

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

АРСЕНТЬЕВА Евгения Петровна

**ВЭЙВЛЕТ-СПЛАЙНОВАЯ
АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С
ОСОБЕННОСТЯМИ**

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Демьянович Юрий Казимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Рябов Виктор Михайлович
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

доктор физико-математических наук,
профессор Вагер Борис Георгиевич
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)

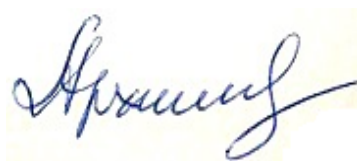
Ведущая организация: Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Защита состоится «_____» _____ 2011 г. в _____ часов на заседании совета Д.212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9 .

Автореферат разослан «_____» _____ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор



Архипова А.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Решение задач в гидродинамике, электродинамике, газовой динамике, теории упругости (в частности, прогнозирование климата, ураганов, цунами и т.д.) сводится к получению численных данных, задающих коэффициенты соответствующих начально-краевых задач, и к решению этих задач численными методами, а именно, методами сеток, методами конечных элементов и методами Рунге-Галеркина.

Поскольку сложные задачи часто характеризуются функциями с нерегулярным поведением (например, неограниченным ростом функций или их производных вблизи границы рассматриваемой области или переходами от медленного изменения к быстрому), то возникает задача построения аппроксимаций этих функций, учитывающих их нерегулярное поведение. Сплайновые и конечно-элементные аппроксимации представляют собой линейную комбинацию большого числа базисных функций с малым носителем; базисные функции строятся стандартным способом и определяются сеткой узлов в некоторой области евклидова пространства, а коэффициенты линейной комбинации рассматриваются как числовой поток, подлежащий обработке. Для экономного использования ресурсов вычислительной системы прибегают к вэйвлетному разложению упомянутого исходного потока на основной поток и уточняющие (вэйвлетные) потоки. В классической теории вэйвлетов рассматриваются ортогональные вэйвлетные (всплесковые) разложения (в пространстве L_2), связанные с равномерной сеткой, что позволяет эффективно использовать непрерывное и дискретное преобразования Фурье. При аппроксимации функций с особенностями естественно применение неравномерной сетки, сгущающейся вблизи особенностей; в этом случае применение преобразования Фурье для всплесковых разложений затруднительно. Для неравномерной сетки развит существенно иной подход — построение вложенных пространств и оператора проектирования на основе аппроксимационных соотношений. Построению вложенных пространств сплайнов предшествует построение вложенных адаптивных сеток. Для одномерного случая рассматриваемое множество сеток должно обладать свойством локальной квазиравномерности, а в случае многих измерений требуется топологическая правильность соответствующего симплицеального подразделения и равномерная ограниченность (снизу) углов между соседними ребрами каждого симплекса этого подразделения. Вопросам построения сеток посвящены известные работы Л.А.Оганесяна, С.Г.Михлина, Ю.К.Демьяновича, В.Г.Корнеева, Йезерента и др. Для адаптивности вэйвлетного разложения (для учета свойств аппроксимируемой функции при аппроксимации) важно локальное укрупнение или измельчение подразделения в зависимости от

локальных свойств упомянутой функции. В частности, для выделения основного потока при вэйвлетном разложении возникает задача локального укрупнения уже имеющегося симплициального подразделения; в многомерном случае такое укрупнение с сохранением топологической правильности не всегда возможно, так что возникает задача построения подразделений, допускающих упомянутое укрупнение. Неограниченное измельчение симплициального подразделения важно для аппроксимации функций с особенностями, а на основе таких подразделений получаются весовые оценки аппроксимации.

Цель диссертационной работы.

- Разработка методов измельчения триангуляции пограничной полосы вблизи границы двумерной области с сохранением свойства невырожденности.
- Разработка способов построения невырожденного симплициального подразделения, измельчающегося вблизи границы трехмерной области.
- Получение весовых оценок аппроксимации для функций с особенностью.
- Построение адаптивных вэйвлетных разложений курантовских пространств на локально укрупняющихся сетках, получение формул декомпозиции и реконструкции.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии и функционального анализа. Для построений вэйвлет-разложений применён метод аппроксимационных соотношений.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, а также представляет практический интерес. Алгоритмы построения симплициального подразделения в двумерном и трёхмерном случаях могут быть применены в практических задачах, решаемых методом конечных элементов, где искомая функция решения или ее производные неограниченно растут при приближении к границе. Предложенные методы обеспечивают построение невырожденных сеток, аппроксимацию функций с вырождением и вэйвлетное разложение. Результаты работы могут быть использованы при решении различных прикладных задач при сжатии и последующем восстановлении с заданной точностью больших потоков информации (цифровых сигналов) с резко меняющимися характеристиками, а также при построении параллельных форм алгоритмов упомянутых задач.

