_p(k;m)$.

Теорема 5.1. *Для модуля ядра Дирихле по системе Крестенсона-Леви*

$$|D_n(x)| = \varphi_{k,m}(n),$$

если $x \in \Delta_m^k$ *или* $x \in \Delta_m^{p-k}$, *где* $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $k \leq \frac{p}{2}$.

Лемма 5.11. *Если в качестве основания системы Крестенсона-Леви выбрано 3, то для норм ядра Дирихле имеет место рекуррентное соотношение* ($k < 3^m$):

$$\|D_{3^m+k}\|_p^p = \frac{(3^m+k)^p}{3^{m+1}} + \frac{(\sqrt{3^{2m} - 3^m k + k^2})^p \cdot 2}{3^{m+1}} - \frac{k^p}{3^m} + \|D_k\|_p^p;$$

$$\|D_{2\cdot 3^m+k}\|_p^p = \frac{(2 \cdot 3^m + k)^p}{3^{m+1}} + \frac{(3^m - k)^p \cdot 2}{3^{m+1}} - \frac{k^p}{3^m} + \|D_k\|_p^p.$$

В частности, для констант Лебега

$$L_{3^m+k} = \frac{1}{3}(1-2x+2\sqrt{1-x+x^2}) + L_k, \quad L_{2\cdot 3^m+k} = \frac{4}{3}(1-x) + L_k,$$

где $x = \frac{k}{3^m} < 1$.

Теорема 5.2. *Существуют* $0 < a(p) < 1 < A(p)$ *такие, что верны оценки норм ядер Дирихле по системе Крестенсона-Леви с основанием 3.*

1. Если $1 < p < 2$ *, то* $n^{\frac{1}{p'}} \leq ||D_n||_p \leq A(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}}$,
причем левое неравенство обращается в равенство только при $n = 3^m$.

2. $||D_n||_2 = \sqrt{n}$.

3. Если $p > 2$*, то* $a(p) \cdot n^{\frac{1}{p'}} \leq ||D_n||_p \leq n^{\frac{1}{p'}}$,
причем правое неравенство обращается в равенство только при $n = 3^m$.

Величины $a(p)$ и $A(p)$ в теореме 5.2 не связаны с аналогично обозначенным решением экстремальной задачи из первой главы и могут быть оценены методом компьютерного моделирования с использованием разработанной программы. Аналогичный результат верен и для других оснований системы, но вычисление величин $a(p)$ и $A(p)$ представляется очень сложной проблемой.

Теорема 5.3. *Для всех линейных и кусочно-линейных перестановок системы Крестенсона-Леви нормы ядер Дирихле (следовательно и константы Лебега) совпадают.*

Во втором параграфе рассмотрено преобразование Крестенсона-Леви, которое для $f \in L[0,\infty)$ определяется

$$\mathfrak{F}[f](y) = \int_0^\infty f(x) \cdot \overline{K(x,y)}\, dx,$$

где ядро преобразования выражается через функции Крестенсона-Леви

$$K(x,y) = \chi_{[x]}(\{y\})\chi_{[y]}(\{x\}).$$

Ядром Дирихле для преобразования Крестенсона-Леви (обобщенным ядром Дирихле) назовем интеграл от ядра преобразования Крестенсона-Леви с переменным верхним пределом

$$D(x;t) = \int_0^t K(x,y)dy,$$

Теорема 5.5. *Для модуля ядра Дирихле преобразования Крестенсона-Леви*

$$|D(x;t)| = \varphi_{k,m}(t),$$

если $x \in \Delta_m^k$ *или* $x \in \Delta_m^{p-k}$*, где* $m \in \mathbb{Z}$*,* $k \in \{1,2,\ldots\}$*,* $k \leq \frac{p}{2}$*, где непрерывная функция* $\varphi_{k,m}(t)$ *соответствует дискретной функции* $\varphi_{k,m}(n)$ *из предыдущего параграфа.*

Теорема 5.6. *Для преобразования Крестенсона-Леви некоторого фиксированного основания системы (например, 3) с теми же величинами $a(p)$ и $A(p)$, что и в теореме 5.2 (или в замечании к теореме 5.2) повторяется оценка и для обобщенного ядра Дирихле*

1. Если $1 < p < 2$, то $t^{\frac{1}{p'}} \leq ||D(\cdot\,;t)||_{L^p[0,\infty)} \leq A(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}}$.

