

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ПРОНИНА Юлия Григорьевна

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ФАКТОРОВ НА
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ОТВЕРСТИЯМИ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор ДАЛЬ Юрий Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ГЛЕЗЕР Александр Маркович
(Институт металловедения и физики металлов им. Г.В. Курдюмова ЦНИИчермет им. И.П. Бардина)

доктор физико-математических наук,
профессор НАРБУТ Михаил Александрович
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор физико-математических наук,
профессор ПАЛЬМОВ Владимир Александрович
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

Ведущая организация: Физико-технический институт имени
А.Ф. Иоффе РАН

Защита состоится «___» _____ 2010 г. в ___ часов на заседании совета Д212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Практическая значимость и актуальность темы. Общеизвестно, что разрушение начинается с поверхности — либо самого элемента конструкции, либо концентраторов напряжений, имеющих практически во всех деталях. Очагами разрушения являются многочисленные отверстия и включения, предусмотренные технологически или появляющиеся в процессе изготовления и эксплуатации. Значительная часть дефектов образуется на самой поверхности изделия или в приповерхностной зоне. Именно эта область повышенных напряжений наиболее опасна с точки зрения теории разрушения, а следовательно, требует наиболее тщательного изучения. Поэтому оценка влияния различных поверхностных факторов на напряженное состояние тел с отверстиями представляет большой практический интерес.

На сегодняшний день разработано множество программных комплексов для расчета на прочность различных конструкций, в том числе учитывающих агрессивное влияние окружающей среды. Активно разрабатываются и экспериментальные методы исследования таких проблем. Задачи, связанные с изучением поверхностных эффектов в твердых телах, являются многопараметрическими, что создает немалые трудности. Для выявления роли отдельных факторов в механическом поведении тел, а также для верификации многочисленных пакетов прикладных программ весьма полезно иметь аналитические решения некоторых, так называемых модельных, задач. Ведь, как отмечено в ^{1*}, «конечно-элементным решениям... нельзя доверять настолько, насколько можно доверять, например, решению Ламе для толстостенного полого цилиндра». Решения задач Ламе, кстати сказать, проходят красной нитью через всю работу, являясь частными или предельными случаями решений, полученных во всех ее разделах.

В первом приближении для оценки влияния приповерхностных мик-

¹ Ясницкий Л. Н. Удержаться «на плечах гигантов» (вместо предисловия) // Семинар «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2006–2007 : тр. / Под ред. А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2008. С. 3–15.

родефектов (включений другой фазы, в том числе микропор) на напряженное состояние приграничной области твердых тел их можно моделировать сосредоточенными воздействиями в упругой полуплоскости. Формулы для напряжений в полуплоскости со свободной границей, вызванных одиночными силами или моментами, были выведены ранее Е. Меланом и С. Гошем с использованием функции напряжений Эри, А.С. Стивенсоном — в терминах комплексных потенциалов. Несомненный интерес представляют решения и для других типов особых точек вблизи границы полуплоскости, причем как одиночных, так и периодических, при различных краевых условиях. Указанные соотношения имеют не только самостоятельное значение (моделирование зародышевых микронесплошностей или дислокационных образований), но также являются основой решения более сложных проблем, таких как оценка напряженного состояния в окрестности приграничных макродефектов типа краевых выемок или приповерхностных отверстий достаточно произвольной конфигурации. Решения для многосвязных тел, учитывающие помимо внешней нагрузки еще и внутренние сосредоточенные воздействия, ранее были получены лишь для некоторых частных случаев. Поэтому исследование данной проблемы в общем виде до сих пор оставалось актуальным.

Фундаментальную роль в механике разрушения играет также анализ формирования новых и развития имеющихся поверхностей в твердых телах, вызванных механической неустойчивостью материалов. В качестве одной из основных расчетных моделей для этих исследований использовалась толстостенная сфера под действием равномерного давления. Ряд соответствующих решений получен для гиперупругих материалов. Механическое поведение многих металлов и сплавов хорошо описывается соотношениями деформационной теории Девиса–Надаи. В указанных рамках общий вид интеграла уравнения равновесия сферы в текущей конфигурации был записан Р. Хиллом (аналогично решению А.А. Ильюшина для малых деформаций). После этого расчеты проводились в основном численными методами, за исключением лишь отдельных работ, например В. Твергарда с соавторами. Некоторые аспекты данной теории (в частности, вопросы зарождения и залечивания пор) остаются разработанными не до конца.

Изменение геометрии поверхности может быть вызвано и воздействием внешней среды, интенсивность которого часто зависит от механических напряжений. Согласно первым подсчетам убытков от коррозии, по Годфилду (Англия), за период с 1860 по 1920 гг. коррозией было разрушено 660 млн т металла, что составило 33 % от мировой продукции чугуна и железа за это же время. В настоящее время, по разным оценкам, финансовые потери от коррозии в ведущих странах составляют 4–10 % от национального дохода. Изучение коррозии элементов конструкций под напряжением проводилось многими учеными. Большая часть работ посвящена анализу экспериментальных данных. Теоретических исследований в этой области существенно меньше. Среди них особое место занимают труды Саратовской школы механиков под руководством И.Г. Овчинникова и В.В. Петрова, где разрабатываются различные модели коррозионных повреждений. Ввиду сложности проблемы значительное число расчетов с учетом механохимической коррозии производится численными методами. Исключение составляет относительно небольшое количество работ, среди которых отметим труды В.М. Долинского, М.С. Корнишина и В.Г. Карпунина, Э.М. Гутмана, ученых Саратовской школы, А.И. Русанова и их коллег. Как для фундаментальной, так и для прикладной науки интерес представляет обобщение решений задач Ламе о толстостенных цилиндре и сфере на случай равномерной механохимической коррозии в аналитическом виде.

Решению указанных проблем и посвящена настоящая работа. Более подробно актуальность темы и **научная новизна** исследований отражены в первой главе диссертации, где дан обзор научных трудов по соответствующим направлениям и кратко отмечены новые результаты, полученные автором.

Цель работы заключалась в построении аналитических и численно-аналитических решений задач, связанных с исследованием влияния различных поверхностных факторов на напряженно-деформированное состояние твердых тел вблизи их внешних и внутренних границ.

Ряд соответствующих **задач** ограничен изучением тел с преимущественно прямолинейной или круговой внешней границей:

- исследование влияния близости границы тела на распределение напряжений, порожденных микродефектами (моделируемыми в виде сосредоточенных воздействий в упругой полуплоскости);
- расчет напряжений вблизи поверхностных и приповерхностных микро- и макродефектов в виде зародышевых и развитых несплошностей (с использованием модельной задачи о точечных особенностях в упругой полуплоскости или полосе с краевыми выемками и отверстиями);
- анализ влияния гидростатического давления на зарождение, рост и уменьшение отверстий в твердых телах в пространственном случае (на примере задачи о толстостенной сфере в рамках деформационной теории Девиса–Надаи);
- прогнозирование долговечности тел с концентрическими отверстиями с учетом воздействия коррозионных сред (обобщение задач Ламе о толстостенных сфере и цилиндре с учетом равномерной механохимической коррозии).