Результаты, выносимые на защиту.

- Методы измельчения триангуляции пограничной полосы вблизи границы двумерной области с сохранением свойства невырожденности.

- Способы построения невырожденного симплицеального подразделения, неограниченно измельчающегося вблизи границы трехмерной области.
- Весовые оценки аппроксимации для функций с особенностью.
- Адаптивные вэйвлетные разложения курантовских пространств на локально укрупняющихся сетках, формулы декомпозиции и реконструкции.

Апробация работы. По результатам работы были сделаны доклады на XXXIX, XL международных научных конференциях "Процессы управления и устойчивость" 2008 г., 2009 г. [1, 2] и на 2-ой межвузовской научной конференции по проблемам информатики "СПИСОК-2011" (27-29 апреля, 2011 г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 8 работах, из них 4 статьи (см. [A1-A4]) опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. В совместных работах [3, 4], [A1, A2, A4] научному руководителю принадлежит общая постановка задачи и указание на идею исследования, а детальная реализация идеи принадлежит диссертанту.

Структура и объем диссертации. Работа объемом 163 страницы состоит из введения, трех глав, разбитых на девятнадцать параграфов, заключения, списка литературы, одного приложения и 19 рисунков. Внутри каждой главы своя нумерация параграфов.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность диссертационной работы и излагаются основные результаты исследования.

В **первой главе** описывается метод измельчения триангуляции пограничной полосы с сохранением свойства невырожденности при приближении к границе в случае, когда граница прямолинейная, а затем упомянутая пограничная полоса отображается на пограничную полосу в случае криволинейной границы и проверяется сохранение свойства невырожденности.

В плоскости $\mathbb{R}_{(s,\tau)}^2$ рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_{(s,\tau)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, \tau) \mid -S < s < S, \quad 0 < \tau < \tau_*\}.$$

Рассмотрим прямые $\lambda_i : \{(s, \tau) \mid -S < s < S, \quad \tau = \tau_*/2^i\}$, разбивающие прямоугольник $\Pi_{(s,\tau)}$ на части $\Pi_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, \tau) \mid -S < s < S, \quad \tau_*/2^{i+1} < \tau < \tau_*/2^i\}$, называемые полосами.

Треугольники, у которых две вершины лежат на кривой λ_1 , назовем *нечетными треугольниками* триангулированной полосы Π_0 , а треугольники с одной вершиной на λ_1

— четными треугольниками этой полосы.

Пусть нулевая полоса Π_0 разделена на четные и нечетные треугольники. Пусть $\triangle ABC$ — один из нечетных треугольников полосы Π_0 с вершиной B на прямой λ_0 и с вершинами A и C на кривой λ_1 . Через середину B' отрезка AC проведем прямые, параллельные прямым AB и BC до пересечения с прямой λ_2 . Точки пересечения обозначим B'' и B''' соответственно. Построим прямолинейные отрезки AB'' , $B''B'$, $B'B'''$, $B'''C$ и $B'B$.

Проделаем аналогичные действия для всех нечетных треугольников нулевой полосы. Построение триангуляции полосы Π_1 заканчивается соединением прямолинейными отрезками каждой пары соседних точек, полученных на прямой λ_2 . Аналогично по триангуляции полосы Π_i построим триангуляцию полосы Π_{i+1} , $i = 0, 1, \dots$

Указанный способ триангуляции полосы назовём методом (T_1) .

Теорема 1. *Если при некотором $\theta \in (0, \pi/4)$ углы треугольников полос Π_0, Π_1 лежат в интервале $(\theta, \pi - \theta)$, то углы треугольников всех полос Π_i , $i = 2, \dots$, также лежат в этом интервале.*

Во втором параграфе первой главы рассматриваются различные варианты измельчения триангуляции при приближении к границе с угловыми точками (случаи внешних и внутренних углов).