2. $\int_0^\infty (D(x;t))^2 dx = t$.

3. Если $p > 2$, то: $a(p) \cdot t^{\frac{1}{p'}} \leq ||D(\cdot\,;t)||_{L^p[0,\infty)} \leq t^{\frac{1}{p'}}$.

Последний параграф посвящен дискретному преобразованию Крестенсона двух основных нумераций. В технической литературе часто по аналогии с дискретным преобразованием Уолша их называют нумерациями Пэли и Адамара. В диссертации используется другая терминология, согласно которой нумерации называются Леви и Кронекера соответственно. Название дискретное преобразование Крестенсона-Кронекера (ДПКК) полагаю более правильным, так как его матрица есть кронекерова степень матрицы ДПФ. А название дискретное преобразование Крестенсона-Леви (ДПКЛ) указывет на соответствие этой нумерации дискретного преобразования тому упорядочению, которое принято для системы функций и для непрерывного (интегрального) преобразования.

Определение 5.2. Кронекерово произведение строк матрицы ДПФ фиксированного порядка в количестве n сомножителей назовем дискретной функцией Крестенсона уровня n.

Дискретные функции Крестенсона можно упорядочить в соответствии с выбранной нумерацией Леви или Крестенсона.

Будем использовать обозначения: $T_n = T_n\{p\}$ для матрицы дискретного преобразования Крестенсона-Кронекера (ДПКК), $K_n = K_n\{p\}$ для матрицы дискретного преобразования Крестенсона-Леви (ДПКЛ). Указываем p при необходимости сделать ссылку на основание системы. Матрицы T_n и K_n порядка p^n, где n назовем уровнем матрицы. Строки каждой матрицы T_n и K_n составляют полный набор всех различных дискретных функций Крестенсона уровня n. Строки матрицы T_n, упорядоченные по Кронекеру, обозначим t_j (или $t_j\{n\}$ при необходимости уточнить уровень), а строки матрицы K_n, упорядоченные по Леви, обозначим k_j (или $k_j\{n\}$).

Предложение 5.3. *Кронекерово произведение дискретных функций Крестенсона вычисляется по правилам*

$$k_i\{m\} \otimes k_j\{l\} = k_{jp^m+i}\{m+l\}, \qquad t_i\{m\} \otimes t_j\{l\} = t_{ip^l+j}\{m+l\},$$

где $0 \leq i < p^m$, $0 \leq j < p^l$.

Теорема 5.8. *Матрица K_n определяется как степень относительно нового тензорного произведения матрицы ДПФ*

$$K_n\{p\} = F_p^{\{n\}}.$$

Утверждение 5.6. [20] *Любая матрица уровня n дискретного преобразования Крестенсона-Кронекера представима в виде*

$$T_n\{p\} = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n,$$

где $S_k = E^{(k-1)} \otimes F_p \otimes E^{(n-k)}$, E – единичная матрица порядка p, $E^{(0)} = (1)$.

Матрицы-сомножители перестановочны $S_i \cdot S_j = S_j \cdot S_i$.

Предложение 5.6. *Произвольная матрица дискретного преобразования Крестенсона-Леви представима в виде*

$$K_n\{p\} = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n,$$

где $S_k = E^{(k-1)} \otimes (F_p \oslash E^{(n-k)})$, E – единичная матрица порядка p, $E^{(0)} = (1)$.