При проведении указанных исследований автором были получены следующие **новые результаты, выносимые на защиту**:

- объяснение парадокса, связанного с разницей в результатах предельных переходов в задаче о плоском центре расширения–сжатия;
- аналитические решения задач о сосредоточенных воздействиях в упругой полуплоскости со свободной и жестко закрепленной границей;
- вывод граничных интегральных уравнений для задач о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с произвольными краевыми выемками и отверстиями;
- численно-аналитический метод оценки напряжений, вызванных сосредоточенными воздействиями в упругой полуплоскости с краевыми выемками и отверстиями;
- аналитическое решение нелинейной задачи о толстостенной сфере под действием гидростатического давления; доказательство возможности порообразования в твердых телах при конечном значении внешней нагрузки

ки в рамках деформационной теории Девиса–Надаи;

- метод приведения одного класса задач о равномерном коррозионно-механическом износе упругих тел к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- аналитические решения некоторых задач о механохимической коррозии толстостенных цилиндров и сфер под действием внешних усилий и температуры;
- способ многокритериальной оценки долговечности тел в условиях коррозии под напряжением.

Достоверность полученных результатов. Во-первых, при постановке задач в работе использованы только общепризнанные модели для описания механических и физико-химических характеристик исследуемых тел. Во-вторых, аналитические решения проверены их непосредственной подстановкой в исходные системы уравнений, а также в граничные и начальные условия. В-третьих, все решения согласуются с имеющимися в научной литературе решениями родственных задач. В-четвертых, полученные результаты подтверждаются известными экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались в Санкт-Петербургском государственном университете на семинарах кафедр теории упругости, теоретической и прикладной механики (мат.-мех. факультет); на семинарах в Институте Проблем Машиноведения РАН (С.-Петербург, 1994, 1995, 2010); на XXX Межреспубликанском семинаре «Актуальные проблемы прочности» (Новгород, 1994), на Всероссийской научно-технической конференции «Новожиловские чтения» (С.-Петербург, 1998), на XXXV Международном семинаре «Актуальные проблемы прочности» (Псков, 1999), на Северо-Западных региональных конференциях научной школы В.В. Новожилова «Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела» (С.-Петербург, 1998, 2004, 2005), на XV Петербургских чтениях по проблемам прочности (С.-Петербург, 2005), на Международной конференции «Устойчивость

и процессы управления» (С.-Петербург, 2005), на XLIV Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Вологда, 2005), на XVI Петербургских чтениях по проблемам прочности (С.-Петербург, 2006), на XVI Международной конференции «Физика прочности и пластичности материалов» (Самара, 2006), на Международной научно-технической конференции «Математические модели и алгоритмы для имитации физических процессов» (Таганрог, 2006), на XLV Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Белгород, 2006), на XLVI Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Витебск, Беларусь, 2007), на Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» — RELMAS'2008 (С.-Петербург, 2008), на XLVII Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Нижний Новгород, 2008), на Международной научной конференции по механике «Пятое Поляховские чтения» (С.-Петербург, 2009), на летней международной школе-семинаре «Актуальные проблемы механики» — XXXVII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» — APM'2009 (Repino, Saint-Petersburg, Russia, 2009), на международной конференции Европейского общества механиков по механике деформируемого твердого тела — the 7th Euromech Solid Mechanics Conference — ESMC2009 (Lisbon, Portugal, 2009), на всероссийской конференции «Прикладные аспекты механики сплошной среды в кораблестроении», посвященной столетию со дня рождения акад. В.В. Новожилова (С.-Петербург, 2010), на XLIX Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Киев, Украина, 2010), на Всероссийской конференции «Устойчивость и процессы управления» (С.-Петербург, 2010).

Публикация результатов работы. Основные результаты изложены в 26 научных работах, опубликованных в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях, а также в трудах международных конференций. Статьи [1–12] входят в список журналов, рекомендованных ВАК (на момент выпуска) для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук по механике. В

работах [1, 2], выполненных под руководством Ю.М. Даля, соавтору принадлежат постановка и метод решения задач, а также решение для одиночной силы и момента; автором проведены все аналитические и численные расчеты; решения для силы и момента автором и соавтором получены несколько различными путями. В статьях [3, 14], написанных в соавторстве с Ю.М. Далем, соавтору принадлежат постановка более узкой задачи и построение интеграла уравнения равновесия в отсчетной конфигурации; автору принадлежит общая постановка и решение задачи, проведение численных экспериментов. В работе [13], выполненной совместно с Ю.М. Далем и С.Ю. Веселковым, автором подготовлена первая глава (стр. 3–59), в которой Ю.М. Далю принадлежат постановка и методы решения задач, решение для одиночной силы и момента (несколько иным способом); автором проведены все аналитические и численные расчеты; С.Ю. Веселковым под руководством Ю.М. Даля написана вторая глава (стр. 60–85). В статье [15] автору принадлежат постановка и решение задачи; М.В. Дворядкиной — дублирование всех выкладок, численные расчеты и построение графика в примере. В статье [16] автору принадлежат постановка и решение задачи; Э.Г. Петранову — дублирование всех выкладок для проверки правильности решения. В статье [23], написанной в соавторстве с Т.С. Чиковой, автору принадлежат постановка и решение задачи; соавтору — проверка корректности и изложение результатов. Работа [24] выполнена совместно с Е.О. Чистяковой; автору принадлежат постановка и метод решения задачи, а также вывод основных соотношений; соавтору принадлежит проведение численных расчетов и построение графика в примере.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, разделенных на 42 параграфа, заключения, списка литературы, содержащего 361 наименование, и приложения. Общий объем работы (с приложением) составляет 361 страницу, включая 95 рисунков и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении отражены актуальность темы и практическая значимость проведенных исследований, сформулированы цель и задачи работы, изложены основные результаты, выносимые на защиту, приведены сведения об апробации работы, представлено ее краткое содержание.

В главе 1 дан обзор научной литературы по теме диссертации, а также более подробно отмечены актуальность и научная новизна проведенных исследований.

Для оценки напряжений в окрестности дефектов, расположенных у прямолинейной границы упругих тел, в первом приближении допустимо использовать в качестве расчетной модели упругую полуплоскость с соответствующими несплошностями. Зародышевые микродефекты правомерно моделировать сосредоточенными воздействиями. Влияние близости прямолинейной границы и краевых условий на распределение напряжений, порожденных этими особенностями, изучено в главах 2–4.

Глава 2 посвящена решениям плоской задачи классической теории упругости о силах вблизи прямолинейной границы полуплоскости. В § 2.1 приведены основные используемые далее соотношения этой теории в терминах Н.И. Мусхелишвили.

В § 2.2 представлено аналитическое решение задачи о сосредоточенной силе $\mathbf{P} = X + iY$, приложенной в точке z_0 упругой полуплоскости $S^- (y \leq 0)$ со свободной границей. Комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили построены с помощью суперпозиции решений двух задач: первой — о бесконечной плоскости, загруженной двумя сосредоточенными силами симметрично относительно оси абсцисс, и второй — о полуплоскости, на кромке которой действуют усилия, равные по величине и противоположные по знаку тем, которые возникают на оси абсцисс в задаче 1 (рис. 1). Аналогичная схема построения решения применялась и ранее, однако Ю.М. Даль в [1] предложил совместить ее с использованием аппарата

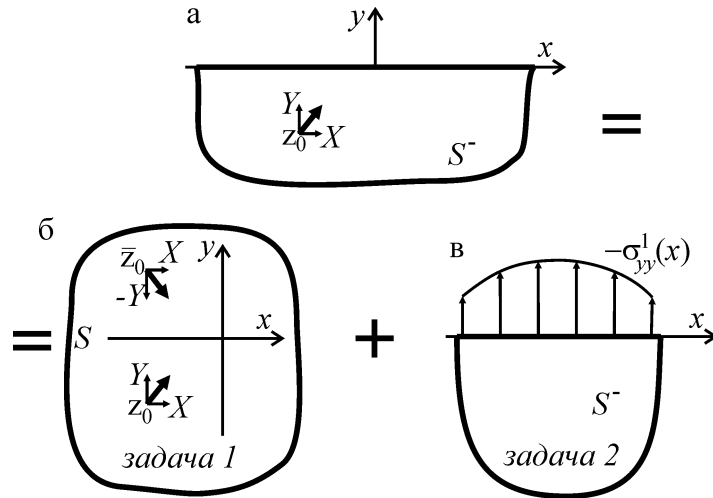


Рис. 1. Схема решения задачи о силе у свободной границы полуплоскости интегралов типа Коши, что сделало решение нагляднее, проще и элегантнее. Выведенные решения показали, что точка z_0 является полюсом первого порядка для функций распределения напряжений и что перемещения на бесконечности обладают логарифмической особенностью (как и в решении задачи Фламана). Последнее замечание относится только к решениям для полуплоскости со свободной границей при ненулевом главном векторе сил (поэтому выражения для двойных сил не имеют такой особенности).