Третий параграф посвящен построению триангуляции, измельчающейся при приближении к криволинейной границе.

В плоскости с декартовыми координатами (x, y) рассмотрим конечную область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, задаваемой параметрическим уравнением

$$\partial\Omega : \quad \mathbf{r} = \rho(s), \quad s \in [-S, S],$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, s — натуральный параметр (длина кривой), $\rho(s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Пусть $0 < \tau_* < \inf_{s \in [-S, S]} |R(s)|$, где $R(s)$ — радиус кривизны кривой $\partial\Omega$ в точке s . В плоскости (s, τ) рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_{[s, \tau]} \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, \tau) \mid -S \leq s < S, \quad -\tau_* < \tau < \tau_*\},$$

и пограничную полосу границы $\partial\Omega$

$$\Pi_{[x, y]} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \rho(s) + \tau \mathbf{n}(s), \quad -S \leq s < S, \quad -\tau_* < \tau < \tau_*\};$$

здесь $\mathbf{n}(s)$ — внутренняя нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке s . Пусть Φ — отображение $\Pi_{[s, \tau]}$ в $\Pi_{[x, y]}$, задаваемое формулой

$$\Phi : \quad (s, \tau) \longmapsto \mathbf{r} = \rho(s) + \tau \mathbf{n}(s).$$

В $\Pi_{[s,\tau]}$ рассмотрим невырожденный треугольник с вершинами в точках $A(\sigma, \delta)$, $B(\sigma + \varepsilon \cos p, \delta + \varepsilon \sin p)$, $C(\sigma + \eta \cos q, \delta + \eta \sin q)$ и через α обозначим его внутренний угол при вершине A . В $\Pi_{[x,y]}$ рассмотрим невырожденный (прямолинейный) треугольник с вершинами $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$ и $C' = \Phi(C)$; через α' обозначим его внутренний угол при вершине A' .

Теорема 2. *Если $\partial\Omega \in C^2[-S, S]$, то справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \cos \alpha' = \cos \alpha,$$

причем стремление к пределу происходит равномерно относительно $\sigma \in [-S, S]$.

Построим невырожденную триангуляцию в прямоугольнике $\Pi_{(s,\tau)}$ описанным выше методом (T_1) : углы всех треугольников этой триангуляции лежат в интервале $(\theta, \pi - \theta)$ при некотором $\theta \in (0, \pi/4)$; с помощью отображения Φ отобразим все вершины триангуляции в полосу

$$\Pi_{(x,y)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \rho(s) + \tau \mathbf{n}(s), -S \leq s < S, \quad 0 < \tau < \tau_*\};$$

и соединим их отрезками прямых так, чтобы получилась (прямолинейная) триангуляция, топологически эквивалентная только что упомянутой триангуляции прямоугольника $\Pi_{(s,\tau)}$.

Ввиду теоремы 2 углы α треугольников полученной триангуляции (вблизи криволинейной границы) обладают свойством

$$\alpha \in (\theta/2, \pi - \theta/2). \quad (1)$$

В четвертом параграфе получена весовая оценка курантовской аппроксимации для функции $u(\mathbf{r})$ с растущими вторыми производными при приближении к границе. Пусть $u(\mathbf{r}) \in C^2(\Omega)$, где Ω — открытая область с дважды непрерывно дифференцируемой границей. В области Ω рассмотрим измельчающуюся при приближении к границе триангуляцию \mathcal{T} со свойством (1), исчерпывающую область Ω , так что $\bar{\Omega} = \bar{\mathcal{T}}$. Для каждого треугольника T триангуляции \mathcal{T} положим

$$\|u\|_{\dot{C}(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{r}' \in T} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{r}') \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}') \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{r}') \right| \right\}$$

и введем весовую полунорму

$$\|u\|_{\dot{C}(\mathcal{T})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{T \in \mathcal{T}} \|u\|_{\dot{C}(T)} h_T^2.$$

Измельчение той или иной триангуляции назовем *стандартным*, если оно получено проведением средних линий во всех треугольниках этой триангуляции.