Теорема 5.9. *Если $n = 2m$, то ДПКЛ вида $y = K_n \cdot x$ можно вычислить по формуле*

$$y = (K_m \oslash E^{(m)}) \cdot (E^{(m)} \otimes K_m) \cdot x,$$

где E – единичная матрица порядка p.

Построчная запись выходного сигнала y дается формулой $Y^T = K_m \cdot X \cdot K_m$, а запись сигнала y по столбцам – формулой $Y = K_m \cdot X^T \cdot K_m = K_m \cdot (K_m \cdot X)^T$.

Для ДПКК вида $y = T_n \cdot x$ аналогичные формулы (где X, Y есть записанные по столбцам сигналы x, y) имеют форму

$$y = (T_m \otimes E^{(m)}) \cdot (E^{(m)} \otimes T_m) \cdot x,$$

$$Y = T_m \cdot X \cdot T_m, \quad Y^T = T_m \cdot X^T \cdot T_m = T_m \cdot (T_m \cdot X)^T.$$

Теорема 5.10. *Для оператора ДПКЛ, где p нечетное, четного уровня $n = 2m$ следующий набор векторов составляет ортогональный базис из собственных векторов: вектор $e_0\{m\} \otimes k_0\{m\}$ и набор*

$$e_j\{m\} \otimes k_l\{m\} + i^s e_{\tilde{l}}\{m\} \otimes k_j\{m\} + (-1)^s e_{\tilde{j}}\{m\} \otimes k_{\tilde{l}}\{m\} + (-i)^s e_l\{m\} \otimes k_{\tilde{j}}\{m\},$$

где индексы пробегают множества $j \in \omega_1 \cup \{0\}$, $l \in \omega_1$, $s \in \{0,1,2,3\}$, ω_1 есть множество номеров, значение старшего разряда которых от 1 до $\frac{p-1}{2}$.

Причем для каждого $s = 0,1,2,3$ соответствующий вектор отвечает собственному числу $\lambda_s = (-i)^s$ нормированного оператора ДПКЛ: $\tilde{K}_n = \frac{1}{\sqrt{p^n}} K_n$.

Теорема 5.11. *Нормированные операторы ДПКЛ $\tilde{K}_n$ и ДПКК $\tilde{T}_n$ являются периодическими операторами четвертого порядка $(\tilde{K}_n)^4 = (\tilde{T}_n)^4 = E^{(n)}$, где E – единичная матрица порядка p.*

[20] Малоземов В.Н., Машарский С.М. Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретными преобразованиями Виленкина-Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. 111-157.

Для любого периодического оператора A четвертого порядка ортопроекторы на собственные подпространства R_m (если $x \in R_m$, то $A \cdot x = (-i)^m \cdot x$) вычисляются через степени матрицы по следующей формуле ДПФ

$$Q_m = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{3} i^{ml} A^l, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Обратное ДПФ включает при $l = 1$ спектральное разложение оператора, а при $l = 0$ неполное разложение единицы: $A^l = \sum_{m=0}^{3} (-i)^{ml} Q_m$.

В теоремах 5.12 и 5.13 вычислены размерности собственных подпространств дисретного преобразования Крестенсона двух основных нумераций.

Определение 5.3. Назовем K-матрицей уровня n (строится для фиксированного основания системы p) невырожденную матрицу, все строки и столбцы которой есть дискретные функции Крестенсона уровня n (основания p).

Определение 5.4. Назовем B-матрицей уровня n невырожденную над полем $\mathbb{Z}_p$ матрицу, при замене каждого элемента $j \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\} = Z_p$ которой на q^j, где $q = \exp(2\pi i/p)$, получается K-матрица уровня n.

Каждую строку (или столбец) B-матрицы уровня n назовем *n-add-вектором.* Будем применять обозначение $b_s\{n\}$ для n-*add*-вектора, полученного заменой всех координат q^j дискретной функции Крестенсона-Леви $k_s\{n\}$ на показатель степени j.

Предложение 5.10. *Если вектор $\mathbf{a} = (a_0\ a_1 \ldots a_{p^n-1})$ есть дискретная функция Крестенсона уровня n, то по следующим его n координатам с индексами p^0, p^1, ... , p^{n-1} восстанавливается: номер s вектора $\mathbf{a}$ среди набора дискретных функций Крестенсона-Леви уровня n*

$$\mathbf{a} = k_s\{n\}, \quad \textit{где } s = b_{p^0} p^{n-1} + b_{p^1} p^{n-2} + \ldots + b_{p^{n-1}} p^0,$$

и номер j среди набора дискретных функций Крестенсона-Кронекера уровня n

$$\mathbf{a} = t_j\{n\}, \quad \textit{где } j = b_{p^0} p^0 + b_{p^1} p^1 + \ldots + b_{p^{n-1}} p^{n-1};$$

переходом (то есть $a_i = q^{b_i}$) от дискретной функции Крестенсона $\mathbf{a}$ к соответствующему n-add-вектору $\mathbf{b} = (b_0\ b_1 \ldots b_{p^n-1})$ и выбором из него координат $b_{p^0}, b_{p^1}, \ldots, b_{p^{n-1}}$ с указанными индексами (то есть $\mathbf{b} = b_s\{n\}$).

Введем матрицы C_n порядка $n \times p^n$ следующей рекуррентной формулой

$$C_1 = (0\ 1 \ldots p-1), \quad C_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & C_{n-1} & \cdots & C_{n-1} \\ 0\{n-1\} & 1\{n-1\} & \cdots & p-1\{n-1\} \end{pmatrix},$$

где $l\{n-1\} = (l\ l \ldots l)$ строки длины p^{n-1} с фиксированной координатой.

Теорема 5.14. *Любая невырожденная над полем $\mathbb{Z}_p$ матрица G порядка n посредством формулы*

$$B = C_n^T \cdot G \cdot C_n$$

задает B-матрицу, которая при мультипликативной форме записи (то есть при замене $j \in Z_p$ на q^j) переходит в K-матрицу.

И наоборот, для любой K-матрицы уровня n найдется невырожденная над полем $\mathbb{Z}_p$ матрица G порядка n такая, что $C_n^T \cdot G \cdot C_n$ есть соответствующая B-матрица.

Теорема 5.15. *Любая нормированная K-матрица J уровня n задает периодический оператор ($J^m = E$) с четным показателем периода m. Этот оператор имеет p^n (с учетом кратности) собственных чисел из множества $\{q^k\ ,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}$, где $q = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Матрицы $Q_k = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} q^{-kl} J^l$ служат проекторами на собственные подпространства E_k ($Jx = q^k x$ для $x \in E_k$) пространства $\mathbb{C}^{p^n}$, через которые задается спектральное разложение степеней оператора $J^k = \sum_{l=0}^{m-1} q^{kl} Q_l$.*

В конце диссертации приведено **заключение**, в котором кратко проанализирована возможность перенесения результатов работы на три объекта гармонического анализа в смешанных кодах, которые принято называть система Виленкина, мультипликативное преобразование Фурье и дискретное мультипликативное преобразование Фурье соответственно.

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Теорема 2.2 *об оценке нормы обобщенного ядра Дирихле* и ее следствие в виде теоремы 1.2 для ядра Дирихле. Вывод о поведении модуля обобщенного ядра Дирихле и ядра Дирихле.

2. Теорема 1.4 *о совпадении норм ядер Дирихле для линейных и кусочно-линейных перестановок системы Уолша* и её **Следствие.** *Константы Лебега с одинаковым номером систем Уолша-Пэли, Уолша-Уолша и Уолша-Качмажа совпадают.*

Утверждение о том, что результаты Файна о константах Лебега системы Уолша-Пэли и мои результаты в виде теоремы 1.2 и *леммы симметрии* (1.18) $L_{2^n+k} = L_{2^{n+1}-k}$ ($k < 2^n$) верны для класса обобщающих систем Уолша.

