САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ОСИПОВ Алексей Валерианович

МНОЖЕСТВА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ

01.01.04 Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пилюгин Сергей Юрьевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Петров Николай Николаевич (Санкт-Петербургский государственный университет),
	доктор физико-математических наук Малютин Андрей Валерьевич (Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН).
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится “ ” 201 года в час. на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311 (помещение ПОМИ РАН).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Автореферат разослан “ ” 201 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации изучается структура множеств диффеоморфизмов гладких многообразий, обладающих так называемыми свойствами отслеживания. В настоящее время теория свойств отслеживания является достаточно хорошо разработанным разделом теории динамических систем. Первые результаты в этом направлении были получены Д.В. Аносовым [1] и Р. Боуэном [4]. Современное состояние этой теории достаточно полно отражено в монографиях [9, 7]. Грубо говоря, наличие некоторого свойства отслеживания означает, что вблизи любой достаточно точной приближенной траектории дискретной динамической системы, порожденной диффеоморфизмом, находится истинная траектория. В этом случае мы, для простоты, будем говорить, что диффеоморфизм обладает некоторым свойством отслеживания. Так как термины "вблизи" и "приближенная траектория" можно формализовывать по-разному, определяют различные свойства отслеживания. Таким образом, если диффеоморфизм обладает некоторым свойством отслеживания, то для изучения траекторий точек этого диффеоморфизма можно применять приближенные методы, так как приближенные траектории достаточно адекватно отражают поведение истинных траекторий. Одним из самых важных и самых первых результатов в теории отслеживания является так называемая shadowing lemma, утверждающая, что определенные свойства отслеживания выполняются в малой окрестности гиперболического множества диффеоморфизма.

Большой интерес представляет вопрос о характеризации множеств диффеоморфизмов, обладающих различными свойствами отслеживания, или внутренностей таких множеств, т.е. о получении необходимых и достаточных условий, при выполнении которых диффеоморфизм (или диффеоморфизм вместе со всеми достаточно близкими к нему диффеоморфизмами) обладает некоторым свойством отслеживания. Кроме того, представляет интерес вопрос о плотности (типичности) множеств диффеоморфизмов, обладающих различными свойствами отслеживания.

Цель работы. Целью данной работы является изучение множеств диффеоморфизмов, обладающих различными свойствами отслеживания, а именно, изучение вопросов о плотности (типичности) этих множеств и о характеризации этих множеств и их внутренностей в терминах теории структурной устойчивости.

Методика исследования. Для получения результатов используются методы топологии гладких многообразий, дифференциальной геометрии, теории динамических систем и др.

Научная новизна и значимость работы. Все результаты диссертации являются новыми. Выделим основные из них:

– доказано, что множество C^1-диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия, обладающих орбитальным свойством отслеживания, неплотно в пространстве C^1-диффеоморфизмов с C^1-топологией;

– доказано, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия, обладающих периодическим свойством отслеживания, совпадает с множеством диффеоморфизмов, обладающих липшицевым периодическим свойством отслеживания, и с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов;

– доказано, что для любого гомеоморфизма компактного метрического пространства выполняется второе слабое предельное свойство отслеживания и что множество гомеоморфизмов компактного метрического пространства, обладающих слабым предельным свойством отслеживания, обладает следующим свойством: для любого гомеоморфизма из этого множества неблуждающее множество совпадает с объединением ω-предельных множеств всех траекторий;

– доказано, что если гладкое замкнутое многообразие является двумерным, то C^1-внутренность множества диффеоморфизмов этого многообразия, обладающих слабым предельным свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты важны для теории диффеоморфизмов гладких многообразий и теории динамических систем.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

– Международная конференция "Современные проблемы математики и механики", посвященная 70-летию В.А.Садовничего, мех-мат МГУ, март 2009, Москва, Россия;

– Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial, январь 2010, Санкт-Петербург, Россия;

– Семинар "Динамические системы" (руководители — академик Д.В. Аносов и профессор Ю.С. Ильяшенко), мех-мат МГУ, апрель 2010, Москва, Россия;

– Oberseminar Nonlinear Dynamics (руководитель — профессор B. Fiedler), Free University Berlin, май 2010, Берлин, Германия;

– Петербургский топологический семинар имени В.А. Рохлина (руководитель — профессор Н.Ю. Нецветаев), ПОМИ РАН, сентябрь 2010, Санкт-Петербург, Россия;

– Семинары по топологии динамических систем (руководитель — профессор С.Ю. Пилюгин), кафедра высшей геометрии мат-меха СПбГУ, 2006–2010, Санкт-Петербург, Россия.