Пусть \mathcal{T}_s — s -кратное стандартное измельчение триангуляции \mathcal{T} , а \tilde{u}_s — курантовская интерполяция функции u на \mathcal{T}_s (т.е. непрерывная кусочно-линейная функция, совпадающая с u в вершинах триангуляции \mathcal{T}_s и линейная на каждом треугольнике этой триангуляции).

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$|u(\mathbf{r}) - \tilde{u}_s(\mathbf{r})| \leq C_2(\theta)2^{-2s}\|u\|_{\dot{C}(\mathcal{T})} \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega,$$

где $C_2(\theta)$ от s и от u не зависит.

Во второй главе описывается метод бесконечного симплициального подразделения, измельчающегося к границе трехмерной области с сохранением невырожденности: углы между ребрами симплексов этого подразделения лежат в интервале $(\theta, \pi - \theta)$, где θ — фиксированное число, $\theta \in (0, \pi/4)$.

Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid -S \leq x < S, \quad 0 \leq y \leq y_*, \quad 0 < z \leq z_*\}. \quad (2)$$

Описание метода распадается на несколько частей. В первом параграфе даётся описание одного из способов симплициального подразделения с измельчением симплексов при приближении к одному из оснований. Параллелепипед (2) разбивается слоями $\Lambda_i^z = \{(x, y, z) \mid -S \leq x < S, \quad 0 < y < y_*, \quad z = z_*/2^i\}$ на части, называемые далее *полосами*: $\Pi_i^z = \{(x, y, z) \mid -S \leq x < S, \quad 0 < y < y_*, \quad z_*/2^{i+1} < z < z_*/2^i\}$.

Слой Λ_0 разбивается на четные и нечетные треугольники. Вершины полученных треугольников проецируются на следующий слой Λ_1 параллельно z . Соединяются вершины и их проекции; в результате получается разбиение полосы Π_0^z на прямые *нечетные* и *четные* треугольные призмы, основания которых параллельны плоскости (x, y) , а образующие параллельны оси z . С полосой Π_0^z связывается комплекс $\bar{\Pi}_0^z$, состоящий из прямых треугольных призм.

Далее в первом параграфе с помощью матриц инциденций описываются используемые в работе способы симплициального подразделения чётных и нечётных призм. Обозначим малыми буквами с верхними индексами вершины соответствующих треугольных призм и симплексов. Треугольной призме сопоставим таблицу из двух строк в квадратных скобках: в верхней строке перечислены вершины треугольника в "верхнем" основании призмы, а в нижней строке — вершины треугольника в "нижнем" основании. Таблица в двойных прямолинейных скобках в каждой строке содержит перечень вершин одного

симплекса, причем двойные верхние индексы соответствуют вершинам – точкам деления ребер, соединяющих вершины с соответствующими одинарными индексами (например, вершина $d^{''''}$ является внутренней точкой ребра, соединяющего вершины d'' и d'''). При разбиении призм полосы Π_0^z используются следующие формулы для нечётной призмы

$$\begin{bmatrix} u' & u'' & u''' \\ d' & d'' & d''' \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc} u' & u'' & u''' & d' \\ d' & d^{',''} & d^{','''} & u'' \\ d^{',''} & d'' & d^{'','''} & u'' \\ d^{','''} & d^{'','''} & d''' & u'' \\ d^{',''} & d^{'','''} & d^{','''} & u'' \\ d' & d^{','''} & u'' & u''' \\ d''' & d^{','''} & u'' & u''' \end{array} \right\|$$

и для четной призмы

$$\begin{bmatrix} u' & u''' & u^{IV} \\ d' & d''' & d^{IV} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc} u' & u^{IV} & u''' & d^{IV} \\ d' & d^{',IV} & d^{','''} & u''' \\ d^{',IV} & d^{IV} & d^{IV,'''} & u''' \\ d^{','''} & d^{IV,'''} & d''' & u''' \\ d^{',IV} & d^{IV,'''} & d^{','''} & u''' \\ d' & d^{',IV} & u' & u''' \\ d^{IV} & d^{',IV} & u' & u''' \end{array} \right\|.$$

Описанное выше построение сначала приведет к комплексу $\bar{\Pi}_0^z$, состоящему из треугольных призм, а затем — к симплициальному подразделению полосы Π_0^z . Продолжение процесса симплициального разбиения приведет на s -м шаге к появлению комплексов $\bar{\Pi}_\alpha^z$, состоящих из треугольных призм: в каждом из них можно рассматривать четные и нечетные призмы; здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1})$ — двоичный вектор, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, s + 1$. Фактически получается бинарное дерево указанных комплексов, согласованные симплициальные подразделения которых могут быть построены последовательным применением описанного выше алгоритма симплициального разбиения полосы.