3. Определение 3.3 *W-матриц*, метод их генерирования и обратная процедура восстановления кодирующей матрицы (теорема 3.2, предложения 1.2 и 3.13).

Перенос данной конструкции из двоичного дискретного гармонического анализа в p-ичный дискретный гармонический анализ (определения 5.3, 5.4, 5.5, предложение 5.10 и теорема 5.14).

4. Новый вариант тензорного произведения матриц (определение 3.1) и теоремы 3.1 и 5.8 *о представлении матрицы дискретного преобразования Уолша и Крестенона основной нумерации (-Пэли в случае Уолша и -Леви в случае Крестенсона) в виде степени относительно нового тензорного произведения матрицы дискретного преобразования Фурье.*

5. Новые формы записи быстрых алгоритмов дискретных перобразований Уолша в нумерации Пэли и Адамара (предложения 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 и теорема 3.5). Перенос данных результатов в p-ичный дискретный гармонический

анализ (предложения 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 и теорема 5.9).

6. Теорема 3.4 *о базисе собственных подпространств дискретного преобразования Уолша-Пэли* и ее аналог (теорема 5.10) для дискретного преобразования Крестенсона-Леви.

Теорема 3.6 *о спектральном разложении несимметричной матрицы дискретного преобразования Уолша*, ее аналог (теорема 5.15) для дискретного преобразования Крестенсона и теорема 5.11 *о спектральном разложении матрицы дискретного преобразования Крестенсона-Леви или Крестенсона-Кронекера.*

7. Алгоритм (теорема 4.2) вычисления точного значения сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах и отдельные точные тригонометрические формулы параграфа 4.3.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] Беспалов М.С. О коэффициентах Фурье и приближении функций рядами по периодической мультипликативной системе // Матем. заметки. 1984. Т. 36, № 3. 329-340.

[2] Беспалов М.С. Представление для сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах // Известия ВУЗов. Сер. Матем. 1996. Т. 8(441). 6-12.

[3] Беспалов М.С. Перестановки систем Уолша, сохраняющие константы Лебега // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. 36-48.

[4] Беспалов М.С. Явный вид ядра Дирихле для рядов и преобразований Уолша // Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 7. 3-26.

[5] Беспалов М.С. Операторы мультипликативного преобразования Фурье // Известия ВУЗов. Сер. Матем. 2006. Т. 526, № 3. 9-23.

[6] Беспалов М.С. Новая нумерация матриц Уолша // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, № 4. 43-53.

[7] Беспалов М.С. Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Проблемы передачи информации. 2010. Т. 46, № 3. 60-79.

[8] Беспалов М.С. Дискретное преобразование Крестенсона // Проблемы передачи информации. 2010. Т.46, № 4. 91-115.

[9] Bespalov M.S. On Fine's results for Lebesque constants on the Walsh system // Journal of Mathematical sciences. 2004. V. 126, № 5. 1407-1418.
(перевод статьи Беспалов М.С. О результатах Файна для констант Лебега системы Уолша // Современная математика и ее приложения. Труды Межд. конф. по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль 2002, Т. 8, Ч. 2, Тбилиси: Академия наук Грузии, 2003. 49-59.)

[10] Bespalov M.S. Computational algorithms based on the Shur representation // Journal of Mathematical sciences. 2007. V. 147, № 1. 6416-6424.

(перевод статьи Беспалов М.С. Алгоритмы вычислений, основанные на представлении Шура // Современная математика и ее приложения. Труды Межд. конф. по динамич. системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль 2004, Т. 38, Ч. 3, Тбилиси: Ин-т кибернетики Академии наук Грузии, 2006. 28-36.)