Основное содержание диссертации изложено в работах автора [1]–[5]. В работе [2] автору диссертации принадлежит доказательство теоремы о совпадении C^1-внутренности множества диффеоморфизмов, обладающих периодическим свойством отслеживания, и множества Ω-устойчивых диффеоморфизмов, а также леммы о том, что если для диффеоморфизма выполняется липшицево периодическое свойство отслеживания, то любая периодическая точка гиперболична. Статьи [1, 2] опубликованы в изданиях, включенных в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа объемом 132 машинописных страницы состоит из введения (первой главы), трех глав основной части и списка литературы, содержащего 34 наименования. Вторая глава включает 7 параграфов, третья и четвертая главы — по 3 параграфа. Седьмой параграф второй главы состоит из четырех пунктов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении (первой главе) даны определения исследуемых в диссертации свойств отслеживания, сформулированы основные результаты диссертации, и приведено сравнение этих результатов с соответствующими результатами других математиков.

Во второй главе изучается проблема плотности (типичности) свойств отслеживания.

Основным объектом данной работы являются диффеоморфизмы гладких замкнутых многообразий. Однако для определения свойств отслеживания гладкость не нужна, поэтому различные свойства отслеживания будут определяться для гомеоморфизмов метрических пространств.

В данной работе под типичным понимается свойство, выполняющееся для всех отображений из некоторого множества II категории по Бэру, а под плотным — выполняющееся для всех отображений из некоторого плотного множества. В работе рассматриваются пространство гомеоморфизмов $H(M)$ компактного метрического пространства M с C^0-топологией и пространство $\mathrm{Diff}^1(M)$ C^1-диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M с C^1-топологией.

Пусть f — гомеоморфизм метрического пространства (M, dist). Траекторией точки p гомеоморфизма f называется множество

$$O(p, f) = \left\{ f^k(p) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Будем называть последовательность $\xi = \{x_k\}$ *d–псевдотраекторией* гомеоморфизма f, если

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d \qquad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Будем обозначать через $N(\epsilon, A)$ ϵ-окрестность множества $A \subset M$. В работе [11] вводится определение орбитального свойства отслеживания (OSP, orbital shadowing property), являющегося основным объектом исследования второй главы.

Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *орбитальное свойство отслеживания*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой d–псевдотраектории ξ найдется такая точка $q \in M$, что

$$\xi \subset N(\epsilon, O(q, f)) \qquad \text{и} \qquad O(q, f) \subset N(\epsilon, \xi).$$

В диссертации перечисляются известные результаты о плотности и типичности различных свойств отслеживания. Не перечисляя их все, упомянем только, что из работы С.Ю. Пилюгина и О.Б. Пламеневской [10] следует типичность орбитального свойства отслеживания в пространстве $H(M)$. Основным результатом второй главы является следующая теорема:

Теорема 1. *Существует такая область $W \subset \mathrm{Diff}^1(S^2 \times S^1)$, что любой диффеоморфизм $f \in W$ не обладает свойством* OSP.

В параграфе 2.1 описана схема доказательства теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 используется идея, восходящая к А.С. Городецкому и Ю.С. Ильяшенко: строить пример в классе частично-гиперболических мягких косых произведений (см. [2]). В качестве искомой области W из теоремы 1 берется достаточно малая C^1-окрестность некоторого ступенчатого косого произведения G_0. Эта окрестность берется, в частности, настолько малой, что любому диффеоморфизму из области W соответствует некоторое мягкое косое произведение. Далее, доказывается, что теорема 1 сводится к теореме $1'$ о свойствах мягких косых произведений. Эта теорема утверждает, что для гельдеровых мягких косых произведений, ”достаточно близких” к косому произведению G_0, не выполняется орбитальное свойство отслеживания.