Теорема 4. *Если при некотором $\theta \in (0, \pi/4)$ углы симплексов нулевой полосы лежат в интервале $(\theta, \pi - \theta)$, то углы симплексов всех полос Π_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, также лежат в упомянутом интервале.*

Во втором и третьем параграфах даётся описание других способов симплициального подразделения с измельчением симплексов к одному из оснований. Четвертый и пятый

параграфы посвящены описанию совместного применения трех первых способов для симплициального подразделения с измельчением симплексов в двугранном угле. В шестом параграфе описывается алгоритм измельчения симплициального подразделения полосы в трехгранном угле (совместно используются способы, описанные в предыдущих параграфах). Во всех упомянутых случаях справедливы аналоги теоремы 4.

В последнем параграфе второй главы получена весовая оценка курантовской аппроксимации для функции $u(\mathbf{r})$ с растущими вторыми производными при приближении к границе трехмерной области Ω с дважды непрерывно дифференцируемой границей. Сначала рассматривается измельчающееся при приближении к границе симплициальное подразделение \mathcal{T} области Ω , углы между ребрами симплексов которого лежат в интервале $(\theta, \pi - \theta)$, $\theta \in (0, \pi/4)$. Для каждого симплекса \mathcal{S} подразделения \mathcal{T} положим

$$\|u\|_{\dot{C}(\mathcal{S})} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i+j+k=2} \max_{\mathbf{r}' \in \mathcal{S}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^i y^j z^k}(\mathbf{r}') \right|,$$

вводим весовую полунорму

$$\|u\|_{\dot{C}(\mathcal{T})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}} \|u\|_{\dot{C}(\mathcal{S})} h_{\mathcal{S}}^2.$$

Стандартным измельчением симплициального подразделения назовем подразделение, при котором новые вершины появляются лишь в серединах ребер рассматриваемого подразделения.

Теорема 5. *Если \mathcal{T}_s — s -кратное стандартное измельчение симплициального подразделения \mathcal{T} , а \tilde{u}_s — курантовская интерполяция функции u на \mathcal{T}_s , то справедлива оценка*

$$|u(\mathbf{r}) - \tilde{u}_s(\mathbf{r})| \leq C_3(\theta) 2^{-2s} \|u\|_{\dot{C}(\mathcal{T})} \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega,$$

где $C_3(\theta)$ от s и от u не зависит.

В третьей главе рассмотрены триангуляции области, допускающие локальное укрупнение с сохранением правильности. Построены адаптивные сплайн-вэйвлетные разложения на укрупняющейся двумерной сетке и выведены соответствующие формулы реконструкции и декомпозиции.

Введем обозначения $\mathbb{Z}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(i, j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i, 2j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i+1, 2j+1) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_0^2 \cup \mathbb{Z}_1^2$.

Пусть фиксированы числа $h' > 0, h'' > 0$. Обозначим $M_{i,j}$ точки с координатами (ih', jh'') , $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ и рассмотрим прямоугольники вида $\Pi_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid ih' \leq x \leq (i+2)h', jh'' \leq y \leq (j+2)h''\}$, где $(i, j) \in \mathbb{Z}_0^2$. Пусть \mathbb{X}^* — некоторое (конечное или

бесконечное) множество пар четных целочисленных индексов: $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{Z}_0^2$; рассмотрим замкнутую область $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{X}^*} \Pi_{i,j}$ (в частности, Ω совпадает со всей плоскостью \mathbb{R}^2 , если $\mathbb{X}^* = \mathbb{Z}_0^2$). Через \mathbb{X} обозначим множество индексов $(i, j) \in \mathbb{Z}_0^2 \cup \mathbb{Z}_1^2$ таких, что точки $M_{i,j} = (ih', jh'')$ лежат в Ω ; только что упомянутые точки $M_{i,j}$ будем называть узлами исходной сетки, они явятся вершинами определяемой ниже исходной триангуляции. Узел $M_{2i_0, 2j_0}$ называется внутренним узлом для Ω , если он является внутренней точкой в Ω . Множество пар $(i, j) \in \mathbb{X}^*$, для которых $M_{i,j}$ — внутренний узел, обозначим \mathbb{X}_0 . Очевидно, что $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^2$.

Рассмотрим триангуляцию, которая получается объединением таблиц

$$\left\| \begin{array}{ccc} M_{i,j} & M_{2+i,j} & M_{1+i,1+j} \\ M_{2+i,2+j} & M_{2+i,j} & M_{1+i,1+j} \\ M_{2+i,2+j} & M_{i,2+j} & M_{1+i,1+j} \\ M_{i,j} & M_{i,2+j} & M_{1+i,1+j} \end{array} \right\| \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}_0^2. \quad (3)$$

Укрупнение триангуляции будем производить объединением двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) треугольников. Не нарушая общности, в дальнейшем предполагаем, что $M_{0,0}$ — внутренний узел в Ω , т.е. $(0, 0) \in \mathbb{X}_0$. Рассмотрим такое укрупнение, при котором вершину $M_{0,0}$ будут окружать лишь укрупненные треугольники.

Итак, укрупнение зададим следующим преобразованием таблицы инциденций.

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{-2,0} & M_{-1,1} \\ M_{-2,2} & M_{-2,0} & M_{-1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{-2,0} & M_{-2,2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} M_{-2,2} & M_{0,2} & M_{-1,1} \\ M_{0,0} & M_{0,2} & M_{-1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \\ & \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{0,2} & M_{-2,2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{0,2} & M_{1,1} \\ M_{2,2} & M_{0,2} & M_{1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{0,2} & M_{2,2} \end{array} \right\|, \\ & \left\| \begin{array}{ccc} M_{2,2} & M_{2,0} & M_{1,1} \\ M_{0,0} & M_{2,0} & M_{1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{2,0} & M_{2,2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{2,0} & M_{1,-1} \\ M_{2,-2} & M_{2,0} & M_{1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \\ & \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{2,0} & M_{2,-2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} M_{2,-2} & M_{0,-2} & M_{1,-1} \\ M_{0,0} & M_{0,-2} & M_{1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{0,-2} & M_{2,-2} \end{array} \right\|, \\ & \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{0,-2} & M_{-1,-1} \\ M_{-2,-2} & M_{0,-2} & M_{-1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{-2,0} & M_{-2,-2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} M_{-2,-2} & M_{-2,0} & M_{-1,-1} \\ M_{0,0} & M_{-2,0} & M_{-1,-1} \end{array} \right\| \\ & \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} M_{0,0} & M_{-2,0} & M_{-2,-2} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Исходную триангуляцию (3) обозначим \mathcal{T} , описанную только что укрупненную триангуляцию обозначим \mathcal{T}_0 , а переход от исходной триангуляции к укрупненной обозначим $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$.

В четвертом параграфе устанавливаются калибровочные соотношения, которые дают представление координатных функций Куранта на укрупнённой сетке в виде линейной комбинации координатных функций Куранта на исходной сетке.

Введем обозначения $\mathbb{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$, $\mathbb{I}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_1 \setminus (0, 0)$. Функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $M_{i,j}$ исходной триангуляции, обозначим $\omega_{i,j}(t)$, $(i, j) \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{R}^2$. Для укрупненной триангуляции функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $M_{i,j}$, будем обозначать $\tilde{\omega}_{i,j}$. Заметим, что не все вершины исходной триангуляции участвуют в укрупненной триангуляции, а именно, индексы (i, j) пробегает не все множество \mathbb{X} , а лишь его часть: $(i, j) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}'_1$. Обозначим $\mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}'_1$.

Теорема 6. *Справедливы следующие соотношения*

$$\tilde{\omega}_{i,j}(t) \equiv \omega_{i,j}(t) \quad \forall (i, j) \in \mathbb{X} \setminus 2\mathbb{I}_1, \quad (4)$$

$$\tilde{\omega}_{0,0}(t) \equiv \omega_{0,0}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t), \quad (5)$$

$$\tilde{\omega}_{2,2}(t) \equiv \omega_{2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t), \quad \tilde{\omega}_{-2,2}(t) \equiv \omega_{-2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t), \quad (6)$$

$$\tilde{\omega}_{2,-2}(t) \equiv \omega_{2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t), \quad \tilde{\omega}_{-2,-2}(t) \equiv \omega_{-2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t). \quad (7)$$

В дальнейшем вектор (i, j) будем обозначать через α ; в соответствии с этим обозначением положим $M_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} M_{i,j}$, $\omega_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{i,j}$, $\tilde{\omega}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{i,j}$, $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0)$, $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1)$, $\mathbf{e}^* \stackrel{\text{def}}{=} (-1, 1)$. В этих обозначениях имеем $\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, -\mathbf{e}, -\mathbf{e}^*\}$, $\mathbb{I}'_1 = \mathbb{I}_1 \setminus \mathbf{0}$, $2\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, -2\mathbf{e}^*\}$, так что формулы (4) – (7) принимают вид:

$$\tilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} \mathbf{p}_{\alpha,\gamma} \omega_\gamma(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (8)$$

где $\mathbf{p}_{\alpha,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha,\gamma}$ при $\alpha \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1$, $\gamma \in \mathbb{X}$, $p_{2\alpha,2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ при $\alpha \in \mathbb{I}_1$, $p_{\mathbf{0},\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1/2$, $p_{2\alpha,\alpha} = 1/2$ при $\alpha \in \mathbb{I}'_1$; здесь $\delta_{\alpha,\alpha'}$ – символ Кронекера.

Обозначим матрицу $\mathfrak{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{p}_{\alpha,\gamma})$, где $\alpha \in \mathbb{Y}$ – номер строки, а $\gamma \in \mathbb{X}$ – номер столбца.

Как следствие из теоремы 6 получим вложенность соответствующих линейных пространств $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\omega_\gamma \mid \forall \gamma \in \mathbb{X}\})$, $\tilde{\mathbb{S}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\tilde{\omega}_\alpha \mid \forall \alpha \in \mathbb{Y}\})$; $\tilde{\mathbb{S}}_0 \subset \mathbb{S}$.

В пятом параграфе, используя систему функционалов, биортогональную системе базисных функций объемлющего пространства, строим вэйвлетное разложение и выводим соответствующие формулы реконструкции и декомпозиции.

В пространстве $C(\mathbb{R}^2)$ зададим систему линейных ограниченных функционалов g_γ для $\forall \gamma \in \mathbb{X}$ формулами $\langle g_\gamma, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(M_\gamma)$, $\langle g_\gamma, \omega_{\gamma'} \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'}$ $\forall \gamma, \gamma' \in \mathbb{X}$. Аналогичным образом задается система функционалов \tilde{g}_α для $\forall \alpha \in \mathbb{Y}$ формулами $\langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(M_\alpha)$, $\langle \tilde{g}_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha, \alpha'}$ $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Y}$.

Пусть $\mathbf{\Omega}_0$ — матрица с элементами $\mathbf{q}_{\alpha, \gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}_\alpha, \omega_\gamma \rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{Y}$ $\forall \gamma \in \mathbb{X}$, где α — номер строки, а β — номер столбца.

Теорема 7. *Справедливы соотношения $\mathbf{q}_{\alpha, \gamma} = \delta_{\alpha, \gamma}$ $\forall \alpha \in \mathbb{Y}$ $\forall \gamma \in \mathbb{X}$.*

Рассмотрим оператор P_0 проектирования пространства $C(\Omega)$ на подпространство $\tilde{\mathbb{S}}_0$, задаваемый формулой $P_0 u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \mathbb{Y}} \langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle \tilde{\omega}_\alpha$, $\forall u \in C(\Omega)$, и введем оператор $Q_0 = I - P_0$, где I — тождественный в $C(\Omega)$ оператор.

Пространством *вэйвлетов (всплесков)* называется пространство $\mathbb{W}_0 \stackrel{\text{def}}{=} Q_0 \mathbb{S}$, а прямое разложение

$$\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{S}}_0 \dot{+} \mathbb{W}_0 \quad (9)$$

— *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства \mathbb{S} .

Пусть $u \in \mathbb{S}$; согласно формуле (9) имеем $u = \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} c_\gamma \omega_\gamma = \sum_{\alpha \in \mathbb{Y}} a_\alpha \tilde{\omega}_\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{X}} b_\beta \omega_\beta$, где $a_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle$, $b_\beta, c_\gamma \in \mathbb{R}^1$. В соответствии с указанной ранее упорядоченностью рассмотрим вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_\beta)_{\beta \in \mathbb{X}}$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{X}}$.

Теорема 8. *Формулы декомпозиции имеют вид*

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}_0^T \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{c}, \quad (10)$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}_0^T \mathbf{a}. \quad (11)$$

В седьмом параграфе выводятся формулы реконструкции и декомпозиции для локального укрупнения исходной триангуляции.

Теорема 9. *При локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$ в вэйвлетном разложении (9) формулы декомпозиции имеют вид*

$$b_\alpha = 0, \quad a_\alpha = c_\alpha \quad \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (12)$$

$$b_{-\mathbf{e}^*} = c_{-\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2} c_{-2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2} c_0, \quad b_{-\mathbf{e}} = c_{-\mathbf{e}} - \frac{1}{2} c_{-2\mathbf{e}} - \frac{1}{2} c_0, \quad (13)$$

$$b_{\mathbf{e}} = c_{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} c_{2\mathbf{e}} - \frac{1}{2} c_0, \quad b_{\mathbf{e}^*} = c_{\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2} c_{2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2} c_0. \quad (14)$$

Теорема 10. Для локального укрупнения $[T \mapsto T_0]$ вэйвлетному разложению (9) соответствуют формулы реконструкции

$$c_\alpha = a_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (15)$$

$$c_{-\mathbf{e}^*} = b_{-\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2} a_{-2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2} a_0, \quad c_{-\mathbf{e}} = b_{-\mathbf{e}} + \frac{1}{2} a_{-2\mathbf{e}} + \frac{1}{2} a_0, \quad (16)$$

$$c_{\mathbf{e}} = b_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} a_{2\mathbf{e}} + \frac{1}{2} a_0, \quad c_{\mathbf{e}^*} = b_{\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2} a_{2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2} a_0. \quad (17)$$

В последнем параграфе третьей главы построены адаптивные сплайн-вэйвлетные разложения на измельчающейся двумерной сетке.

В Заключении перечислены основные результаты исследования.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

- A1. Арсентьева Е. П., Демьянович Ю. К. О невырожденной триангуляции со сгущением к границе области // Проблемы математического анализа. 2010. Вып. 48. С. 3–14.
- A2. Арсентьева Е. П., Демьянович Ю. К. Алгоритмы невырожденного симплицального подразделения с измельчением вблизи границы // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 6. С. 23–30.
- A3. Арсентьева Е. П. Об измельчении триангуляции вблизи границы области // Вестник Санкт-Петербургского университета, Сер. 10. 2011. Вып.1. С. 77–85.
- A4. Арсентьева Е. П., Демьянович Ю. К. Адаптивные сплайн-вэйвлетные разложения двумерных потоков числовой информации // Проблемы математического анализа. 2011. Вып. 56. С. 3–16.

Другие публикации:

- 1. Арсентьева Е. П. О погрешности приближения функций с растущими производными // Процессы управления и устойчивость: Труды 39-й международной научной конференции, 7-11 апреля 2008 г. / Под ред. Н.В.Смирнов, Г.Ш.Тамасян. Спб.: Издат. Дом С.-Петерб. Гос. Ун-та, 2008. С. 105–110.

2. Арсентьева Е. П. О невырожденной триангуляции и её измельчении вблизи границы области // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции, 6-9 апреля 2009 г. / Под ред. Н.В.Смирнов, Г.Ш.Тамасян. Спб.: Издат. Дом С.-Петерб. Гос. Ун-та, 2009. С. 104–107.
3. Arsent'eva E., Dem'yanovich Y. On nondegenerate triangulation with condensation at the boundary of a domain // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 169, no. 2. Pp. 131–144.
4. Arsent'eva E., Dem'yanovich Y. Adaptive spline-wavelet decomposition 2d flow of numeric information // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 175, no. 3. Pp. 211–228.