[11] Bespalov M.S. Generalizing the Walsh-Paley system and binary integration // Journal of Mathematical sciences. 2009. V. 157, №3. 442-449.
(перевод статьи Беспалов М.С. Обобщающая система Уолша-Пэли и двоичное интегрирование // Современная математика и ее приложения. Труды Межд. конф. по дифференциальным уравнениям и динамич. системам, Суздаль 2006, Т. 53, Ч. 2, Тбилиси: Ин-т кибернетики Академии наук Грузии, 2008. 57-64.)

Другие публикации:

[12] Bespalov M.S. Construction and properties of discrete Walsh transform matrices // Walsh and Dyadic Analysis/ Proceedings of the Workshop Dedicated to the Memory of J.Edmund Gibbs, October 18-19, 2007, Nis, Serbia, edited by Radomir S. Stancovic. Nis, Elektronski fakultet, 2008. 195-208.

[13] Беспалов М.С. Спектральное разложение оператора дискретного преобразования Фурье // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию "DHA & CAGD". Избр. докл. 2 октября 2010 г. 10 с. http://www.dha.spb.ru/

[14] Беспалов М.С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 2. Введение в прикладной гармонический анализ. – Владимир: ВлГУ, 2007. - 244 с.

[15] Беспалов М.С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 1. Элементы функционального анализа и алгебры. – Владимир: ВлГУ, 2006. - 92 с.

[16] Bespalov M.S. Tight frame of co-rank one // Сб. Wavelets and Splines, St.Petersburg Univ.Press, St.Petersburg, 2003. 12-14.

[17] Беспалов М.С. Оценка пачек ряда Фурье по мультипликативной системе // Первая Всероссийская школа по основаниям математики и теории функций. Саратов: СГПИ. 1989. 102.

[18] Беспалов М.С. Мультипликативные преобразования Фурье в L^p // Рук. деп. в ВИНИТИ, № 100-82. 21 с.

[19] Беспалов М.С. Об операторах мультипликативных преобразований Фурье // Рук. деп. в ВИНИТИ, № 5826-83. 27 с.

[20] Беспалов М.С. Мультипликативные преобразования Фурье // Теория функций и приближений. - Тр. Саратовск. зимней шк., ч. 2. Саратов: СГУ. 1983. 39-42.

[21] Беспалов М.С. О некоторых применениях мультипликативных систем функций // Теория функций и приближений. - Тр. 2-й Саратовск. зимней шк. 24янв.-5февр. 1984г., ч. 2. Саратов: СГУ. 1986. 42-45.

[22] Беспалов М.С. О свойствах оператора мультипликативного преобразо-

вания Фурье // Теория функций и приближений. - Тр. 3-й Саратовск. зимней шк. 27янв.-7февр. 1986г., ч.2. Саратов: СГУ. 1988. 3-6.

[23] Беспалов М.С. Ядра Дирихле и константы Лебега для системы Крестенсона-Леви // Современные проблемы теории функций и их приближения. - Тезисы докл. 8-й Саратовск. зимней шк. 30янв.-6февр. 1996г. Саратов: СГУ. 1996. 17-18.

[23] Беспалов М.С. Константы Лебега для перестановок системы Уолша // Алгебра и анализ. Матер. конф. посв. 100-летию Б.М. Гагаева. Казань. 1997. 33-34.

[24] Беспалов М.С. Мажоранта ядра Дирихле для системы Прайса // Современные методы теории функций и смежные проблемы. - Тезисы докл. Воронежской зимн. шк. Воронеж: ВГУ. 1997. 18.

[25] Беспалов М.С. О сходимости рядов по системе Крестенсона // Современные проблемы теории функций и их приложения. - Тезисы докл. 9-й Саратовск. зимней шк. 26 янв.-1 февр. 1998г. Саратов: СГУ. 1997. 24.