Доказательство теоремы $1'$ разбивается на два случая: случай (A1) и случай (A2). Случай (A1) возникает, если существуют гиперболическая периодическая точка с одномерным неустойчивым многообразием и гиперболическая периодическая точка с одномерным устойчивым многообразием, у которых эти многообразия пересекаются. Далее, с помощью основной леммы строятся псевдотраектории, которые не могут отслеживаться никакой точной траекторией. Случай (A2) возникает при отсутствии таких пересечений. В этом случае строится такая псевдотраектория, что любая орбитально отслеживающая ее точная траектория должна оказаться гетероклинической, соединяющей две гиперболические периодические точки с соответственно одномерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Предположение о наличии орбитального свойства отслеживания противоречит условию случая (A2).

В параграфе 2.2 описываются основные свойства косых произведений и обсуждается сведение теоремы 1 к теореме $1'$. В параграфе 2.3 формулируется лемма 1 (основная лемма), содержащая достаточное условие на псевдотраекторию, при котором любая орбитально отслеживающая ее траектория лежит на устойчивом (или неустойчивом) многообразии гиперболической периодической точки. В параграфе 2.4 показано, что доказательство теоремы сводится к двум случаям и разбирается случай (A1). В параграфе 2.5 доказаны вспомогательные леммы о свойствах сдвига Бернулли, которые утверждают, что если некоторая последовательность содержит не слишком мало нулей подряд, то ее траектория не попадает в определенные области. В параграфе 2.6 разбирается случай (A2) с точностью до леммы 6, которая позволяет построить псевдотраекторию с необходимыми свойствами. Доказательству леммы 6 посвящен параграф 2.7.

В третьей главе изучаются периодические свойства отслеживания и их связь со структурной устойчивостью.

Пусть f — гомеоморфизм метрического пространства (M, dist). В работе [6] дается определение периодического свойства отслеживания.

Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *периодическое свойство отслеживания* PerSh *(periodic shadowing property)*, если для любого положительного ϵ существует такое положительное d, что для любой периодической d-псевдотраектории ξ найдется такая периодическая точка q, что выполняется соотношение

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(q)) < \epsilon \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *липшицево периодическое свойство отслеживания* LipPerSh, если существуют такие положительные числа L и d_0, что для любой периодической d-псевдотраектории с $d \leq d_0$ найдется такая периодическая точка q, что выполняется соотношение

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(q)) \leq Ld \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

При изучении свойств отслеживания диффеоморфизмов гладких замкнутых многообразий одним из важных подходов является переход к C^1-внутренностям. Будем обозначать через $\mathrm{Int}^1(P)$ внутренность некоторого подмножества P множества диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия M относительно C^1-топологии. Как обычно, будем обозначать через ΩS множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов. В диссертации перечисляются известные результаты о характеризации различных свойств отслеживания в терминах теории структурной устойчивости. В третьей главе доказывается, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих периодическим свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Отметим, что существуют не Ω-устойчивые диффеоморфизмы, обладающие периодическим свойством отслеживания. В третьей главе также доказывается эквивалентность свойства Ω-устойчивости и липшицева периодического свойства отслеживания. Таким образом, основной результат третьей главы можно сформулировать так:

Теорема 2. *Если M — гладкое замкнутое многообразие, то* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{PerSP}) = \mathrm{LipPerSP} = \Omega S$.

В параграфе 3.1 доказывается, что множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов является подмножеством множества диффеоморфизмов, обладающих липшицевым периодическим свойством отслеживания. В параграфе 3.2 доказывается, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих периодическим свойством отслеживания, содержится в множестве Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Наконец, в параграфе 3.3 доказывается, что множество диффеоморфизмов, обладающих липшицевым периодическим свойством отслеживания, является подмножеством множества Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Для этого сначала доказывается гиперболичность всех периодических точек, потом их равномерная гиперболичность, потом плотность периодических точек в неблуждающем множестве и, наконец, выполнение условия отсутствия циклов.

В четвертой главе изучаются слабые предельные свойства отслеживания. В параграфе 4.1 даются определения предельных свойств отслеживания и рассматриваются их простейшие свойства.

Пусть f — гомеоморфизм метрического пространства (M, dist). Определим следующее свойство последовательности $\xi = \{x_k\}_{k>0}$:

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to +\infty. \tag{$*$}$$

В работе [8] вводится следующее свойство.

Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *слабое предельное свойство отслеживания* WLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}_{k\geq 0}$, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\omega(\xi) \subset \omega(q),$$

где через $\omega(\xi)$ обозначено множество всех предельных точек последовательности ξ.