В § 2.3 функции Колосова для силы в упругой полуплоскости с жестко закрепленной границей выведены с помощью суперпозиции решения, построенного в § 2.2, и решения второй основной задачи для полуплоскости (этот же результат был достигнут и методом, изложенным в § 4.8).

С помощью полученных решений было исследовано влияние близости границы и условий ее закрепления на распределение напряжений в окрестности приложенных воздействий. Максимальный рост напряжений (по сравнению с напряжениями в бесконечной плоскости) вызывает наличие свободной границы, перпендикулярной направлению действия силы. Максимальные нормальные напряжения σ_{xx} в точках границы при этом возрастают на порядок:

$$\frac{\max |\sigma_{xx}(x)|}{\max |\sigma_{xx}^I(x)|} = \frac{|\sigma_{xx}(x_0)|}{|\sigma_{xx}^I(x_0)|} = 4 \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{xx}^I(x)$ — напряжение вдоль оси абсцисс в бесконечной плоскости,

вызванное такой же силой. Закрепленная граница приводит к менее заметному перераспределению напряжений: там максимальным по абсолютной величине является напряжение $\sigma_{yy}(x)$ (обратное по знаку напряжению $\sigma_{xx}(x)$ вдоль свободной кромки) и

$$\frac{\max |\sigma_{yy}(x)|}{\max |\sigma_{yy}^I(x)|} = \frac{2(\varkappa + 1)^2}{\varkappa(\varkappa + 3)},$$

где $\sigma_{yy}^I(x)$ — напряжение на оси абсцисс в бесконечной плоскости.

Все выведенные соотношения для одиночных сил с помощью формул суммирования рядов распространены на случай периодических сил вдоль свободной (§ 2.4) или закрепленной (§ 2.5) кромки полуплоскости. Формулы для периодических сил вдоль закрепленной кромки для контроля правильности результатов были также получены с помощью схем суперпозиции из § 2.3, примененных к задачам о периодических воздействиях в бесконечной или полубесконечной плоскостях. Исследование построенных решений показало, что на некоторых направлениях зависимость напряжений, порожденных периодическими силами, от периода системы сил не всегда монотонна. Пример такой зависимости приведен на рис. 2. В работе

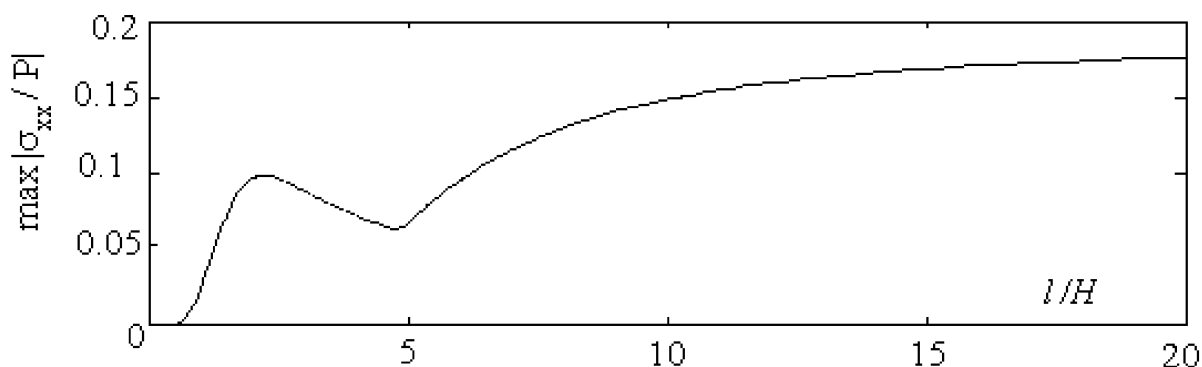


Рис. 2. Зависимость $\max |\sigma_{xx}(x)/P|$ от периода l/H для сил $\mathbf{P} = X$, приложенных в точках $z_k = -iH \pm kl$

установлено, что это явление объясняется наложением зон экстремальных напряжений, порожденных соседними источниками, образно говоря, «статической» или «графической» интерференцией.

Далее, в § 2.6, приведены интегральные представления функций Колосова для сил, распределенных по кусочно-гладким кривым внутри полуплоскости. Изложен способ приближенного вычисления комплексных потенциалов для произвольных кривых. В § 2.7 выписаны комплексные потенциалы для периодической задачи о распределенных усилиях.

Обобщение решений на случай заданных на границе ненулевых усилий или перемещений, а также напряжений на бесконечности дано в § 2.8.

Глава 3 посвящена двойным силам в упругой полуплоскости. Эти особенности вводятся в § 3.1, согласно А. Ляву, следующим образом. Сложив решения для двух взаимно противоположных сил одинаковой величины P в бесконечной плоскости, а затем перейдя к пределу при стремлении расстояния $2R$ между точками их приложения к нулю, так чтобы произведение $2PR$ оставалось постоянным, получаем решение, соответствующее двойной силе. Если указанные силы направлены перпендикулярно линии их приложения, то приходим к двойной силе с моментом (пара $\mathbf{C} = Ce^{i\alpha} : -2PR = C$); если силы направлены вдоль линии их приложения, то выведенная особенность соответствует двойной силе без момента (диполь $\mathbf{D} = De^{i\alpha} : 2PR = D$) — рис. 3.

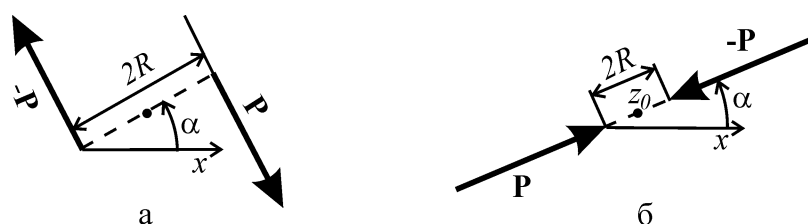


Рис. 3. Двойная сила с моментом (а) и без него (б)

Аналитические решения для одиночных и периодических двойных сил с моментом в полуплоскости со свободной и закрепленной границей представлены в § 3.2–3.5. Аналогичные результаты для диполей без момента приведены в § 3.6–3.9. Все решения получены как с помощью схем, использованных в главе 2 (на основе решений для двойной силы в бесконечной плоскости), так и путем суперпозиции, с последующим предельным переходом, соответствующих решений для взаимно противоположных сосредоточенных сил в полуплоскости с идентичными условиями закрепле-

ния границы. Точки приложения двойных сил являются полюсами второго порядка для функций Колосова. Для пары $\mathbf{C} = Ce^{i\alpha}$ в точке z_0 полуплоскости со свободной границей эти потенциалы имеют вид

$$\Phi(z) = \frac{-Ci}{2\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{e^{2i\alpha}}{(z - z_0)^2} + \frac{-e^{-2i\alpha} + \kappa + 1}{(z - \bar{z}_0)^2} - \frac{2e^{-2i\alpha}(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^3} \right], \quad (2)$$

$$\Psi(z) = \frac{-Ci}{2\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{\kappa + 1}{(z - z_0)^2} + \frac{\kappa + 1}{(z - \bar{z}_0)^2} + \frac{2\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{(z - z_0)^3} - \frac{2e^{-2i\alpha}[3(\bar{z}_0 - z_0) + z_0]}{(z - \bar{z}_0)^3} + \frac{2\bar{z}_0(\kappa + 1)}{(z - \bar{z}_0)^3} - \frac{6e^{-2i\alpha}\bar{z}_0(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^4} \right]$$

и для диполя $\mathbf{D} = De^{i\alpha}$ —

$$\Phi(z) = \frac{D}{2\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{e^{2i\alpha}}{(z - z_0)^2} + \frac{e^{-2i\alpha} + (\kappa - 1)}{(z - \bar{z}_0)^2} + \frac{2e^{-2i\alpha}(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^3} \right],$$

$$\Psi(z) = \frac{-D}{2\pi(\kappa + 1)} \left[\frac{\kappa - 1}{(z - z_0)^2} - \frac{\kappa - 1}{(z - \bar{z}_0)^2} - \frac{2\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{(z - z_0)^3} - \frac{2e^{-2i\alpha}[3(\bar{z}_0 - z_0) + z_0]}{(z - \bar{z}_0)^3} - \frac{2\bar{z}_0(\kappa - 1)}{(z - \bar{z}_0)^3} - \frac{6e^{-2i\alpha}\bar{z}_0(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^4} \right]. \quad (3)$$

В точках свободной границы полуплоскости напряжения $\sigma_{xx}(x)$, вызванные действием двойной силы, на порядок превышают аналогичные величины в бесконечной плоскости. При этом для диполей без момента справедливо отношение (1) (хотя сами напряжения $\sigma_{xx}(x)$ для диполей и одиночных сил различны). В соответствующих решениях для двойных сил с моментом влияние постоянной материала κ не столь сильное. На закрепленной кромке напряжения по абсолютной величине занимают промежуточное положение между напряжениями вдоль свободной границы и соответствующими величинами в бесконечной плоскости. Таким образом, закрепление свободной кромки пластины приводит к повышению прочности ее границы в несколько раз.

В задачах для периодических диполей, как и в главе 2, на некоторых направлениях наблюдалось немонотонное стремление компонент напряжений при увеличении периода l к аналогичным величинам в полуплоскости

с одним диполем. Если для одиночных сил и для двойных сил с моментом на указанных зависимостях для $\max |\sigma_{xx}(x)|$ присутствуют локальные или незначительные абсолютные экстремумы, то для диполей без момента на соответствующих кривых существуют абсолютные экстремумы, вдвое превышающие напряжения $\max |\sigma_{xx}(x)|$ при $l \rightarrow \infty$ (хотя последние относительно невелики). И локальные, и абсолютные экстремумы для диполей на зависимостях $\max |\sigma_{xx}(x)|$ от l/H (где $H = |y_0|$) достигаются в промежутке $l/H \in [1.7; 3]$. Максимальный рост напряжений вдоль границы (почти вдвое) для диполей **D** происходит при слиянии областей экстремальных напряжений одного знака, когда $l/H \in [1.8; 2.1]$. Поэтому для снижения напряжений вдоль границы пластины с подобными концентраторами напряжений следует по-возможности избегать отношения $l/H \approx 2$.

В главе 4 рассмотрены комбинации двойных сил: сосредоточенные моменты M и центры расширения–сжатия Q . В § 4.1 исследованы различные предельные переходы, с помощью которых они вводятся. Комплексные потенциалы для сосредоточенного момента выведены тремя способами: (I) суперпозицией решений для четырех попарно перпендикулярных сил с моментом с последующим предельным переходом при $R \rightarrow 0$ и $-4PR = M$ [схема А. Лява], (II) путем осреднения по углу α решения для одной двойной силы с моментом при $2C = M$ [предложено Ю.М. Далем], (III) с помощью решения о бесконечной плоскости с круговым отверстием радиусом R под действием равномерной касательной нагрузки T при стремлении $R \rightarrow 0$, так чтобы $-T2\pi R^2 = M$ оставалось постоянным [вывод Н.И. Мухелишвили]. Решения, выведенные всеми способами, схематически изображенными на рис. 4, совпали.

Построение функций Колосова для центра сжатия с помощью аналогичных предельных переходов, согласно рис. 5, привело к различным результатам, несмотря на то что исходные задачи отличаются лишь направлением действия сил. С помощью расчетов с использованием аппарата интегралов Коши показано, что этот факт объясняется физической интерпретацией рассматриваемых воздействий. Решения, полученные первыми двумя способами (рис. 5 а, б), соответствуют нагрузке, приложенной

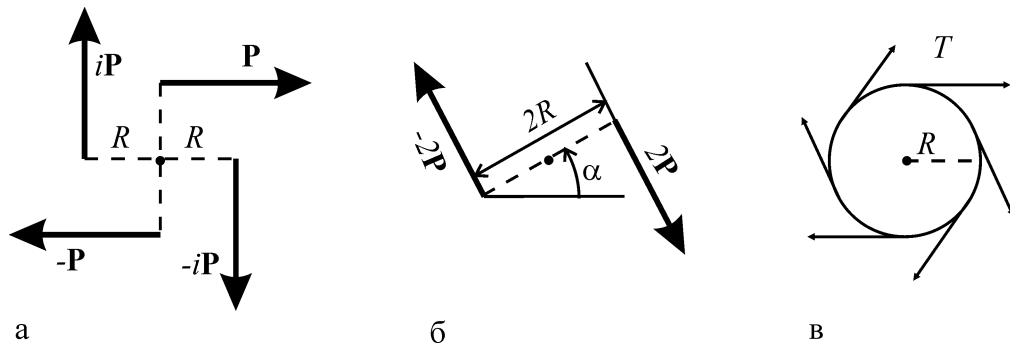


Рис. 4. Определение сосредоточенного момента

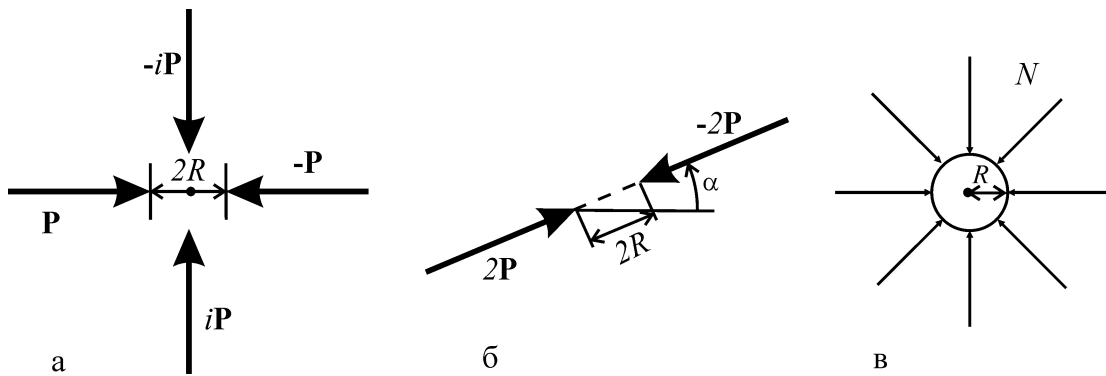


Рис. 5. Определение центра сжатия

в сплошной плоскости ($Q^* = 4PR$). Решение для центра сжатия Q , выведенное третьим способом (рис. 5 в), можно интерпретировать как микропору радиусом R под давлением $-p$. Причем, если плоскость находится под действием всестороннего растяжения–сжатия интенсивности q , то $-Q = (p - q)2\pi R^2$. Связь между этими особенностями $Q^* \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} = Q$ подтверждается законом сохранения энергии. Механическая трактовка также раскрывает причины различий между одной двойной силой с моментом и сосредоточенным моментом (которые отождествлялись некоторыми авторами).

Далее построены аналитические решения для одиночных, периодических и распределенных моментов (§ 4.2–4.6) и центров расширения–сжатия (§ 4.7–4.11) в полуплоскости со свободной или фиксированной границей. Они выведены несколькими способами: по схемам второй и третьей глав, а также с помощью суперпозиции соответствующих решений для взаимно перпендикулярных двойных сил, полученных в третьей главе (подробно

алгоритмы изложены на примере разных задач). Например, сложив выражения (2)–(3) для $\alpha = 0$ с этими же выражениями для $\alpha = \pi/2$, получаем решения для сосредоточенного момента [при $2C = M$]

$$\Phi(z) = -\frac{Mi}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad \Psi(z) = -\frac{Mi}{2\pi} \left[\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{z + \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^3} \right],$$

и центра расширения–сжатия, интерпретируемого как микропора [при $2D(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1) = Q^*(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1) = Q$],

$$\Phi(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad \Psi(z) = \frac{-Q}{2\pi} \left[\frac{1}{(z - z_0)^2} - \frac{z + \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^3} \right]$$

в полуплоскости со свободной границей. Точки приложения этих особенностей являются полюсами второго порядка для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

Найденные решения показали, что напряжения вдоль свободной границы полуплоскости, порожденные сосредоточенными моментами и центрами расширения–сжатия Q , ровно в четыре раза превосходят аналогичные величины $\sigma_{xx}(x)$ в бесконечной плоскости, независимо от упругих постоянных материала. Для периодических нагрузок также выявлена немонотонная зависимость напряжений вдоль некоторых направлений от периода системы. В заключение, в § 4.11, продемонстрировано, что решение задачи Фламана может быть получено путем суперпозиции плоских аналогов фундаментальных решений первого и второго типа (как это сделано Ж.В. Буссинеском в трехмерном случае).

В главе 5 на основе полученных в главах 2–4 решений для точечных особенностей исследовано напряженно-деформированное состояние полуплоскости с приповерхностными макродефектами в виде краевых выемок и отверстий. В § 5.1 обсуждаются возможности использования сингулярных решений для моделирования отверстий. В частности отмечено, что в случае осевой симметрии задачи выражения для момента и центра расширения–сжатия служат ядрами решений о телах с отверстиями любых размеров. В то же время вблизи прямолинейной границы центр расширения может моделировать пору под действием давления с точностью до 10 %, если ее радиус не превосходит 0.3 расстояния от центра отверстия до внешней поверхности тела.

В § 5.2 рассмотрена упругая полуплоскость с отверстиями и краевыми выемками, нагруженная не только усилиями на бесконечности и на своей сложной границе, но также сосредоточенными воздействиями во внутренних точках. Решение построено с помощью суперпозиции краевых задач для полуплоскости в виде комплексных потенциалов, автоматически удовлетворяющих краевым условиям на прямолинейной границе и на бесконечности. Непрямым методом выведены граничные интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Плотность полученных интегральных уравнений представляет собой скачок напряжений на линиях, соответствующих контурам вырезов. Способы их решения не обсуждаются (один из вариантов приближенного вычисления соответствующих интегралов приведен в § 2.6). Однако предложен численно-аналитический метод, позволяющий миновать стадию формирования интегральных уравнений и непосредственно свести задачу к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений с помощью введения фиктивных сосредоточенных воздействий. Указанные силы располагаются вдоль контуров вырезов вне тела (если на контуре нет угловых точек и нагрузка на нем непрерывна) и находятся далее методом коллокаций. Анализ решений о периодических сосредоточенных воздействиях (полученных в главах 2–4) и численные эксперименты показали, что для уменьшения погрешности результатов интервал между точками приложения фиктивных сил должен быть не больше половины расстояния от этих точек до контура выреза.

В § 5.3 выведены разрешающие уравнения для нескольких систем периодических нагрузок в полуплоскости с вырезами. § 5.4 содержит распространение полученных результатов на случай полностью периодической задачи (когда периоды рядов отверстий и систем усилий одинаковы). В § 5.5 дано обобщение предложенного метода для тел конечных размеров (например, полосы).

На некоторых примерах исследовано влияние заданных усилий и геометрических характеристик задачи (относительных расстояний между границами и кривизны границ) на распределение напряжений в окрестности внешних и внутренних границ.

В главе 6 воздействие внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние в окрестности отверстий исследовано в пространственном случае при условии центральной симметрии, в рамках деформационной теории Девиса–Надаи. Основные соотношения этой теории (которую можно рассматривать как экстраполяцию деформационной теории пластичности или теории течения на область больших логарифмических деформаций) приведены в § 6.1.

В § 6.2 построено решение задачи о толстостенной сфере под действием равномерной нагрузки q_r на ее внутренней поверхности (радиусом r) и q_R — на внешней поверхности (радиусом R). Найдены компоненты напряжений относительно сферической системы координат ρ, θ, φ в отсчетной конфигурации. Для степенного закона деформирования $\sigma_i = B \varepsilon_i^\mu$, $0 < \mu \leq 1$ (связывающего интенсивность напряжений σ_i с интенсивностью деформаций ε_i) решение имеет вид

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho) = \text{sign } u \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\mu} B \int_a^{a_r} \frac{|\ln a|^\mu}{a^2 - a} da + q_r^c,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{\varphi\varphi}(\rho) = \text{sign } u B \left(\frac{2}{3} |\ln a|\right)^\mu + \sigma_{\rho\rho}(\rho)$$

при

$$q_R - q_r^c = \text{sign } u \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\mu} B \int_{a_R}^{a_r} \frac{|\ln a|^\mu}{a^2 - a} da, \quad (4)$$

где $a = \frac{\rho^3 + \alpha^3}{\rho^3}$, $a_r = \frac{r^3 + \alpha^3}{r^3}$, $a_R = \frac{R^3 + \alpha^3}{R^3}$, u — радиальная компонента перемещения, $\alpha^3 = \text{const}$ определяется из (4). Здесь $q_r^c = q_r$ при $q_r = \text{const}$ и $q_r^c = q_r/a_r$, если количество вещества в полости остается постоянным в процессе деформирования. Для физически линейного материала ($\mu = 1$) при деформациях, меньших 15 %, результаты вычислений, выполненных в рамках данной теории, практически совпадают с расчетами согласно решению Ламе для толстостенной сферы.

В § 6.3 с помощью численных экспериментов изучено влияние размеров тела и его механических характеристик на изменение объема отверстия под действием нагрузки. Показано, что изменение объема отверстий

происходит интенсивнее при более высоких показателях μ . Тем не менее при сжатии тела внешним давлением шаровая полость не исчезает при любых μ (схлопывание поры при потере устойчивости формы не рассматривалось). Вид построенных кривых залечивания — уменьшения объема поры — (левая часть рис. 6) качественно соответствует экспериментальным зависимостям уменьшения свободного объема, полученным в ^{2*}, где также наблюдалось отсутствие четко выраженного порога залечивания. При растяжении тела (внутренним давлением $q_r < 0$ и внешней нагруз-

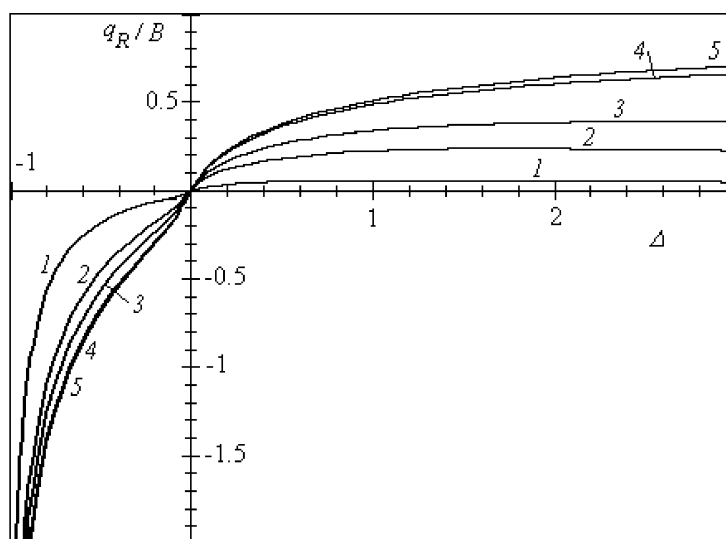


Рис. 6. Зависимость относительного изменения объема поры Δ от относительной внешней нагрузки q_R/B при различных отношениях R/r : 1 — $R/r = 1.1$; 2 — $R/r = 1.5$; 3 — $R/r = 2$; 4 — $R/r = 5$ и 5 — $R/r = 10$ при $\mu = 2/3$

кой $q_R > 0$) обнаружено наличие предельной нагрузки, при превышении которой не существует никакой определенной деформированной конфигурации. Для бесконечного тела предельная нагрузка «достигается» (чисто с математической точки зрения) на бесконечности, для конечного — при

^{2*}Избыточный свободный объем и механические свойства аморфных сплавов / Бетехтин В. И., Глезер А. М., Кадомцев А. Г., Кипяткова А. Ю. // Физика твердого тела. 1998. Т. 40. № 1. С. 85–89.

конечной деформации. Установлено, что критическое напряжение обратно пропорционально начальному размеру отверстия. На основании как теоретических рассуждений, так и численных расчетов показано, что при равной доле изолированного свободного объема тела с мелкими порами оказывают большее сопротивление деформации, чем тела с крупными порами.

§ 6.4 посвящен аналитическому исследованию возможности возникновения и полного залечивания пор. Неограниченность производной у зависимости $q(\Delta)$ при $\Delta \rightarrow -1$ свидетельствует о невозможности полного исчезновения поры при конечном значении внешней нагрузки $q = q_R - q_r$. В то же время в сплошном шаре конечных размеров возможно появление поры при конечном значении q_R , несмотря на существование при $r = 0$ тривиального решения $\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = q_R$, $\sigma_i = \varepsilon_i = 0$. Один из способов построения бифуркационного решения — переход к пределу в решении для сферы с концентрической полостью при стремлении радиуса полости к нулю (рис. 7). Из графика видно, что при нагружении тела с предсуществующей

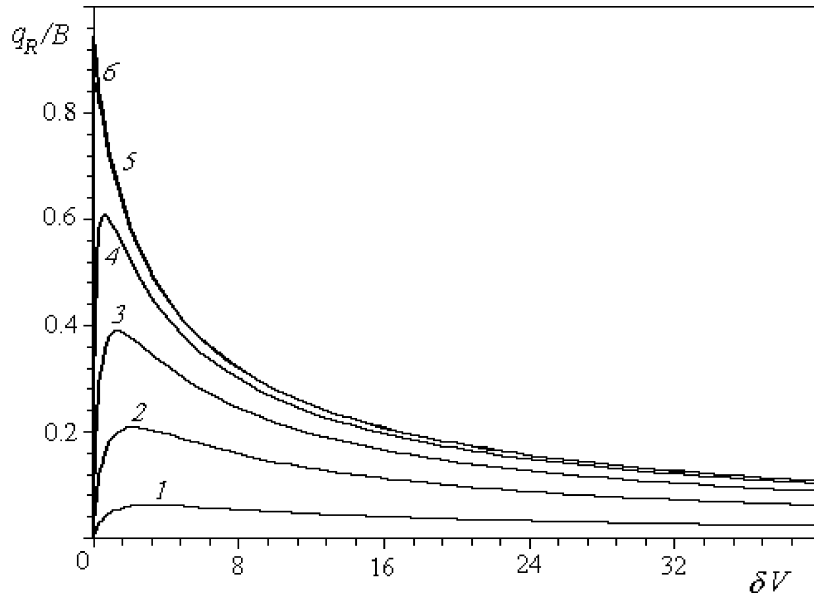


Рис. 7. Зависимость абсолютного приращения объема поры δV от относительной нагрузки q_R/B для различных r : 1 — $r = 0.9$; 2 — $r = 0.7$; 3 — $r = 0.5$; 4 — $r = 0.3$; 5 — $r = 0.1$ и 6 — $r = 0.01$ при $R = 1$

щей микропорой при достижении нагрузкой некоторого критического значения q^* начинается внезапный рост поры, по мере которого напряжения в теле падают. Возможность порообразования (кавитации) в сплошном шаре при $r = 0$ доказана построением верхней границы указанной нагрузки, которая определяется выражением (4) при $r = 0$. Приближенную (нижнюю) оценку q^* , согласно теореме подобия А.А. Ильюшина, правомерно получить с помощью (4) при $a_R = 1$, $a_r = 10$.

В главе 7 рассмотрены тела с переменными внешними и внутренними границами, как в плоском, так и в пространственном радиально-симметричных случаях. В ней исследовано влияние окружающей среды на напряженное состояние тел с концентрическими отверстиями в условиях двухсторонней равномерной механохимической коррозии, скорость проникновения которой является кусочно-линейной функцией от напряжений

$$v = [a + m\sigma] \exp(-bt) \text{ при } |\sigma| \geq |\sigma^{th}|,$$

где $a = v^0 - m\sigma^{th}$; σ^{th} — пороговые напряжения (различные для сжатия и растяжения); v^0 — начальная скорость коррозии при $|\sigma| < |\sigma^{th}|$; величины v^0 , m , b , как и пороговые напряжения, определяются экспериментально. Сомножитель $\exp(-bt)$ характеризует затухание коррозии во времени t при возникновении плотной пленки продуктов коррозии, препятствующей дальнейшему протеканию электрохимических процессов. В качестве эквивалентного напряжения σ выбирается максимальное нормальное напряжение или интенсивность напряжений. Специфика коррозионно-механических повреждений описана в первом параграфе главы.

В § 7.2 рассмотрено несколько задач о коррозии под напряжением плоского слоя. Составлены уравнения кинетики коррозионных повреждений и выведены формулы для оценки долговечности слоя из упругого и идеального упругопластического материала. Аналитические решения для плоского слоя можно построить без особого труда, если напряжения на поверхностях зависят только от его переменной толщины. В случае двух-

³ Павлов П. А., Кадырбеков Б. А., Колесников В. А. Прочность сталей в коррозионных средах. Алма-Ата : Наука, 1987. 272 с.

сторонней коррозии (с различными характеристиками) цилиндрического и сферического слоев задача существенно усложняется, поскольку напряжения в них зависят не только от толщины, но и от переменных радиусов кривизны поверхностей. В общем случае задачи по расчету прочности элементов конструкций в коррозионных средах сводятся к решению систем дифференциальных уравнений. Тем не менее для задач, обладающих центральной и осевой симметрией, удалось разработать метод их приведения к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Этот метод проиллюстрирован в настоящей главе на нескольких примерах.

В § 7.3 построено решение задачи о механохимической коррозии толстостенного цилиндра под действием продольной силы Q , а также внутреннего p_r и внешнего p_R давления. Выведены уравнения роста максимального нормального напряжения (окружного или продольного — в зависимости от начальных данных) и изменения размеров его поперечного сечения. Дана оценка долговечности упругого цилиндра при хрупком разрушении или при потере устойчивости (если $p_R > p_r$ и $Q < 0$). Для сравнительных прогнозов срока службы изделий предложено ввести безразмерные скалярные функции оценки ресурса прочности Π_s и ресурса устойчивости Π_b , достигающие единицы в момент отказа. Функция, первой достигшая критического значения, определяет наиболее вероятные момент и причину разрушения (рис. 8). Далее выведены условия перехода корродирующего идеального упругопластического цилиндра в состояние текучести по всей толщине. Для наглядного представления о возможном сроке эксплуатации цилиндра также введены две функции оценки его ресурса: Π_e , соответствующая чисто упругой стадии функционирования и равная единице в момент достижения предела текучести интенсивностью напряжений на внутренней поверхности трубы, и Π_y , соответствующая упругопластической стадии и достигающая единицы при переходе трубы в состояние текучести по всей толщине.

В § 7.4 построено решение для коррозионно-механического износа цилиндра под действием продольной силы Q , а также внутреннего p_r и внешнего p_R давления коррозионных сред с различными температурами T_r и T_R соответственно. На выражениях для скоростей проникновения корро-

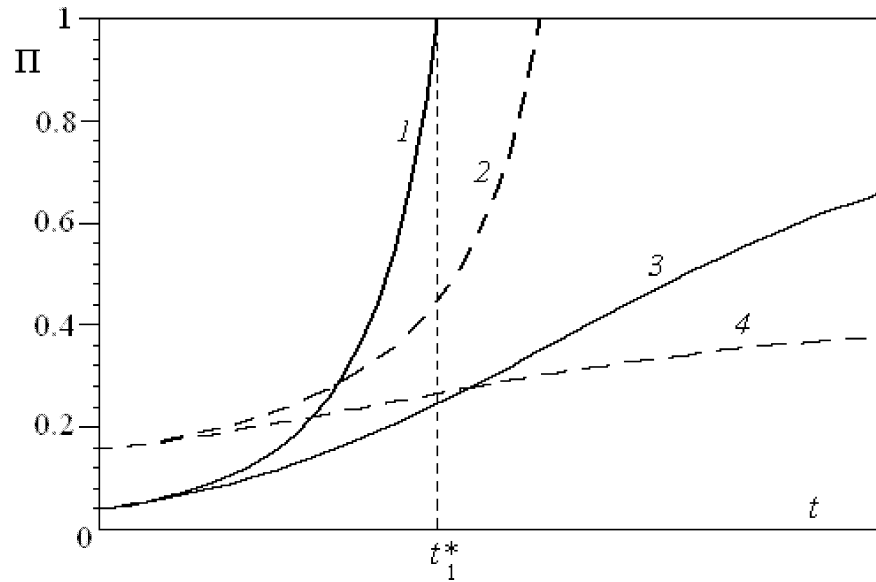


Рис. 8. Функции оценки ресурса прочности (линии 1; 3) и устойчивости (линии 2; 4) трубы под действием внешнего давления для различных показателей затухания коррозии: 1; 2 — $b = b_1$; 3; 4 — $b = b_2 = 2.2b_1$

зии учет теплового воздействия сказывается появлением дополнительного экспоненциального множителя

$$v = [a + m\sigma] \exp(-bt) \exp(\beta[T - T^0]) \text{ при } |\sigma| \geq |\sigma^{th}|,$$

где T^0 — пороговое значение температуры, определяемое, как и постоянная β , опытным путем. В соотношениях для напряжений появляются температурные составляющие, выраженные формулами Р. Лоренца. В данном случае интеграл выведенного основного разрешающего уравнения удалось построить только в случае односторонней (внутренней или внешней) коррозии. Исследовано влияние параметров задачи на долговечность тел.

В § 7.5 представлено решение задачи о механохимическом износе толстостенной сферы под давлением коррозионных сред для линейно-упругого и идеального упругопластического материалов. В целом, поведение различных характеристик сферы при коррозии аналогично поведению соответствующих величин для цилиндра. Внутренний износ цилиндра и сферы вызывает более интенсивный рост напряжений по сравнению с внешним.

Однако при одинаковых давлениях, скоростях коррозии и начальных напряжениях $\sigma_{\theta\theta}|_{t=0}$ напряжения в сфере возрастают быстрее, чем в цилиндре. При механохимической коррозии по этой причине растворение материала сферы протекает интенсивнее, чем в цилиндре, так как активизируется быстро растущими механическими напряжениями. Поэтому при проектировании трубопроводных конструкций необходимо учитывать, что запас толщины колена трубопровода, отводимый на его коррозионное растворение, должен превосходить эту же величину для линейной части конструкции (при том что для равенства начальных напряжений толщина сферы должна быть больше, чем толщина цилиндра).

В любых случаях ускорение процесса формирования защитной пленки (повышение показателя b) приводит к существенному продлению срока службы изделия.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

В приложении представлен способ многокритериальной оценки долговечности элементов конструкций с учетом коррозионных повреждений. Выход из строя элемента конструкции может быть вызван различными факторами. Построить единый критерий разрушения, учитывающий все эти факторы в отдельности, а также их взаимодействие, в настоящее время не представляется возможным. Поэтому для прогнозирования срока службы изделий предлагается для каждой возможной причины аварийного исхода ввести безразмерные скалярные функции оценки соответствующего ресурса, являющиеся, в какой-то степени, аналогами меры поврежденности, предложенной Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым. Удобно выбрать эти функции изменяющимися в пределах от нуля ($\Pi = 0$ в неповрежденном материале) до единицы ($\Pi = 1$ в момент отказа). При невозможности разрушения по конкретному критерию допустимо соотношение $\Pi < 0$. Функция, первой достигающая критического значения — единицы, — определяет наиболее вероятную причину и момент разрушения. В приложении приведены некоторые дополнительные функции оценки ресурса изделия по различным критериям.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Исследованы различные предельные переходы в плоских задачах теории упругости о сосредоточенных силе, моменте и центре расширения–сжатия. Показано, что разница в результатах предельных переходов, с помощью которых определяются центры расширения–сжатия, объясняется их физической интерпретацией.

В рамках классической теории упругости различными методами построены аналитические решения для одиночных и периодических сосредоточенных и распределенных воздействий в упругой полуплоскости со свободной и жестко закрепленной границей. Продемонстрировано, что решение задачи Фламана может быть получено путем суперпозиции плоских аналогов фундаментальных решений первого и второго типа (по Ж.В. Буссинеску).

2. С помощью построенных решений изучено влияние краевых условий на распределение напряжений в окрестности приграничных точечных воздействий. Вычислены коэффициенты возрастания напряжений на свободной и закрепленной кромке полуплоскости для различных типов особых точек. Установлено, что закрепление свободной границы приводит к снижению общего уровня напряжений в ее окрестности.

В задачах о периодических воздействиях у границы полуплоскости обнаружено, что на некоторых направлениях зависимость напряжений от периода системы воздействий не всегда монотонна. Показано, что это явление объясняется наложением областей экстремальных напряжений, порожденных соседними источниками. Найдены «опасные» значения относительных периодов системы диполей, при которых прочность границы снижается почти вдвое.

3. Дано обобщение одного непрямого метода вывода граничных интегральных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми выемками, загруженной усилиями на бесконечности, на ее сложной границе, а также внутренними сосредоточенными (или распределенными) воздействиями.

4. Предложен новый численно-аналитический метод решения плоских задач классической теории упругости для тел с отверстиями путем их приведения к системе линейных алгебраических уравнений, минуя стадию формирования граничных интегральных уравнений. Исследованы поля напряжений, вызванных внутренними сосредоточенными силами и внешней нагрузкой, в окрестности отверстий.

5. В рамках деформационной теории Девиса–Надаи построено аналитическое решение задачи о толстостенной сфере под действием равномерной нагрузки на ее поверхностях. На его основе показано, что при равной доле свободного объема тела с мелкими порами обладают большим сопротивлением внешним нагрузкам, чем тела с крупными порами. Доказана возможность порообразования при конечном значении внешней нагрузки и невозможность аннигиляции существующих сферических отверстий.

6. Разработан метод приведения одного класса задач о равномерном коррозионно-механическом износе упругих тел с концентрическими отверстиями (в плоской и пространственной постановке) к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

На его основе построены аналитические решения некоторых задач о механохимической коррозии толстостенных цилиндров и сфер под действием внешней нагрузки и неравномерного по толщине нагрева.

Предложен способ многокритериальной оценки долговечности тел в условиях коррозии под напряжением. Показано, что ускорение процесса формирования защитной пленки продуктов коррозии (увеличение показателя затухания коррозии) приводит к значительному продлению срока службы изделий.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* О сосредоточенных силах и моментах в упругой полуплоскости // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1 : Математика, механика, астрономия. 1998. Вып. 1. С. 57–60.

2. *Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. 1998. № 5. С. 78–87.

3. *Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Деформация шаровой поры в нелинейно-упругом теле // Изв. РАН. Сер. физическая. 2006. Т. 70. № 9. С. 1341–1343.

4. *Пронина Ю. Г.* Концентрация напряжений в упругой полуплоскости с краевыми выемками // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 103–109.

5. *Пронина Ю. Г.* Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1 : Математика, механика, астрономия. 2006. Вып. 3. С. 121–130.

6. *Пронина Ю. Г.* Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 10 : Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. Вып. 3. С. 53–61.

7. *Пронина Ю. Г.* Центры расширения–сжатия в упругой полуплоскости // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1 : Математика, механика, астрономия. 2007. Вып. 2. С. 140–149.

8. *Пронина Ю. Г.* Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления. Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1 : Математика, механика, астрономия. 2009. Вып. 1. С. 113–122.

9. *Пронина Ю. Г.* Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 10 : Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 103–113.

10. *Пронина Ю. Г.* Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 10 : Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 119–129.

11. *Пронина Ю. Г.* Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях рав-

номерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Вып. 71. С. 129–135.

12. *Пронина Ю. Г.* О сосредоточенных воздействиях у границы упругой пластины // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. Теория корабля и строительная механика. СПб. 2010. Вып. 53 (337). С. 117–122.

Другие публикации:

13. *Веселков С. Ю., Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Сосредоточенные силы и моменты в некоторых двумерных задачах теории упругости. СПб. : НИИХ СПбГУ, 1998. 90 с.

14. *Даль Ю. М., Пронина Ю. Г.* Рост и залечивание шаровой поры в упругопластическом теле под действием гидростатического давления // Электронный научный журнал «Исследовано в России». N 1387. М., 2006. Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/148.pdf> (01 мая 2010).

15. *Дворяджина М. В., Пронина Ю. Г.* Равномерный коррозионный износ упругой сферической оболочки под постоянным давлением // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела : сб. тр. / СПбГУ. СПб., 2005. Вып. 9. С. 245–259.

16. *Петранов Э. Г., Пронина Ю. Г.* Растяжение упругого полого цилиндра, подверженного общей коррозии // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела : сб. тр. / СПбГУ. СПб., 2005. Вып. 9. С. 233–244.

17. *Пронина Ю. Г.* Первая основная краевая задача для упругой полуплоскости с произвольными граничными выемками / СПбГУ. СПб., 1993. 23 с. Деп. в ВИНТИ 15.10.93, № 2595-В93.

18. *Пронина Ю. Г.* Оценка напряженного состояния упругой полуплоскости с глубокими граничными выемками // Актуальные проблемы прочности : сб. тр. Междунар. семинара. Новгород. 1997. Т. 2. Ч. 2. С. 341–344.

19. *Пронина Ю. Г.* Задача о толстостенной трубе, находящейся под давлением коррозионных сред // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела : сб. тр. / СПбГУ. СПб., 2004. Вып. 8.

С. 222–231.

20. *Пронина Ю. Г.* Механохимическая коррозия длинной упругой трубы под давлением в установившемся тепловом потоке (осесимметричная задача) // XVI Междунар. конф. «Физика прочности и пластичности материалов», 26–29 июня 2006 г., Самара : тр. : в 2 т. Т. 2. / Самар. гос. техн. ун-т [и др.]. Самара, 2006. С. 72–77.

21. *Пронина Ю. Г.* Некоторые сингулярные решения теории упругости для полуплоскости // XLVI Междунар. конф. «Актуальные проблемы прочности», 15–17 окт. 2007 г., Витебск, Беларусь : материалы конф. Ч. 2. / УО «ВГТУ». Витебск, 2007. С. 243–248.

22. *Пронина Ю. Г.* Оценка долговечности упругой трубы под действием продольной силы и давления в условиях равномерной поверхностной коррозии // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 2. С. 41–44.

23. *Пронина Ю. Г., Чикова Т. С.* Влияние температуры на долговечность упругого полого цилиндра под действием продольной силы при механохимической коррозии // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. 2007. № 4. С. 72–79. [Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2007. № 4 (61). С. 72–79].

24. *Пронина Ю. Г., Чистякова Е. О.* Первая основная краевая задача для упругой полуплоскости с отверстием // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела : сб. тр. / СПбГУ. СПб., 2004. Вып. 8. С. 232–240.

25. *Pronina Yu. G.* Elastic tube subjected to pressure and general corrosion // Proc. of XXXVII Summer School-Conf. «Advanced Problems in Mechanics». APM'2009. Repino. Saint-Petersburg, Russia. June 30–July 5, 2009. Inst. for Problems in Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences. P. 547–553.

26. *Pronina Yu. G.* Analytical study of general mechanochemical corrosion of the pipe under the axial force and pressure [Электронный ресурс] // 7th Euromech Solid Mechanics Conf., Lisbon, Portugal, September 7–11, 2009 : CD-Rom Proc. / Europ. mech. soc. APMТАС. CD-Rom\papers\Gssm\pap_0486_GS-SM.pdf, 10 p.

Автор искренне благодарит всех ученых, уделивших внимание представленной работе.