[26] Беспалов М.С. Константы Лебега двойных рядов Уолша // Теория функций и ее приложения. Смежные вопросы. Матер. шк.-конф. посв. 130-летию Д.Ф. Егорова. Казань: КМО. 1999. 41-42.

[26] Беспалов М.С., Беспалова А.Г. Двойственность пространств последовательностей над конечным полем // Современные проблемы теории функций и их приложения. - Тезисы докл. 10-й Саратовск. зимней шк. Саратов: СГУ. 2000. 18-19.

[27] Беспалов М.С. Преобразование Фурье с ядром в виде скрещенного произведения // X Междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование". II междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тез. докл. Ростов н/Д., 2002. 14.

[28] Беспалов М.С. Ядро Дирихле для системы Крестенсона-Леви как динамическая система // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 1-6 июля 2002. Тез. докл. Владимир. 2002. 35-36.

[29] Беспалов М.С. Анализ простейшего разностного уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы. - Тезисы докл. Воронежской зимн. шк. Воронеж: ВГУ. 2003. 35-36.

[30] Беспалов М.С. Ядра Дирихле-Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения. - Тезисы докл. 12-й Саратовск. зимней шк. Саратов: Изд. гос.УНЦ "Колледж". 2004. 22-23.

[31] Беспалов М.С. Применение спектрального разложения оператора кручения // Современные методы теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения - XV". Воронеж. ВГУ. 2004. 31-32.

[32] Беспалов М.С. Обработка и кодирование сигналов с помощью функций Уолша // Междун. научно-техн. конф. "Новые методологии проектирования изделий микроэлектроники: Владимир. 10-11 декабря 2004. Владимир: ВлГУ.

2004. 195-197.

[33] Беспалов М.С. Применение обобщений функций Уолша для обработки визуальной информации // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Матер. конф. - Воронеж, Воронежская гос. академия. 2005. 28.

[34] Беспалов М.С. Базис собственных векторов ДПУ // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.10. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань, УНИПРЕСС. 2005. 20-21.

[35] Беспалов М.С. Интегрирование в двоичном анализе // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 10-15 июля 2006. Тез.докл. Владимир. ВлГУ. 2006. 41-42.

[35] Беспалов М.С. Матричное представление двоичного анализа Фурье // XIII Междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование". III междунар. симпоз. "Ряды Фурье и их приложения". Тез.докл. Ростов н/Д., ООО "ЦВВР", 2005. 10-11.

[36] Беспалов М.С. Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша // International conference "Differential Equations and Related Topics"dedic. to Ivan G. Petrovskii. Book of abstracts. Moscow, May 21-26, 2007. 34-35.

[37] Беспалов М.С. Дискретное преобразование Уолша как степень для нового произведения матриц // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докл. 14-й Саратовск. зимней школы посв. памяти П.Л. Ульянова. Саратов. 2008. 13.

[38] Беспалов М.С. Спектр оператора дискретного преобразования Фурье // Тез. докл. 3-й междунар. конф. "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования."посв. 85-летию Л.Д. Кудрявцева. М.: МФТИ. 2008. 122-123.

[39] Беспалов М.С. Новая нумерация матриц Уолша // Современные методы теории функций и смежные проблемы. - Матер. конф. Воронежской зимн. матем. шк. Воронеж: ВГУ. 2009. 22-23.

[40] Беспалов М.С. Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 38. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Матер. Девятой междунар. Казанской летней научной школы-конф. Казань: КМО-КГУ. 2009. 43-44.

[41] Беспалов М.С. Спектр унитарных операторов гармонического анализа // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 26 июня-2 июля 2008. Тез.докл. Владимир. ВлГУ. 2008. 41-43.

[42] Беспалов М.С. Бесконечные матрицы с финитными столбцами // Труды Владимирского государственного ун-та. Вып. 7. Физико-математические основы индустрии наносистем и материалов. Владимир: ВлГУ. 2010. 26-31.