САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ВОСКРЕСЕНСКАЯ
ГАЛИНА ВАЛЕНТИНОВНА

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ И МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ

(01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант -
доктор физико-математических наук,
профессор Н.А. ВАВИЛОВ

Санкт - Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт - Петербургского государственного университета

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор
ВАВИЛОВ Николай Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
ВЕНКОВ Борис Борисович
(Петербургское отделение Математического института имени В.А.Стеклова РАН)

доктор физико-математических наук,
профессор
ЖУРАВЛЕВ Владимир Георгиевич
(Владимирский гуманитарный государственный университет)

доктор физико-математических наук,
профессор КАЗАРИН Лев Сергеевич
(Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова)

Ведущая организация Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена

Защита состоится 12 мая 2010 г. в 16 часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр.,д.28,математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им.М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу : 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д.27, ауд.311.

Автореферат разослан 29 марта 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Нежинский В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертационная работа относится к актуальному направлению современных алгебры и теории чисел - изучению связей между модулярными формами и представлениями групп. В последние 30 лет появилось много работ, посвященных этим вопросам. Значительную стимулирующую роль сыграла статья Дж.Конвея и С.Нортона "Monstrous moonshine", в которой изучались связи между представлениями группы Монстр Фишера-Грисса и коэффициентами модулярного j - инварианта. В работах Джеффри Мейсона и его учеников (Ива Мартина ,У. Раджи и других) рассматривались связи между конечными группами и модулярными формами ненулевого веса. Возникающие в этом контексте q - ряды также изучались в работах американцев Д.Цагира, Дж. Гордона, Синора , К. Оно, Д.Даммита, Х. Кисилевски, Дж.МакКея и японских математиков М.Койке, Т.Кондо, Т.Тасака, М.-М. Ланга, Т.Хиромацу, И. Нобуро, итальянца А.Биаджиоли , грека Я.Антонидиаса и других ученых.

Проводимые исследования показывают, что эта тематика полна разнообразных задач и является объектом интенсивного изучения. Однако до сих пор исследования велись достаточно разрозненно. Настоятельной необходимостью сегодня является развитие системного подхода к построению теории.

Основной задача диссертации - внести вклад в разработку теории, изучающей связи между конечными группами и семействами q - рядов ($\eta-$произведений), которые с ними ассоциированы с помощью принципа соответствия, основанного на применении комбинаторного символа обобщенной подстановки. Этот символ называется "Frame - shape"(каркас, рамочный шаблон).

Развиваемую теорию можно назвать *теорией фрейм-форм* или *теорией фрейм - соответствия* . Русская терминология не устоялась. В рефератах РЖ "Математика"на статьи американских и японских ученых, в которых это соответствие рассматривалось, А.И.Кострикин и П.Гресь использовали термин "фрейм-форма", который мы и будем применять.

Возникающие здесь q - ряды при специализации являются разложениями Фурье для модулярных форм. Поэтому это соответствие можно понимать как соответствие между конечными группами и семействами параболических форм. Точное описание этого принципа приводится при описании содержания диссертации.

В первой главе разрабатывается удобный подход к систематическому изучению семейств, ассоциированных с группами с помощью фрейм - формы. Исследуются возникающие категории. Для возникающих семейств модулярных форм вводятся понятия $G-$связанности и $G-$зависимости. Рассматривается проблема описания групп, которым соответствуют q - ряды с мультипликативными коэффициентами. Подгруппы такого типа содержатся в любой группе.

Вводится и изучается понятие модулярного аналога генетического кода конечной группы. Также исследуется новый тип арифметических сумм, возникших при изучении $\eta-$произведений. Более подробно результаты изложены в реферате далее.

С точки зрения теории групп эти исследования тесно связаны с непростыми задачами определения групп по классическим спектрам ее представлений. С точки зрения теории модулярных форм полученные результаты отвечают часто высказываемой идее о том, что "модулярные формы живут в семействах".

В работе разрабатывается программа дальнейших исследований : формулируются и обсуждаются открытые проблемы, решение которых будет способствовать дальнейшему систематическому развитию изучаемой теории.

Цель работы.

Основная цель работы - разработка раздела теории представлений, в которой изучаются связи между конечными группами и $q-$рядами, которые при специализации становятся модулярными формами - теории фрейм-соответствия (теории фрейм-форм). В рамках этой задачи следует ввести и изучить ряд новых понятий, разработать методы исследований. Следует подробно изучить соответствие между конечными группами и $q-$рядами с мультипликативными коэффициентами, дать определение групп, со всеми элементами которых ассоциируются мультипликативные $\eta-$произведения - $M\eta P-$ групп, показать, что подгруппы такого типа содержатся в любой группе. Ставится задача классификации $M\eta P-$ групп различных типов. Также ставится задача изучения параболических форм, ассоциированных с элементами конечного порядка в $SL(5, \mathbf{C})$ с помощью присоединенного представления, нахождения взаимосвязей между характерами модулярных форм и характерами Вейля. В рассматриваемом контексте очень интересно определить и исследовать модулярный аналог генетического кода. Также интересно изучить новые арифметические суммы - суммы Шимуры, которые возникают попутно в некоторых рассматриваемых задачах, изучить их для различных арифметических функций.

Методы исследований.

В работе используются методы теории представлений, теории групп и теории модулярных форм. Выработаны некоторые новые понятия для проведения исследований в теории фрейм-форм.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- предложены подходы к систематическому изучению теории фрейм-форм - одному из новых разделов теории представлений; на основе соответствия между элементами конечных групп и модулярными формами с помощью некоторых представлений вводится и изучается категория $(G, \Phi)-$ множеств модулярных форм, предлагается программа дальнейшего изучения;

- изучаются понятие редуцированного $(G, \Phi)-$ множества, понятия $G-$зависимости и $G-$связанности множеств параболических форм, задания семейств групп множествами модулярных форм;

- подробно исследуется один специальный класс модулярных форм с мультипликативными коэффициентами - мультипликативные $\eta-$произведения, дается несколько описаний этого класса, показывается, что эти функции могут определяться условиями на дивизор; дается арифметическая интерпретация коэффициентов некоторых форм;

- получены существенные результаты по проблеме классификации $M\eta P-$групп - таких конечных групп , что все модулярные формы , ассоциированные с элементами группы с помощью некоторого точного представления , являются мультипликативными $\eta-$произведениями: описаны абелевы, метациклические $M\eta P-$группы, конечные $M\eta P-$ подгруппы в $SL(5, \mathbf{C})$, $M\eta P-$группы порядков $24,\ 2^l,\ l \leq 5$, описаны все $M\eta P-$группы нечетных порядков; доказано,что группы

$$A_4 \times Z_6, \quad A_4 \times Z_8, \quad A_5 \times Z_3, \quad A_5 \times Z_4, \quad A_6 \times Z_2, \ S_6$$

являются $M\eta P-$группами; при этом детально описываются соответствия между элементами групп и модулярными формами;

- доказывается, что простая группа является $M\eta P-$группой тогда и только тогда, когда она - подгруппа в M_{24};

- доказывается, что не существует такой разрешимой конечной группы, что с ее элементами можно связать все мультипликативные $\eta-$произведения и только их с помощью некоторого точного представления;

- полностью описываются такие параболические формы, ассоциированные с элементами конечного порядка в $SL(5, \mathbf{C})$ с помощью присоединенного представления , что характеристический многочлен оператора $Ad(g)$ имеет

вид
$$P_g(x) = \prod_j (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j, t_j \in \mathbf{N};$$

- вводится и изучается понятие модулярного аналога генетического кода группы;

- найдены взаимосвязи между характерами модулярных форм и характерами некоторых представлений;

- в диссертации также изучаются новые арифметические суммы - суммы Шимуры. Они возникают попутно в некоторых рассматриваемых задачах. Эти суммы изучаются для различных арифметических функций. Получены некоторые арифметические тождества.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация имеет теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты могут найти применение в теории групп, теории представлений и теории модулярных форм. Материал, изложенный в диссертации, может быть использован при чтении специальных курсов по теории представлений и теории модулярных форм.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на международных конференциях по алгебре в Барнауле (1991), Туле (2003), Москве (2004), Санкт - Петербурге (1997,2002, 2007), Самаре (2007), международной конференции по теории чисел Journees Arithmetic (Лимож,1997; Рим 1999; Грац 2003; Марсель 2005; Эдинбург 2007), международной конференции по теории чисел в Москве (2007), школе - конференции по теории групп Ли в Самаре (2009), на семинаре по теории чисел в Институте Макса-Планка в Бонне в 2006 году, а также на городском алгебраическом семинаре имени Д.К.Фаддева города Санкт-Петербурга и семинаре кафедры высшей алгебры Московского государственного университета.

Публикации.

Все результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 19 работах без соавторов, среди них 14 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав и списка литературы, насчитывающего 92 названий. Общий объем работы составляет 169 страниц текста.

Содержание диссертации

Опишем теперь краткое содержание работы по главам.

В главе 1 предлагаются подходы к систематическому изучению теории фрейм-соответствия. Вводятся некоторые новые понятия, полезные для такого изучения.

В пункте 1.1. приводится описание принципа соответствия между элементами конечных групп и $q-$рядами с помощью фрейм-формы. Он состоит в следующем.

Пусть $\Phi-$ такое линейное представление G в пространстве $V,\ \ 24\ |dimV$, что для любого элемента $g\in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^{s}(x^{a_j}-1)^{t_j},\quad a_j,\ t_j\in\mathbf{N},\ 24|\sum_{j=1}^{s}a_jt_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z)=\quad\prod_{j=1}^{s}\eta(a_jz)^{t_j}.$$

Функция $\eta_g(z)$является параболической формой из пространства $S_k(N,\chi)$, где

$$k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}t_j,$$

минимальный уровень N определяется из условия

$$24|\sum_{j=1}^{s}\frac{Nt_j}{a_j},$$

характер $\chi-$ характер Дирихле по модулю N,

$$\chi(d)=\left(\frac{\prod_{j=1}^{s}a_j^{t_j}}{d}\right).$$

Если $d-$ четно, то $\chi(d)$ определяется как $\chi(d+N) = \chi(d), \quad (d,N) = 1$. Символ $\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}$ называется фрейм - формой . Описанное выше соответствие называется соответствием с помощью фрейм-формы (Frame-shape - соответствие).

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы. Например, можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных.

Далее вводится и изучается новое понятие $(G,\Phi)-$ множества модулярных форм:

$(G,\Phi)-$ множеством называется множество параболических форм $\eta_g(z)$, ассоциированных с элементами группы G по правилу, описанному выше, с помощью некоторого представления.

Можно определить некоторые категории, объектами которых являются эти множества.

Во многих задачах удобно рассматривать множества, получающиеся из $(G,\Phi)-$множеств удалением повторяющихся параболических форм. Мы будем называть такие множества редуцированными. Здесь возникают очень интересные для изучения понятия $G-$ связанности и $G-$зависимости множеств модулярных форм. Определяются пересечения и объединения редуцированных $(G,\Phi)-$множеств. В пункте 1.9. мы формулируем некоторые открытые проблемы.

Практически интересно изучать ситуации , когда с элементами конечных групп связаны $q-$ряды с какими-то особыми естествеными свойствами. Мы рассмотрим возникающие здесь ряды с мультипликативными коэффициентами.

Подробному изучению этой проблематики посвящены вторая, третья и четвертая главы диссертации.

Ряды с мультипликативными коэффициентами могут возникать только из представлений размерности 24, список этих эта-произведений известен. Он состоит из 28 параболических форм целого веса и двух праболических форм полуцелого веса. Эти функции были открыты в 1985 году американскими учеными Дж.МакКеем, Д.Даммитом и Н.Кисилевски. Они называются *мультипликативные* $\eta-$*произведениями.* Очень интересно получить различные описания этого класса форм.

В пункте 2.1. мы доказываем теорему о том, что мультипликативные $\eta-$произведения целого веса определяются условиями на дивизор.

Теорема 1.

Существует в точности 28 функций, определенных следующими условиями:

1) они являются параболическими формами целого веса с характерами некоторого уровня;

2) все их нули сосредоточены в параболических вершинах, и порядок каждого нуля равен 1.

Эти 28 функций и есть мультипликативные $\eta-$произведения целого веса.

Выпишем все мультипликативные $\eta-$произведения явно в следующей таблице.

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8 z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

В пункте 2.2. мы определяем $M\eta P-$группы.

Определение.

$M\eta P-$группа - это такая конечная группа, что все модулярные формы, ассоциированные с элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными $\eta-$произведениями.

Название - это фактически сокращение фразы "группа, ассоциированная с мультипликативными $\eta-$произведениями".

Такого типа подгруппы содержатся в любой группе. Единичная группа является $M\eta P-$группой. Исследование таких групп было стимулировано открытием Дж.Мейсоном того интересного факта, что группа Матье M_{24} является $M\eta P-$группой. Однако, легко видеть, что не все такие группы являются подгруппами в M_{24}. Кроме того, для одной и той же группы часто возможны различные варианты соответствия.

Исследования групп проведены тщательно,явно указываются используемые точные представления и соответствующие элементам группы параболические формы.

Во второй главе получена полная классификация абелевых $M\eta P-$групп. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.

Пусть $G-$такая абелева группа, что существует некоторое точное представление T такое, что для любого элемента g этой группы модулярная форма $\eta_g(z)$,ассоциированная с g с помощью T, является мультипликативным $\eta-$произведением.

Тогда G является подгруппой в одной из следующих групп:

$$Z_3 \times Z_3,\quad Z_{14},\quad Z_{15},\quad Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2,\quad Z_4 \times Z_2 \times Z_2,\quad Z_4 \times Z_4,\quad Z_8 \times Z_2,$$

$$Z_{16},\ Z_{18},\ Z_{10} \times Z_2,\ Z_{20},\ Z_{21},\ Z_{22},\ Z_{23},$$

$$Z_{24},\quad Z_{12} \times Z_2,\quad Z_6 \times Z_2 \times Z_2.$$

В третьей главе исследуются метациклические $M\eta P-$группы. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3.

Метациклические $M\eta P-$группы вида

$< a, b : a^m = e,\ b^s = e, b^{-1}ab = a^r >$, *где пересечение подгрупп* $< a >$ *и* $< b >$ *тривиально, описываются следующим списком параметров:*

m = 3, s = 2,4,6,8,12,18, r = 2.
m = 4, s = 2,4,6,8,10,24, r = 3.
m = 5, s = 4,8,12, r = 2; s = 2,4,6,8, r = 4.
m = 6, s = 2,4,6, r = 5.
m = 7, s = 3,6, r = 2; s = 6, 12, r = 3; s = 2, 4, 6, r = 6.
m = 8, s = 2,4, r = 3; s = 2, 4, r = 5; s = 2, 4, r = 7.
m = 9, s = 2, r = 8; s = 4, r = 8.
m = 10, s = 4,8, r = 3; s = 2, 4, r = 9.
m = 11, s = 2,4, r = 10; s = 5, r = 5; s = 10, 20, r = 2; s = 10, r = 4.
m = 12, s = 2, r = 5, 7, 11.
m = 14, s = 2, r = 13; s = 3, r = 9; s = 4, r = 3; s = 6, r = 3.
m = 15, s = 2, r = 4, 14; s = 4, r = 2.
m = 16, s = 2, r = 7, 9, 15.
m = 18, s = 2, r = 17.
m = 20, s = 2, r = 9, 19; s = 4, r = 17.
m = 21, s = 2, r = 8, 20; s = 3, r = 4; s = 6, r = 2.
m = 22, s = 2, r = 21; s = 5, r = 3; s = 10, r = 7.
m = 23, s = 2, r = 22; s = 11, r = 10; s = 22, r = 5.
m = 24, s = 2, r= 17.

В четвертой главе исследуются некоторые другие $M\eta P-$группы. В пункте 4.1. доказывается теорема о возможной структуре силовских $p-$ подгрупп $M\eta P-$групп при нечетном p.

Теорема 4.

Пусть $G-$ конечная группа, для которой существует такое точное представление T, что для каждого $g \in G$ характеристический многочлен оператора $T(g)$ имеет вид $P_g(x) = \prod_{j=1}^{s}(x^{a_j} - 1)^{t_j}$, и соответствующая параболическая форма $\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z)$ является мультипликативным $\eta-$произведением.

Тогда для силовских подгрупп Syl_p, $p \neq 2$, группы G существуют лишь следующие возможности:

$$Syl_3 \cong Z_3, \quad Syl_3 \cong Z_3 \times Z_3, \quad Syl_3 \cong Z_9,$$

$$Syl_3 \cong < a, b, c : a^3 = e, b^3 = e, c^3 = e, ab = bac, ac = ca, bc = cb >,$$

$$Syl_5 \cong Z_5, \quad Syl_7 \cong Z_7, \quad Syl_{11} \cong Z_{11}, \quad Syl_{23} \cong Z_{23}.$$

Доказан также следующий факт.

Теорема 5.

Не существует такой конечной разрешимой группы G, что со всеми ее элементами с помощью некоторого точного представления можно ассоциировать **все** *мультипликативные $\eta-$произведения и только их.*

В пункте 4.2. подробно изучается соответствие между мультипликативными $\eta-$произведения и элементами групп порядка 24.

В пункте 4.3. изучаются $M\eta P-$группы порядков 16 и 32, которые не были рассмотрены ранее.

В пункте 4.4. мы докажем теорему, описывающую все $M\eta P-$ группы нечетного порядка.

Теорема 6.

$M\eta P-$ группы нечетного порядка являются подгруппами в одной из следующих групп:

$G_1 \cong < a, b, c : a^3 = b^3 = c^3 = e,\ ab = bac,\ ac = ca,\ bc = cb >,$
$G_2 \cong < a, b : a^{21} = b^3 = e,\ b^{-1}ab = a^4 >,$
$G_3 \cong < a, b : a^{23} = b^{11} = e,\ b^{-1}ab = a^{10} >,$
$G_4 \cong < a, b : a^{11} = b^5 = e,\ b^{-1}ab = a^5 >,$
$G_5 \cong Z_9,$
$G_6 \cong Z_{15}.$

В пункте 4.5. мы опишем все простые $M\eta P-$группы.

Теорема 7.

Конечная простая группа G является простой $M\eta P-$группой тогда и только тогда, когда G - подгруппа в M_{24}.

Результаты пунктов 4.6. - 4.8. описываются следующей теоремой.

Теорема 8.

Группы

$$A_4 \times Z_6, \quad A_4 \times Z_8, \quad A_5 \times Z_3, \quad A_5 \times Z_4, \quad A_6 \times Z_2, \ S_6$$

являются $M\eta P-$группами.

Понятно, что все подгруппы этих групп - также $M\eta P-$группы. Подробно разобраны различные, часто все возможные, варианты соответствия между элементами групп и мультипликтивными $\eta-$ произведениями.

В пятой главе мы изучаем появление $\eta-$ произведений при рассмотрении представлений групп Ли.

Получено следующее интересное свойство, описанное в теореме 9.

Теорема 9.

Пусть $Ad-$ *присоединенное представление группы* $SL(5,C)$, *и* $g \in SL(5,C)$, $ord(g) \neq 3,6,9,21$, *таков, что характеристический многочлен оператора* $Ad(g)$ *имеет вид*

$P_g(x) = \prod_{j=1}^{s}(x^{a_j}-1)^{t_j}, \quad a_j \in \mathbf{N},\ t_j \in \mathbf{N}.$

Тогда соответствующая параболическая форма $\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{s}\eta^{t_j}(a_j z)$ *является мультипликативным* $\eta-$*произведением веса* $k(g) > 1$, *и все мультипликативные* $\eta-$*произведения веса* $k(g) > 1$ *можно получить этим путем.*

Если $ord(g) = 3,6,9,21$, *то этим путем можно получить все мультипликативные* $\eta-$*произведения веса* $k(g) > 1$. *Кроме этого, в этом соответствии возникают пять модулярных форм, которые не являются мультипликативными* $\eta-$*произведениями:*

$$\eta^4(3z)\eta^{12}(z),\ \eta^7(3z)\eta^3(z),\ \eta^2(6z)\eta^6(2z),\ \eta^2(9z)\eta(3z)\eta^3(z),\ \eta(21z)\eta^3(z).$$

Конечные подгруппы в $SL(5,C)$, элементы которых могут быть ассоциированы с мультипликативными $\eta-$произведениями с помощью присоединенного представления описываются следующей теоремой

Теорема 10.

Максимальные конечные $M\eta P-$*подгруппы в* $SL(5,\mathbf{C})$, *с элементами которых мультипликативные* $\eta-$*произведения ассоциируются через фрейм-форму с помощью присоединенного представления являются прямыми произведениями группы* $\mathbf{Z}_5$ *(которая порождается скалярной матрицей) и одной из следующих групп:*

$S_4,\ A_4\times\mathbf{Z}_2,\ \mathbf{Q}_8\times\mathbf{Z}_3,\ D_4\times\mathbf{Z}_3$, *бинарная группа тетраэдра, метациклическая группа порядка порядка 21,* D_6, *метациклическая группа порядка 12:*

$< S,\ T\ :\ S^3 = T^2 = (ST)^2 >$, *все группы порядка 16,*

$\mathbf{Z}_3\times\mathbf{Z}_3,\ \mathbf{Z}_{15},\ \mathbf{Z}_{14},\ \mathbf{Z}_{11},\ \mathbf{Z}_{10},\ \mathbf{Z}_9$.

Собственные значения элементов, соответствующих модулярным формам, находятся однозначно с точностью до перестановки и замены первообразных корней. В следующей таблице мы их выпишем.

собственные значения	параболические формы
1,1,1,1,1	$\eta^{24}(z)$
-1,-1,-1,-1,1	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
-1,-1,1,1,1	$\eta^{12}(2z)$
$\zeta_3, \zeta_3, \zeta_3,$ 1,1	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$\zeta_3^2, \zeta_3^2, \zeta_3, \zeta_3$,1	$\eta^8(3z)$
$\zeta_4^3, \zeta_4^2, \zeta_4, \zeta_4, \zeta_4$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$\zeta_4^3, \zeta_4^3, \zeta_4, \zeta_4$,1	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$\zeta_4^3, \zeta_4^2, \zeta_4^2, \zeta_4$,1	$\eta^6(4z)$
$\zeta_5^3, \zeta_5, \zeta_5,$ 1,1	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$\zeta_6^4, \zeta_6^3, \zeta_6^3, \zeta_6, \zeta_6$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$\zeta_6^5, \zeta_6^3, \zeta_6^2, \zeta_6^2$,1	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
$\zeta_6^5, \zeta_6^4, \zeta_6^2, \zeta_6$,1	$\eta^4(6z)$
$\zeta_8^7, \zeta_8^5, \zeta_8^3, \zeta_8$,1	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$
$\zeta_8^5, \zeta_8^5, \zeta_8^3, \zeta_8^2, \zeta_8,$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$\zeta_9^8, \zeta_9^5, \zeta_9^3, \zeta_9^2$,1	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$
$\zeta_{10}^8, \zeta_{10}^6, \zeta_{10}^5, \zeta_{10}$,1	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$
$\zeta_{11}^9, \zeta_{11}^5, \zeta_{11}^4, \zeta_{11}^3, \zeta_{11}$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$
$\zeta_{12}^9, \zeta_{12}^7, \zeta_{12}^4, \zeta_{12}^3, \zeta_{12},$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
$\zeta_{14}^{11}, \zeta_{14}^9, \zeta_{14}^7, \zeta_{14}, \zeta_{14},$	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$
$\zeta_{15}^{12}, \zeta_{15}^{10}, \zeta_{15}^7, \zeta_{15}$,1	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$

В пункте 5.2. изучается связь между характерами Рамануджана, которые мы можем определить для модулярных форм и которые для форм, собственных относительно всех операторов Гекке, фигурируют в формулах для эйлеровых произведений, и характерами Вейля.

Для эта-произведений по фрейм-форме характеры Рамануджана определяются формулой

$$\psi_p(g) = \begin{cases} p^{k(g)-1}\chi_g(p), & (ord(g), p) = 1, \\ 0, & (ord(g), p) = p. \end{cases}$$

Здесь $ord(g)-$ порядок модулярной формы $\eta_g(z)$; $k(g)$, $\chi_g(p)-$ вес и характер $\eta_g(z)$.

Рассмотрим простую группу Ли G_0 и ее алгебру Ли $Lie(G_0)$ четного ранга. Пусть $G-$ такая конечная подгруппа этой группы Ли, что каждый ее элемент g имеет в присоединенном представлении характеристический многочлен вида $\prod_j (x^{a_j} - 1)^{t_j}$, с которым ассоциируется функция $\prod_j \eta(a_j z)^{t_j}$. Обозначим через $ch_{(p-1)\rho}-$ характер Вейля неприводимого представления группы Ли G_0 о старшим весом $(p-1)\rho$, где $\rho-$ полусумма положительных корней алгебры Ли $Lie(G_0)$.

Теорема 11.

Для любого элемента $g \in G$ *и любого нечетного простого числа* p, *взаимно простого с порядком элемента* g, *имеет место*

$$\psi_p(g) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{dimG_0}{2}} p^{\frac{r}{2}-1} ch_{(p-1)\rho},$$

где $r-$ *ранг алгебры Ли* $Lie(G_0)$.

$M\eta P-$группы содержатся в любой группе.

Интересной является следующая проблема:

Пусть $H-$ *неединичная* $M\eta P-$*подгруппа группы* G. *Описать все представления группы* G, *ограничения которых на* H *являются* $M\eta P-$*представлениями.*

$M\eta P-$ представление группы H - это представление, с помощью которого каждый элемент из H ассоциируется с мультипликативными $\eta-$ произведениями. В доказательствах мы эти представления для удобства называем допустимыми.

В пункте 5.4. мы доказываем, что, если в некоторой группе G, содержащей по крайней мере две собственные $M\eta P-$ группы, ограничения некоторого точного представления на все собственные неединичные подгруппы являются $M\eta P-$ представлениями, то сама группа G является $M\eta P-$группой.

В пункте 5.5. мы изучаем связи между представлениями групп и $q-$ рядами с коэффициентами, близкими к мультипликативным.

Далее мы описывем общий алгоритмический подход к изучению фрейм-соответствия.

В шестой главе мы изучаем понятие модулярного аналога генетического кода, то есть такого явления, когда наборы $\eta-$ произведений *однозначно* определяют группу. В некотором смысле это - "шифр"группы.

Мы вычисляем такой код для групп порядков от 1 до 8. Эти примеры показывают, что нахождение такого кода непросто даже для малых порядков.

Теорема 12.

Множества параболических форм, указанное в следующей таблице, однозначно определяют соответствующие группы.

группа	модулярный генетический код
$\{e\}$	$\{\eta^{24}(z)\}$
Z_2	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z)\}$
Z_3	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z)\}$
$Z_2\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Z_4	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{5}(4z)\eta^{2}(2z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Z_5	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{4}(5z)\eta^{4}(z)\}$
Z_6	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{4}(6z),\ \eta^{8}(3z)\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(6z)\eta^{6}(z),\ \ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),\ \eta^{9}(2z)\eta^{6}(z)\}$
S_3	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z)\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z)\}$
Z_7	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(7z)\eta^{3}(z)\}$
Z_8	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(8z)\ ,\eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}$
$Z_4\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \ \eta^{4}(2z)\eta^{16}(z)\}$
$Z_2\times Z_2\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \eta^{6}(2z)\eta^{12}(z),\ \ \eta^{4}(2z)\eta^{16}(z)\}$
D_4	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Q_8	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{4}(4z)\eta^{2}(2z)\eta^{4}(z),\ \eta^{4}(4z)\eta^{8}(z),\ \eta^{4}(4z)\eta^{4}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z)\}$

Далее находятся коды для циклических групп порядка p^l, групп порядка $p^2,\ pq$, диэдральных групп D_p, групп порядка 24.

Теорема 13.

Пусть p - нечетное простое число, $p \neq 3, 7$.
Тогда диэдральная группа D_p однозначно определяется множеством

$$\{\eta^{24p}(z), \quad \eta^{24}(pz), \quad \eta^{12p}(2z)\}.$$

Группы D_3 и D_7 определяются наборами из двух множеств:

$$D_3 \cong S_3 : \{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z),\ \eta^{12}(2z)\} \bigwedge \{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(6z)\eta^{6}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z)\};$$

$$D_7 : \{\eta^{168}(z),\ \eta^{24}(7z),\ \eta^{84}(2z)\} \bigwedge \{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(7z)\eta^{3}(z),\ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$$

Теорема 14.

Любая группа порядка 24 может быть однозначно определена одним или двумя множествами $\eta-$ произведений. Все эти множества состоят из мультипликативных $\eta-$ произведений, кроме случаев $Z_{12} \times Z_2$, $Z_6 \times Z_2 \times Z_2$. Это соответствие указано в следующей таблице.

Здесь группы, стоящие в левом столбце - это

$G_1 \cong S_4$;
$G_2 \cong < a, b : a^6 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^5 >$;
$G_3 \cong < a, b : a^4 = b^6 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = e >$;
$G_4 \cong < a, b : a^6 = b^6 = (ab)^4 = e, a^3 = b^3 = (ab)^2 >$;
$G_5 \cong D_6 \times Z_2$;
$G_6 \cong A_4 \times Z_2$;
$G_7 \cong D_4 \times Z_3$;
$G_8 \cong S_3 \times Z_4$;
$G_9 \cong Q_8 \times Z_3$;
$G_{10} \cong D_{12}$;
$G_{11} \cong < a,\ b : a^6 = b^2 = (ab)^2 >$;
$G_{12} \cong < a, b : a^3 = b^8 = e, b^{-1}ab = a^2 >$;
$G_{13} \cong Z_6 \times Z_2 \times Z_2$;
$G_{14} \cong Z_{12} \times Z_2$;
$G_{15} \cong Z_{24}$.

группа	модулярный генетический код
G_1	$\{\eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_2	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z)$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_3	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^4(4z)\eta^4(2z),\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_4	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(4z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_5	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_6	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^6(3z)\eta^6(3z),$ $\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_7	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_8	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^6(4z),\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_9	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{10}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{11}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \ \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{12}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\eta^3(8z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{13}	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^4(3z),\ \eta^3(6z)\eta^2(3z),\ \eta^4(6z),$ $\eta^8(3z),\ \eta^6(2z)\eta^{12}(z),\ \eta^9(2z)\eta^6(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{14}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(12z),\ \eta^2(6z)\eta^4(3z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),$ $\eta^8(3z),\ \eta^6(2z)\eta^{12}(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{15}	$\{\eta(24z),\ \eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\eta^3(8z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$

Глава 7 посвящена изучению новых арифметических сумм, которые привлекли внимание математиков при исследовании $\eta-$произведений. Они называются суммами Шимуры . Определение их дано Кеном Оно в 1994 году. Мы показываем, что эти суммы можно и очень интересно изучать для любых арифметических функций, даже не связанных с теорией модулярных форм. Получены новые формулы. Доказаны некоторые арифметические тождества, содержащие суммы Шимуры. Далее мы приведем для примера две теоремы.

Арифметической функцией называется комплекснозначная функция, определенная на множестве натуральных чисел.

Пусть $a(n)-$ арифметическая функция, доопределим эту функцию до функции, определенной на множестве неотрицательных рациональных чисел, положив значение этой функции равным нулю,если ее аргумент не является натуральным числом.

Определение.

Пусть a(n)- функция, описанная выше, c - положительное целое число. Тогда для $m \geq 1$ сумма Шимуры $Sh(m, a, c)$ определяется формулой:

$$Sh(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

$Sh(1, a, c) = 0$. Иногда эту сумму удобно формально добавлять.

Теорема 15.

Пусть

$$f(z) \ = \eta^2(12z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(144, \chi).$$

1) Если p инертно в $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}),$ *то*

$$p = -2Sh(p^2, a, 1) - 1.$$

2) Если p расщепляется в $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}),$ *то*
$p = l^2 + 3m^2,$ *и*
$\left(\frac{l}{3}\right)\ l = Sh(p, a, 1) + 2,$

$$p = (2Sh(p, a, 1) + a^2(p))^2 - 2Sh(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2Sh(p, a, 1).$$

Теорема 16.

Пусть $p-$ нечетное простое число, и

$$f_1(z) = \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n,$$

$$f_2(z) = \eta^2(8z)\eta^2(4z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n,$$

$$f_3(z) = \eta^2(9z)\eta^2(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n$$

тогда

$$2Sh(p,a,1) + a^2(p) = Sh(2p,b,3) + p = Sh(3p,c,8) + p.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н.А. Вавилову за постоянное внимание к работе, ценные обсуждения и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

[1] Г.В. Воскресенская, *Модулярные формы и представления групп* , Матем.заметки, **52** (1992), 25 - 31.

[2] Г.В. Воскресенская, *Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5, \mathbf{C})$,* ФАН и его прил., **29**, N 2, (1995), 71 - 73.

[3] Г.В. Воскресенская, *Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24,* Матем. заметки , **60**, N 2, (1996), 292 - 294.

[4] Г.В. Воскресенская, *Модулярные формы и представления диэдральных групп,* Матем. заметки , **63**, N 1, (1998), 130 - 133.

[5] Г.В. Воскресенская, *Метациклические группы и модулярные формы,* Матем. заметки , **67**, N 2, (2000), 163 - 173.

[6] Г.В. Воскресенская, *Конечные группы и мультипликативные эта - произведения,* Вестник СамГУ, **16**, N 2, (2000), 18 - 25.

[7] Г.В. Воскресенская, *Абелевы группы и модулярные формы,* Вестник СамГУ, **28**, N 2, (2003), 21 - 35 .

[8] Г.В. Воскресенская, *Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп,* Матем. заметки , **73**, N 4 , (2003), 482 - 495 .

[9] Г.В. Воскресенская, *Модулярные формы и группы порядка* 2^n , Вестник СамГУ , **34** , N 4 , (2004), 18 - 38.

[10] Г.В. Воскресенская, *О проблеме классификации конечных групп, ассоциированных с мультипликативными эта-произведениями,* Фунд. и приклад. математика , **10** , N 4 , (2004), 43 - 64 .

[11] Г.В. Воскресенская, *Расширения групп и многочлены Холла,* Матем. заметки , **78**, N 2 , (2005), 180 - 185 .

[12] Г.В. Воскресенская, *Модулярные формы с мультипликативными коэффициентами и группы порядка 24,* Вестник СамГУ , **46** , N 6 , (2006), 19 - 32.

[13] Г.В. Воскресенская, *Суммы Шимуры для арифметических функций,* Вестник СамГУ , **57**, N 7 , (2007),25 - 34.

[14] Г.В. Воскресенская, *О теории соответствия между конечными группами и модулярными формами,* Вестник СамГУ , **65** , N 6 , (2008), 71 - 82.

Другие публикации

[1] Г.В. Воскресенская, *Гиперкомплексные числа, системы корней и модулярные формы,* Сб."Арифметика и геометрия многообразий", Самара, (1992), 48 - 59.

[2] G.V. Voskresenskaya, *One special class of modular forms and group representations*, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, **11** (1999), 247 - 262.

[3] G.V. Voskresenskaya, *Multiplicative Dedekind $\eta-$functions and representations of finite groups*, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, **17** (2005), 359 - 380.

[4] G.V. Voskresenskaya, *Modular forms, Shimura sums and arithmetic of quadratic fields* , MPI - preprint, **95** (2006), 15 pp.

[5] G.V. Voskresenskaya, *Finite groups associated to multiplicative $\eta-$products* , MPI - preprint, **96** (2006), 22 pp.