Будем говорить, что для гомеоморфизма f выполняется *второе слабое предельное свойство отслеживания* 2WLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, для которой выполняется свойство $(*)$, найдется такая точка $q \in M$, что

$$\omega(q) \subset \omega(\xi).$$

Можно ввести аналоги сформулированных предельных свойств отслеживания, в которых $k \to +\infty$ заменено на $k \to -\infty$ (в главе 4 приводятся эти определения).

В параграфе 4.1 доказывается, что любой гомеоморфизм f компактного метрического пространства M обладает свойством 2WLmSP.

При изучении динамических систем особый интерес вызывает структура неблуждающего множества. Как обычно, обозначим через $\Omega(f)$ множество всех неблуждающих точек гомеоморфизма f. Хорошо известно, что для гомеоморфизма f

$$\Omega(f) \supset \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

В параграфе 4.2 приводится пример гомеоморфизма f для которого множества $\Omega(f)$ и $\bigcup_{p \in M} \omega(p)$ не совпадают. Кроме того, там доказывается, что если для гомеоморфизма f выполняется свойство WLmSP, то

$$\Omega(f) = \bigcup_{p \in M} \omega(p).$$

В диссертации перечисляются известные результаты о характеризации C^1-внутренностей множеств диффеоморфизмов, обладающих предельными свойствами отслеживания, в терминах теории структурной устойчивости. Основным результатом четвертой главы является следующая теорема, доказательство которой приведено в параграфе 4.3.

Теорема 3. *Если M — гладкое замкнутое многообразие и $\dim M = 2$, то*

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) = \Omega S.$$

В четвертой главе приводится пример, показывающий, что теорема 3 не обобщается на случай многообразий более высокой размерности. Для "отрицательных" предельных свойств отслеживания выполняются аналогичные утверждения. Идея доказательсва состоит в использовании леммы Хаяши и Аоки (см. [5, 3]), которая утверждает, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, все периодические точки которых гиперболичны, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Далее, мы показываем, что диффеоморфизм, имеющий негиперболическую периодическую точку, можно так C^1-мало возмутить, чтобы не выполнялось слабое предельное свойство отслеживания.

Список цитируемой литературы

1. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Труды 5-й Межд. конф. по нелин. колеб. Киев. 1970. Т. 2. С. 39–45.

2. *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом. // Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 231. С. 96–118.

3. *Aoki N.*, The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 23, 1992, P. 21–65.

4. *Bowen R.* Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lect. Notes. Math. Vol. 470. Springer-Verlag. Berlin. 1975. 108 p.

5. *Hayashi S.* Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A // Ergod. Theory Dyn. Syst., Vol. 12, 1992, P. 233–253.

6. *Kościelniak P.*, On genericity of shadowing and periodic shadowing property // J. Math. Anal. Appl., Vol. 310, 2005, P. 188–196.

7. *Palmer K.* Shadowing in Dynamical Systems. Methods and Applications. Dordrecht-Boston-London. 2000. 299 p.

8. *Pilyugin S. Yu.* Sets of diffeomorphisms with various limit shadowing properties // J. Dyn. Differ. Equat. 2007. Vol. 19. P. 747–775.

9. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in Dynamical Systems, Lect. Notes in Math. Vol. 1706. Springer-Verlag. Berlin. 1999. 283 p.

10. *Pilyugin S. Yu., Plamenevskaya O. B.* Shadowing is generic // Topol. and its Appl. 1999. Vol. 97. P. 253–266.

11. *Pilyugin S. Yu., Rodionova A. A., Sakai K.* Orbital and weak shadowing properties // Discr. Contin. Dyn. Systems. 2003. Vol. 9. P. 287–308.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Осипов А. В.* Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1-топологии // Алгебра и анализ, 2010, Т. 22, N 2, С. 127–163.

2. *Osipov A. V., Pilyugin S. Yu., Tikhomirov S. B.* Periodic shadowing and Ω-stability // Reg. Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, N 2–3, P.406–419.

Другие публикации:

3. *Осипов А. В.* Слабые предельные свойства отслеживания динамических систем на двумерных многообразиях // Электр. журн. Диф. ур-я и проц. упр-я., 2006. N 4, С. 1–16.

4. *Осипов А. В.* C^1-неплотность орбитального свойства отслеживания // Зап. межд. конф. совр. пробл. матем. и прил., Москва, Унив. книга, 2009, С. 183–184.

5. *Osipov A. V.* Lipschitz Periodic Shadowing // Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial, St. Petersburg, 2010, P. 58–59.