

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛЕБЕДЕВ Александр Владимирович

**УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН И
ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЯМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2010

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики
математико-механического факультета *Санкт-Петербургского*
государственного университета.

Научный руководитель: *кандидат физико-математических наук,*
доцент Смирнов Андрей Леонидович

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,*
профессор Даль Юрий Михайлович
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

кандидат физико-математических наук
Майборода Александр Леонидович
(LG Softlab)

Ведущая организация: *Петербургский государственный универ-*
ситет путей сообщения

Защита состоится «_____» _____ 2010 г. в _____ часов на заседании
совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при
Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-
Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механиче-
ский факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке *им. М. Горького*
Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034,
Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «_____» _____ 2010 г.

Учёный секретарь совета,
доктор физико-математических
наук, профессор

Кустова Е. В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Обеспечение устойчивости равновесия и несущей способности тонкостенных деформируемых систем, состоящих из пластинок и оболочек, является одной из важнейших задач, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и несущих инженерных сооружений. В прошлом столетии в этих областях происходило бурное развитие технологий, породив широчайший спектр разнообразных задач. Отсюда возникает повышенный интерес к поведению таких конструкций под действием различных внешних нагрузок. Внимание исследователей в первую очередь обращено на проблемы, имеющие непосредственное практическое значение. При расчёте таких систем возникают вопросы об их прочности и устойчивости в работе, т.к. наличие вырезов может существенно влиять на эти характеристики. Применение метода конечных элементов для моделирования тонкостенных деформируемых систем, ослабленных отверстиями, позволяет существенно ускорить экспериментальную часть исследования поведения таких систем. Изучение поведения тонкостенных деформируемых систем, ослабленных отверстиями, важно для понимания механизмов взаимодействия отверстий с упругими конструкциями и разработки математических моделей таких конструкций.

Представляет интерес исследование зависимости критических нагрузок и форм потери устойчивости от различных параметров, характеризующих геометрию пластины либо оболочки и свойства материала тонкостенной конструкции, в частности, зависимость критических нагрузок от размера, пропорций и особенности расположения отверстий, а также количества отверстий. Аналитически задача исследования устойчивости упругих тел сводится к решению граничных задач на собственные значения, причём потере устойчивости соответствует наименьшее собственное значение, зависящее от набора

параметров (волновых чисел и т.д.). В связи с наличием отверстий, области, занимаемыми тонкостенными конструкциями, оказываются многосвязными. Исследование поведения собственных чисел операторов, заданных в таких областях, представляет отдельный теоретический интерес.

Цель диссертационной работы заключается в выявлении характера влияния отверстий на устойчивость пластин и оболочек.

Достоверность основных научных положений основана на строгой физической постановке соответствующих задач и корректных математических методах, использованных при их решении. В частных случаях расчёты по выведенным теоретическим зависимостям были сопоставлены с решениями других авторов и с экспериментальными результатами, подтверждающими достоверность основных положений диссертационной работы.

Научная новизна. Получены новые результаты касающиеся поведения значений критических нагрузок и форм потери устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями, для широкого класса параметров и условий.

Практическая значимость. Полученные результаты могут применяться на практике для оценки прочности и жёсткости пластин и оболочечных конструкций.

Результаты и положения, выносимые на защиту:

1. Исследовано влияние отверстия на устойчивость тонкой изотропной пластины под действием осевого сжатия. Обнаружено существенное влияние размера отверстия на величины критической нагрузки, зависящее от жёсткости граничных условий на боковых сторонах пластины и пропорций пластины. Основным фактором, влияющим на величину критической нагрузки является интенсивность начальных напряжений в зоне между отверстием и боковой стороной пластины. Изучена зависимость критической нагрузки от пропорций отверстия. При некотором соотно-

шении параметров обнаружен факт роста критической нагрузки при увеличении размера отверстия.

2. Исследована зависимость критической нагрузки для перфорированных пластин и оболочек при разных видах нагружения. Обнаружены так называемые “резонансные” формы пластин и оболочек, при которых критические нагрузки резко уменьшаются.
3. Исследованы ортотропные прямоугольные пластины и цилиндрические оболочки с отверстиями. Обнаружено, что для пластины увеличение жёсткости материала в направлении, нормальном к оси действия сжимающей силы, приводит к увеличению величины критической нагрузки, а на устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки под действием нормального давления существенное влияние оказывает увеличение жёсткости материала в окружном направлении.

Апробация работы. Материалы докладывались на следующих конференциях: Поляховские чтения 2009 [4], 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics 2009 [7], IV Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной механике (ПГУПС, СПб.) [6], городской семинар “Компьютерные методы в механике сплошной среды” (г. Санкт-Петербург, 2005, 2009 г.г.) [3, 5]. В целом диссертация докладывалась на заседании кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано восемь работ, из них две статьи [1, 2] в журналах, рекомендованных ВАК Российской Федерации. В работах [7, 8], написанных в соавторстве, автору принадлежит проведение численных экспериментов и составление соответствующих компьютерных программ. Соавтору А. Л. Смирнову принадлежит общая постановка задачи. В работе [6], написанной в соавторстве, автору принадлежит проведение

численных экспериментов по устойчивости оболочек, соавтору С. