САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ВАХИТОВ Александр Тимурович

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯХ С БЕСКОНЕЧНЫМ ВТОРЫМ МОМЕНТОМ

01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре теоретической кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ГРАНИЧИН Олег Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук ЩЕРБАКОВ Павел Сергеевич (Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН) кандидат физико-математических наук, доцент КРИВУЛИН Николай Кимович (Санкт-Петербургский государственный университет)
Ведущая организация:	Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится “____” ________ 2010 года в ____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке
им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета
по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7/9.

Автореферат разослан "____"________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблема оптимизации того или иного функционала встает во многих практических приложениях. Иногда экстремальные значения можно найти аналитически, однако зачастую инженеры имеют дело с неизвестным функционалом, значение которого можно только вычислять в задаваемых точках. При этом возможно появление неконтролируемых неопределенностей различной природы, как статистических, так и нерегулярных (например, неизвестных, но ограниченных, для которых традиционные предположения о статистической природе, независимости и центрированности не выполнены). Для неопределенностей статистической природы в современных практически значимых задачах финансовой математики, теории игр, распознавания биологических видов, в Интернет-системах, при планировании электросетей, предотвращении эпидемий и лечении инфицированных все чаще обоснованно предполагают степенное распределение, при котором может отсутствовать второй статистический момент.

В 50-е годы XX века для решения задачи стохастической оптимизации начинают использоваться методы стохастической аппроксимации Роббинса-Монро и Кифера-Вольфовица. Они были развиты в работах В.С. Боркара, М. Вазана, Ю.М. Ермольева, Дж. Ина, В.Я. Катковника, Т.П. Красулиной, Г. Кушнера, М.Б. Невельсона, А.С. Немировского, Ю.Е. Нестерова, А.С. Позняка, Б.Т. Поляка, Р.З. Хасьминского, Я.З. Цыпкина, В. Фабиана, В.Н. Фомина, А.Л. Фрадкова, Д.Б. Юдина, В.А. Якубовича и др.

В работах М. Вадьясагара, Д. Галафиори, Л. Гао, О.Н. Граничина, М. Кампи, Л. Льюнга, Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова и др. показана целесообразность использования в задачах оценивания рандомизированных алгоритмов, которые позволяют ускорить процедуры решения задач и устранить эффекты смещения. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации (РАСА, в англоязычной литературе — SPSA, Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation), были предложены в работах О.Н. Граничина, Б.Т. Поляка и А.Б. Цыбакова, Дж. Спалла, Х.-Ф. Чена, Т. Дункан и Б. Пасик-Дункан в конце 80-х, 90-х гг. XX в., развивая идеи методов случайного поиска, детально исследованных в русскоязычной литературе С.М. Ермаковым и А.А. Жиглявским, А. Жилинскасом, Л.А. Растригиным и многими другими. О.Н. Граничиным в 1989–1992 гг. было показано, что эти алгоритмы работоспособны в условиях неизвестных ограниченных помех наблюдения (unknown but bounded). В задачах стационарной оптимизации Б.Т. Поляк и А.Б. Цыбаков в 1990 г. обосновали минимаксную асимптотическую оптимальность скорости сходимости оценок этих алгоритмов, в том смысле, что порядок ее не может быть улучшен никаким другим итеративным алгоритмом. Дж. Спаллом в 1992–1997 гг. была установлена оптимальность использования в качестве пробного возмущения распределения Бернулли и уменьшение количества измерений для получения оценки заданного качества по сравнению с процедурой Кифера-Вольфовица.

Несмотря на большое количество публикаций по исследованию свойств оценок алгоритмов типа РАСА, теоретическая обоснованность их использования до последнего времени существенно ограничивалась предположениями об ограниченности второго момента у неопределенностей. С.С. Сысоевым в 2005 г. была обоснована состоятельность рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации с одним измерением в частном случае при существовании у статистических неопределенностей конечного момента степени $\rho \in (1; 2]$ в более строгих условиях, чем предложенные в диссертации.

В последнее десятилетие методы управления и оптимизации нашли важное приложение в теории распределенных и мультиагентных систем, а также систем массового обслуживания, в работах Ф. Булло, Г. Вайса, Х. Кортес, Н.К. Кривулина, С. Мартинез, А.С. Матвеева, А.В. Савкина, Ж. Фербера и др.

Цель работы. Исследование свойств оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в стационарном и нестационарном случае при наличии у неопределенностей конечного момента степени ρ, $1 < \rho \leq 2$. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи.

При оптимизации функционала типа среднего риска со статистическими неопределенностями с конечными моментами степени $\rho \in (1, 2]$ и почти произвольной ограниченной аддитивной помехе наблюдения

1. исследовать в стационарном случае свойства состоятельности оценок РАСА с уменьшающимися до нуля размерами шагов;

2. получить асимптотические оценки скорости сходимости РАСА;

3. исследовать в нестационарном случае свойства стабилизируемости последовательности оценок РАСА с постоянным размером шага.

4. Разработать модель системы управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети, в контур обратной связи которой включены РАСА, и исследовать ее поведение при неопределенностях, распределенных с бесконечным вторым моментом.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теорий оценивания и оптимизации, вероятностей и математической статистики, массового обслуживания, имитационного моделирования.

Основные результаты. В задачах оптимизации функционала типа среднего риска со статистическими неопределенностями с конечным моментом степени $\rho \in (1,2]$ и почти произвольной ограниченной аддитивной помехой наблюдения установлены

1. необходимые условия состоятельности и сильной состоятельности оценок РАСА в стационарном случае (Теоремы 1,2);

2. асимптотические оценки скорости сходимости РАСА (Теоремы 3,4);

3. необходимые условия стабилизации последовательности оценок и получено выражение для границы стабилизации РАСА в нестационарном случае (Теорема 5).

4. Разработана динамическая модель системы управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети, в которой случайный дрейф производительности процессоров имеет бесконечную дисперсию, а в контур обратной связи включены РАСА. Применимость РАСА подтверждается полученными теоретическими границами на время обработки пакета заданий (Теоремы 6-8) и имитационным моделированием.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Теоретическая ценность диссертации состоит в ослаблении условий состоятельности и сильной состоятельности оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации с убывающим и фиксированным шагом в задачах стационарной и нестационарной стохастической оптимизации.

Практическая значимость работы заключается в том, что расширен круг задач, при решении которых обосновано применение РАСА. Разработанная модель распределения заданий в гетерогенной вычислительной сети может непосредственно использоваться при проектировании соответствующих систем. Полученные в диссертации условия состоятельности и границы стабилизации могут быть использованы при настройке инженерных систем, использующих РАСА, а также в педагогической практике.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных семинарах кафедр системного программирования и теоретической кибернетики СПбГУ, на Балтийских олимпиадах по автоматическому управлению в 2006 и 2008 гг. (в 2008 г. доклад был удостоен награды первой степени за теоретическую значимость), на научных конференциях: 5th WSEAS Conference on Automatic Control, Modeling and Simulation в 2006 г. (Прага, Чехия, доклад был удостоен премии за лучший студенческий доклад), Всерос. научн. конф. "Научный сервис в сети Интернет" (2006,2007,2009), 9th IFAC Workshop "Adaptation and Learning in Control and Signal Processing" (ALCOSP'07, Санкт-Петербург, 2007), XI конф. молодых ученых "Навигация и управление движением" (Санкт-Петербург, 2009), Первая традиционная всероссийская молодежная летняя школа "Управление, информация и оптимизация" (Переславль-Залесский, 2009), 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control (2009), Sixth Workshop on Simulation (Санкт-Петербург, 2009), VI Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых в СПбГУ ИТМО (Санкт-Петербург, 2009, диплом "За лучший доклад аспиранта на секции"), 6th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (Милан, Италия, 2009), 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference (Шанхай, Китай, 2009).

Результаты диссертации были частично использованы в работах по грантам РФФИ 05-07-90179-в, 09-04-00789-а и проектам "Система видеонаблюдения на основе стереозрения" и "Разработка рандомизированного подхода к проблемам поиска схожих участков изображений в задачах стереозрения и отслеживания движения", которые победили в конкурсах СТАРТ-08 в 2008 г. и "У.М.Н.И.К." в 2009 году.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–32], среди которых [1–3] — в научных журналах перечня ВАК.

Работы [1–4, 6–10, 14–21, 24–27, 30–32] написаны в соавторстве. Соискателю в них принадлежат формулировки и доказательства основных теорем, имитационное моделирование. В работах [1–4, 8–10, 30–32] О.Н. Граничину принадлежат общие постановки задач, в [1] С.С. Сысоеву — формулировка алгоритма для квантовых вычислений; в [2, 19, 20, 24, 30, 32] Л.С. Гуревичу — формулировки условий на нестационарность и теорема об оптимальном выборе размера шага, в [3, 14, 15, 28] М.А. Паньшенскову — анализ и реализация алгоритмов распределения загрузки вычислительных узлов и оценивания пропускной способности каналов данных, в [6, 7, 16–18, 21, 25–27] соавторам — постановки задач и обзоры подходов к их решению.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 136 наименований. Включает 11 рисунков, 3 таблицы. Общий объем работы — 103 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность тематики, излагаются цель и задачи исследования, основные результаты диссертационной работы, научная новизна, теоретическая ценность и практическая значимость.

В **первой главе** “Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации” вводятся основные понятия и определения, дается постановка задачи минимизации функционала среднего риска, описывается схема наблюдений, формулируются три алгоритма с рандомизированным пробным возмущением, исследуемые в диссертации, приводятся примеры задач со случайной неопределенностью с бесконечной дисперсией.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и дифференцируемую по первому аргументу функцию $F(x, w) : \mathbb{R}^q \times W \to \mathbb{R}$, где $W \subset \mathbb{R}^p$. Пусть в каждый момент времени $n = 1, 2, \ldots$ в выбираемых экспериментатором точках измерения $x_1, x_2, \ldots$ (план наблюдения) доступно наблюдению с аддитивной помехой v_n значение функции

$$y_n = F(x_n, w_n) + v_n,$$

где $w_n \in W$ — неконтролируемая последовательность независимых случайных векторов, имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $\mathrm{P}_w(\cdot)$. В диссертации рассматривается задача о построении по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots$ последовательности оценок $\{\widehat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора θ, минимизирующего функцию $f(x)$ типа функционала среднего риска:

$$f(x) = E\{F(x, w)|x\} \to \min . \qquad (1)$$

(Здесь и далее $E, E\{\cdot\}, E\{\cdot|\cdot\}$ — символы математического ожидания (МО) и условного МО).

Обычно исследуется случай $F(w, x) = f(x)$. Сделанное обобщение позволяет, например, учесть случай мультипликативной неопределенности: $F(x, w) = wf(x)$ и $Ew = 1$.

В зависимости от конкретных условий задачи, свойств функции F и неопределенностей w_n и v_n сходимость последовательности оценок понимается в смысле одного из следующих определений.

Определение 1. *Последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_n\}$ величины θ называется состоятельной, если $\forall \epsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\|\widehat{\theta}_n - \theta\| > \epsilon\} = 0$.*

Определение 2. *Последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_n\}$ величины θ называется сильно состоятельной, если сходимость оценок к θ выполняется с вероятностью единица $\widehat{\theta}_n \to \theta$ при $n \to \infty$.*

Наряду с (1) в диссертации рассматривается и нестационарная постановка задачи. Пусть задано семейство функций $\{F_\xi(x, w)\}_{\xi\in\Xi}$, дифференцируемых по первому аргументу, $x_1, x_2, \ldots$ — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \ldots$ доступно наблюдению с аддитивной помехой v_n значение функции $F_{\xi_n}(x_n, w_n)$

$$y_n = F_{\xi_n}(x_n, w_n) + v_n,$$

где ξ_n — неконтролируемая последовательность, $\xi_n \in \Xi$. Требуется по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots$ построить последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_n\}$ неизвестных векторов $\{\theta_n\}$, минимизирующих функции $f_n(x)$ типа функционала среднего риска:

$$f_n(x) = E\{F_{\xi_n}(x, w)|x\} \to \min . \qquad (2)$$

Задача (1) является частным случаем (2) при $\theta_n \equiv \theta$ и $\Xi = \{\xi_1\}$.

В диссертации установлены необходимые условия стабилизации последовательности оценок для нестационарной задачи оптимизации (2) в смысле следующего определения.

О п р е д е л е н и е 3. *Последовательность оценок* $\{\widehat{\theta}_n\}$ *имеет границу стабилизации* $L > 0$ *(стабилизируется) по отношению к последовательности* $\{\theta_n\} \subset \mathbb{R}^q$, *если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (E\|\widehat{\theta}_n - \theta_n\|_\rho^\rho)^{1/\rho} \le L.$$

(Здесь и далее $\|x - z\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^q |x^{(i)} - z^{(i)}|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$, $\forall x, z \in \mathbb{R}^q$ с компонентами $x^{(i)}, z^{(i)}, i = 1, \ldots, q$ и $\rho \in (1, 2]$).

Рандомизированными называют те алгоритмы оптимизации, которые опираются на некоторые контролируемые случайные величины, влияющие на результаты наблюдений, существующие в системе или добавляемые экспериментатором. Обычно рандомизация процесса наблюдений позволяет повысить скорость работы алгоритма оптимизации в случае большой размерности q и его устойчивость к помехам. Обозначим Δ_n пробное возмущение, $n = 1, 2, \ldots$ и $\mathrm{P}_{\Delta_n}(\cdot)$ — его распределение.

Пусть $\widehat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^q$ и задана последовательность $\{\Theta_n\}$ выпуклых множеств $\Theta_n \subset \mathbb{R}^q$, содержащих начиная с некоторого $N > 0$ точку/-и минимума/-ов функционала (1)/-ов (2). Например, $\{\Theta_n\}$ — последовательность расширяющихся до бесконечности шаров. В диссертации рассматриваются свойства оценок следующих трех алгоритмов типа случайного поиска, сформулированных в четвертом разделе:

$$\begin{cases} x_n = \widehat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ y_n = F(x_n, w_n) + v_n\ , \\ \\ \widehat{\theta}_n = \mathcal{P}_n(\widehat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_{2n} = \widehat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,\ x_{2n-1} = \widehat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \\ \widehat{\theta}_n = \mathcal{P}_n(\widehat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1})), \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_{2n} = \widehat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, \qquad x_{2n-1} = \widehat{\theta}_{n-1}, \\ \\ \widehat{\theta}_n = \mathcal{P}_n(\widehat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1})), \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathcal{P}_n$ — проекторы на Θ_n, причем для алгоритма (3) Θ_n — компакты, а $\mathcal{K}_n(\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ — некоторые вектор-функции (ядра), например, $\mathcal{K}_n(x) = x$.

В пятом разделе описаны две теоретические модели: высокооптимизированной толерантности и присоединения с предпочтением, — соответствующие ряду практически значимых задач со статистическими неопределенностями без конечного второго момента, но с конечным моментом степени $\rho \in (1, 2]$.

Во **второй главе** "Свойства последовательностей оценок РАСА" сформулированы необходимые условия состоятельности или стабилизируемости последовательностей оценок РАСА в зависимости от свойств функции F и неопределенностей w_n и v_n, приведены удовлетворяющие им примеры задач, доказаны теоремы о состоятельности и стабилизируемости в стационарном и нестационарном случаях.

(A) Сильная выпуклость $f(x)$ в точке минимума. Для $x, \theta \in \Theta_n$, существуют $\mu_n > 0$ такие, что

$$\langle \nabla f(x), \nabla \|x - \theta\|_\rho^\rho \rangle \geq \mu_n \|x - \theta\|_\rho^\rho.$$

(B) Ограниченность скорости изменения градиента $\nabla F(\cdot, w)$. $\exists M(w) > 0 : \forall x, y \in \Theta_n \ \|\nabla F(x, w) - \nabla F(y, w)\|_\rho \leq M(w)\|x - y\|_\rho^\gamma$, $E|M(w)|^t \leq \bar{M}_t < \infty$, где $0 < \gamma \leq 1$, $t = \rho - 1; \rho$.

(C) Условие перестановки операторов интегрирования и дифференцирования для $F(x, w)$ и $\nabla F(x, w)$.
$\forall x, \exists$ окрестность $U_x : \forall x' \in U_x \ |F(x', w)| + \|\nabla F(x, w)\|_\rho \leq \Phi_x(w)$, где $\Phi_x(w) : W \to \mathbb{R}$ и $\int_W \Phi_x(w) \mathrm{P}_w(dw) < \infty$.

(D) Ограниченность моментов $F(x, w)$ и $\|\nabla F(x, w)\|_\rho$ в точке минимума. $E|F(\theta, w)|^\rho + \|\nabla_x F(\theta, w)\|_\rho^\rho < \infty$.

(E) Ограниченность колебаний функции F в последовательные моменты времени. При разных значениях w для всех $x \in \Theta_n$ изменение функции $F(x, \cdot)$ в моменты времени n и $n+1$ ограничено с вероятностью 1 следующим образом:

$$|F_{\xi_n}(x, w_n) - F_{\xi_{n-1}}(x, w_{n-1})| \leq U_n^{(1)}(w_n, w_{n-1})\|x - \theta_n\|_\rho + U_n^{(2)}(w_n, w_{n-1}),$$

где функции $U_n^{(s)}(w_n, w_{n-1})$, $s = 1, 2$ имеют равномерно ограниченные моменты степени t $U_{n,t}^{(s)}$, $t = 1, \rho - 1, \rho$, $s = 1, 2$ соответственно.

(F) Ограниченность дрейфа точек минимума: $\|\theta_n - \theta_{n-1}\|_\rho \leq A$, либо при случайной природе дрейфа $\{w_n\}$ не зависит от $\{\xi_n\}$ и

$$\|E\{\theta_n - \theta_{n-1}\}\|_\rho \leq A, E\|\theta_n - \theta_{n-1}\|_\rho^t \leq A_t, \ t = \rho - 1; \rho.$$

(G) Условия на помеху наблюдения v_n**.** $|\zeta_n| \le \sigma_{v,n}$, где $\zeta_n = v_n$ для алгоритма (3) или $\zeta_n = v_{2n} - v_{2n-1}$ для (4)-(5). При случайной природе, ζ_n не зависит от Δ_n и $E|\zeta_n| \le \sigma_{v,n}$, $E|\zeta_n|^\rho \le \sigma_{v,n}^\rho$.

Заметим, что v_n м.б. зависимы либо неслучайны и ограничены.

(H) Условия на пробное рандомизированное возмущение. $\forall n \in \mathbb{N}$ случайные величины Δ_n независимы с σ-алгеброй $\mathcal{F}_n$, порожденной случайными величинами $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}, \widehat{\theta}_0, \ldots, \widehat{\theta}_{n-1}, w_1, \ldots, w_{mn}$, ($m = 1$ для алгоритма (3), $m = 2$ для (4)-(5)) и $\xi_1, \ldots, \xi_{mn}$, если рассматривается нестационарная постановка задачи и дрейф случайный. Для распределений $\mathrm{P}_{\Delta_n}(\cdot)$ и вектор-функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ выполняются условия симметричности $\int \mathcal{K}_n(x)\mathrm{P}_{\Delta_n}(dx) = 0$, взаимной независимости компонент $\int \mathcal{K}_n(x)^{(i)} x^{(j)} \mathrm{P}_{\Delta_n}(dx) = 0$ при $i \ne j$ и 1 при $i = j$, ограниченности $\sup_n \int \|\mathcal{K}_n(x)\|_\rho^a \|x\|_\rho^b \|x\|_{\frac{\rho}{\rho-1}}^c \mathrm{P}_{\Delta_n}(dx) < \infty$ для $a = 1; \rho$, b и $c = 0; 1; \rho - 1; \rho$.

(I) Условия на размеры шагов алгоритмов. $\alpha_n, \beta_n \ge 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n = \infty, \alpha_n + \beta_n + \alpha_n \mu_n + \frac{E\psi_n}{\mu_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \psi_n = \frac{\beta_n^{\rho\gamma}}{\mu_n^{\rho-1}} + \frac{\alpha_n^{\rho-1}(|\zeta_n|^\rho + d_n)}{\beta_n^\rho},$$

$d_n = 1 + \mathrm{diam}_\rho(\Theta_n)^{\gamma\rho}$ для (3) или $d_n = U_{2n,\rho}^{(1)} + U_{2n,\rho}^{(2)}$ для (4) и (5).

Далее во втором разделе приводятся примеры задач, удовлетворяющих условиям **(A)-(H)**.

В разделе 2.3 диссертации сформулированы теоремы, описывающие поведение оценок алгоритмов (3)-(5) в стационарном случае.

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* **(A)** *для* $f(x)$, **(B)-(E)** *для* $F(x, w)$, *а также* **(G)-(I)**, **тогда** *оценки алгоритмов (3)-(5) являются состоятельными и* $E\|\hat{\theta}_n - \theta\|_\rho^\rho \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия Теоремы 1 и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E\{\psi_n | \widehat{\theta}_{n-1}, \Delta_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1}\} < \infty \text{ с вероятностью 1,}$$

тогда *оценки алгоритмов (3)-(5) являются сильно состоятельными.*

В четвертом разделе для характеристики скорости сходимости $\{\widehat{\theta}_n\}$ вводятся специальные последовательности

$$\eta_n = \frac{\phi_n}{\nu_n},\ p_n = \left(\frac{\eta_n}{\eta_{n+1}} - 1\right)\frac{1}{\nu_n},\ p_n' = \left(1 - \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n}\right)\frac{1}{\nu_{n+1}},$$

$\nu_n = \alpha_n\mu_n(1-\lambda) - \alpha_n^\rho K_n^\rho$, $\phi_n = \alpha_n^\rho L_n^\rho + \alpha_n \tilde{L}_n^\rho$, в которых $\lambda \in (0;1)$ — произвольная константа, а $K_n^\rho, L_n^\rho, \tilde{L}_n^\rho$ определяются из условий **(A)-(I)**.

Т е о р е м а 3. *Если выполнены условия Теоремы 1, а также для всех n выполнено неравенство $0 < \nu_n < 1$, и*

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_n \le \tilde{p} < 1$, **то** $E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|_\rho^\rho \le \frac{\eta_n}{1-\tilde{p}} + o(\eta_n)$;
2. $\forall n\ p_n \le \tilde{p} < 1$, **то** $E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|_\rho^\rho \le \eta_n(\frac{1}{1-\tilde{p}} + (\frac{E\|\hat{\theta}_0-\theta_0\|_\rho^\rho}{\eta_0} - \frac{1}{1-\tilde{p}})\prod_{i=0}^{n-1}(1-(1-\tilde{p})\nu_i))$;
3. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} p'_n \ge \tilde{p}' > 1$, **то** $E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|_\rho^\rho = O(\prod_{i=0}^{n-1}(1-\nu_i))$;
4. $\forall n\ p'_n \ge \tilde{p}' > 1$, **то** $E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|_\rho^\rho \le (E\|\hat{\theta}_0 - \theta_0\|_\rho^\rho + \frac{\eta_0}{\tilde{p}'-1})\prod_{i=0}^{n-1}(1-\nu_i)$.

Пусть $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0, \bar{\mu}, \bar{d} \ge 0$,

$$\alpha_n \sim \alpha n^{-\bar{\alpha}},\ \beta_n \sim \beta n^{-\bar{\beta}}, \mu_n \sim \mu n^{-\bar{\mu}}, \sigma_{v,n}^\rho \sim \sigma n^{\bar{\nu}\rho}, \mathrm{diam}_\rho(\Theta_n) \sim dn^{\bar{d}} \quad (6)$$

и обозначим $\kappa = \min\{\rho(\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\nu}), \rho(\bar{\alpha} - \bar{d}\gamma), \bar{\alpha} + \bar{\beta}\rho\gamma - \mu(\rho-1)\}$ для алгоритма (3) или $\kappa = \min\{\rho(\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\nu}), \bar{\alpha} + \bar{\beta}\rho\gamma - \bar{\mu}(\rho-1)\}$ для (4),(5).

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 1 и (6).*
1. Если $\bar{\alpha} + \bar{\mu} = 1$, **тогда**
$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{\kappa-1}{\rho}}(E\|\widehat{\theta}_n - \theta\|_\rho^\rho)^{\frac{1}{\rho}} < \infty$, *при* $\alpha\mu(1-\lambda) > \kappa - 1$,
$\lim\limits_{n\to\infty} E\frac{n^{-\alpha M(1-\lambda)}}{\ln n}\|\widehat{\theta}_n - \theta\|_\rho^\rho < \infty$, *при* $\alpha\mu(1-\lambda) = \kappa - 1$,
$\lim\limits_{n\to\infty} En^{-\alpha\mu(1-\lambda)}\|\widehat{\theta}_n - \theta\|_\rho^\rho < \infty$, *при* $\alpha\mu(1-\lambda) < \kappa - 1$.
2. Если же $\bar{\alpha} + \bar{\mu} < 1$, **то** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{\kappa-\bar{\alpha}-\bar{\mu}}{\rho}}(E\|\widehat{\theta}_n - \theta\|_\rho^\rho)^{\frac{1}{\rho}} < \infty$.

В пятом разделе сформулирована теорема о стабилизации оценок в нестационарном случае.

Т е о р е м а 5. *Пусть $\mu_n = \mu > 0$, размеры шагов постоянны: $\alpha_n \equiv \alpha$, $\beta_n \equiv \beta$, и равномерно по n выполнены условия* **(A)** *для $f_n(x)$,* **(B)-(E)** *для $F_{\xi_n}(x, w_n)$,* **(F)** *для дрейфа минимума,* **(G)** *для аддитивных помех наблюдения,* **(H)** *для рандомизированного возмущения.*
Если $\exists\lambda > 0:\ K = (1 + mA(\rho-1)\lambda)(1-\alpha c_1) + \alpha\lambda c_2 + \alpha^\rho c_3 \in (0,1)$, **то**

$$E\|\widehat{\theta}_n - \theta_{mn}\|_\rho^\rho \le K^n E\|\widehat{\theta}_0 - \theta_0\|_\rho^\rho + (1-K^n)\frac{L}{1-K},$$

где $L = c_4 + \alpha c_5 + \alpha^\rho(c_6 + c_7\sigma_v^\rho)$, $c_1, \ldots, c_7$ *— константы определяемые по условиям* **(A)-(I)**, *и последовательность оценок* $\{\widehat{\theta}_n\}$ *имеет границу стабилизации, равную* $\bar{L} = \frac{L}{1-K}$.

В шестом разделе приведены доказательства Теорем 1–5, при этом Теоремы 1 и 5 вызвали наибольшие трудности при доказательстве.

В **третьей главе** "Система управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети" описывается модель системы распределения заданий для параллельных вычислений с обратной связью, основанной на оценивании производительностей вычислительных узлов.

В первом разделе сформулирована постановка задачи управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети. Пусть в системе имеется q узлов. Шаг работы системы заключается в обработке пакета заданий известного размера r_n. Предположим, что весь пакет может быть произвольным образом разделен на q заданий для узлов, при этом узел i получает задание размером $u_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $\sum_{i=1}^q u_n^{(i)} = r_n$. Время вычисления для узла i определяется по формуле $t_n^{(i)}(u_n^{(i)}) = \frac{u_n^{(i)}}{\theta_n^{(i)}}$, где $\theta_n^{(i)} \in \mathbb{R}$ — производительность узла i. Необходимо минимизировать по $u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(q)})^{\mathrm{T}}$ среднее время вычисления задания пакета r_n:

$$Z_n = \frac{T(u_n)}{r_n} = \max_{i=1,\ldots,q} \frac{t_n^{(i)}(u_n^{(i)})}{r_n} \to \min_{u_n}.$$

При введенных обозначениях, если производительности узлов известны и не меняются $\theta_n \equiv \theta$, тогда оптимальным является правило пропорционального распределения заданий (Теорема 6).

На практике производительности узлов могут быть искажены из-за сторонних заданий, т. е. $\theta_n = \theta + \bar{w}_n - w_n$, либо изменяться со временем: $\theta_n = \theta_{n-1} + \xi_n$, где $\xi_n, w_n \in \mathbb{R}^q$ – векторы независимых случайных величин, распределенных по Парето. В р. 3.2 диссертации обоснована целесообразность использовать контур обратной связи, в который включен РАСА для идентификации или отслеживания изменений θ_n.

Далее в разделе 3.3 формулируются Теоремы 7 и 8, оценивающие отклонение среднего времени на выполнение одного пакета заданий от оптимального при использовании РАСА в стационарной и нестационарной задаче. При этом в качестве наблюдений используются величины

$$y_n = \sum_{i=1}^q \left(\frac{u_n^{(i)}}{t_n^{(i)}} - \tilde{\theta}_n^{(i)} \right)^\rho,$$

которые в силу выбранной стратегии управления являются зашумленными измерениями функции $f_n(x) = \|\theta_n - x\|_\rho^\rho$. Доказательства Теорем 7 и 8 даны в последнем разделе.

В четвертом разделе приведены результаты имитационного моделирования, иллюстрирующие работоспособность модели и предложенных стратегий.

В **заключении** подводятся итоги диссертационного исследования и формулируются основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации:

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Сысоев С.С.* Точность оценивания рандомизированного алгоритма стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 86–96.

[2] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Гуревич Л.С.* Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 70–79.

[3] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Паньшенсков М.А.* Методы оценивания пропускной способности в распределенных системах // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2009. № 11. С. 45–53.

Другие публикации:

[4] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н.* Рандомизированные алгоритмы оценивания при нерегулярных помехах // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 2. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2006. — С. 3–37.

[5] *Вахитов А.Т.* Методы балансировки загрузки для многопроцессорных систем // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 2. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2006. — С. 159–166.

[6] *Вахитов А.Т., Граничина О.А.* Алгоритмы классификации за минимальное число шагов // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 2. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2006. — С. 167–175.

[7] *Лобанов А.Л., Кирейчук А.Г., Смирнов И.С., Граничин О.Н., Вахитов А.Т., Дианов М.Б.* К реализации идеального интерактивного определителя биологических объектов в интернете // Сб. тр. Всерос. научн. конф. “Научный сервис в сети Интернет” — Новороссийск. 2006. — С. 202–204.

[8] *Granichin O.N., Vakhitov A.T.* Accuracy for the SPSA algorithm with two measurements // WSEAS Transactions on Systems. – 2006. – Vol. 5. No. 5. – P. 953–957.

[9] *Granichin O.N., Vakhitov A.T.* SPSA-Based Adaptive control: accuracy of estimates // Proc. of 9th IFAC Workshop “Adaptation and Learning in Control and Signal Processing” (ALCOSP). — St. Petersburg. 2007. — P. 51.

[10] *Granichin O.N., Vakhitov A.T.* Architecture for artificial intelligence hybrid computing // Proc. of the 3rd Int. IEEE Scientific Conf. on Physics and Control. — Potsdam, Germany. 2007. — P.181.

[11] *Вахитов А.Т.* Адаптивное слияние результатов поиска изображений по содержанию // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3. — 2007. — С. 97–107.

[12] *Вахитов А.Т.* Балансировка Grid-вычислений методами стохастической оптимизации // Тр. II шк. “Управление большими системами”. – Воронеж. 2007. – С. 115–120.

[13] *Вахитов А.Т.* Оптимизация балансировки загрузки процессоров при паралелльном выполнении цикла // Тр. VI сем. “Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах”. — С.-Петербург. 2007. — С. 88–90.

[14] *Panshenskov M., Vakhitov A.* Adaptive scheduling of parallel computations for SPMD tasks // Proc. of Int. Conf. on Computational Science and Its Applications – ICCSA. — Kuala Lumpur, Malaysia. 2007. — P. 38–50.

[15] *Вахитов А. Т., Паньшенсков М. А.* Автоматизированные вычисления в Grid: адаптивная балансировка // Тр. конф. “Технологии Microsoft в теории и практике программирования”. — С.-Петербург. 2007. — С. 155.

[16] *Вахитов А.Т., Краснощеков В.Е.* Оптимизация выполнения заданий в GRID на основе адаптации // Тр. VI сем. “Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах”. – С.-Петербург. 2007. – С. 79–88.

[17] *Krasnotcshekov V., Vakhitov A.* Adaptive scheduling and resource assessment in GRID // Proc. of 9th Int. Conf. Parallel Computing Technologies. — Pereslavl-Zalessky, Russia. 2007. — P. 240–244.

[18] *Лобанов А.Л., Кирейчук А.Г., Вахитов А.Т., Граничин О.Н.* Алгоритмы построения вопросника минимальной длины для биологического определителя в Интернет и успехи в их реализации // Сб. тр. Всерос. научн. конф. “Научный сервис в сети Интернет” — Новороссийск. 2007. — С. 321–323.

[19] *Gurevich L.S., Vakhitov A.T.* SPSA algorithm for tracking // Proc. of 12th Int. Stud. Olymp. on Automatic Control (Baltic Olympiad). – St. Petersburg. 2008. – P. 52–57.

[20] *Вахитов А.Т., Гуревич Л.С.* Псевдоградиентный метод с возмущением на входе для нестационарной задачи безусловной оптимизации // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 4. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2008. — С. 36–47.

[21] *Вахитов А.Т., Гуревич Л.С., Павленко Д.В.* Обзор алгоритмов стереозрения // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 4. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2008. —- С. 151–169.

[22] *Вахитов А.Т.* Адаптивное оценивание параметров в параллельных многопользовательских вычислительных системах // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 4. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 2008. —- С. 139–150.

[23] *Вахитов А.Т.* Нестационарная стохастическая оптимизация рандомизированными алгоритмами в случае бесконечной дисперсии неопределенностей // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 5. — 2009. — С. 24–39.

[24] *Вахитов А.Т., Гуревич Л.С.* Метод стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе в задаче отслеживания минимума нестационарного функционала // Тр. XI конф. мол. уч. "Навигация и управление движением". — С.-Петербург. 2009. — Режим доступа: http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/kmu11/rrefs.html, свободный.

[25] *Вахитов А.Т., Вяххи Н.И., Петров А.Г.* Грид-вычисления в задаче Ant colony optimization: базовая архитектура приложения и адаптивное распределение заданий // Тр. конф. "Технологии Microsoft в теории и практике программирования". — Нижний Новгород. 2009. — С. 62–65.

[26] *Лобанов А.Л., Кирейчук А.Г., Вахитов А.Т., Граничин О.Н.* Параллельный алгоритм обучения для интерактивного политомического определителя биологических видов // Сб. тр. Всерос. научн. конф. "Научный сервис в сети Интернет." — Новороссийск. 2009. — С. 332–334.

[27] *Немнюгин С.А., Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Кияев В.И.* Об опыте деятельности лаборатории СПРИНТ СПбГУ по подготовке ИТ-специалистов в области высокопроизводительных вычислений // Сб. тр. Всерос. научн. конф. "Научный сервис в сети Интернет" — Новороссийск. 2009. — С. 440–443.

[28] *Panshenskov M., Vakhitov A.* Transfer speed estimation for adaptive scheduling in the data grid // Proc. of Grid and Pervasive Computing Conf. — Geneva, Switzerland. 2009. — P. 58–63.

[29] *Panshenskov M., Vakhitov A.* Methods of linear transfer speed estimation in the data grid // Proc. of 1st ACM workshop on Data grids for eScience, Conf. On Computing Frontiers. — Ischia, Italy. 2009. — P. 29–34.

[30] *Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A.* SPSA with a fixed gain for intelligent control in tracking applications // Proc. of IEEE Int. Symp. on Intelligent Control. — St. Petersburg. 2009. — P. 1415–1420.

[31] *Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A.* Minimum tracking with SPSA and applications to image registration // Proc. of 6th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics. — Milan, Italy. 2009. — P. 66–74.

[32] *Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A.* Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences // Proc. of 48th IEEE Conf. on Decision and Control. — Shanghai, P.R. China. 2009. — P. 5763–5767.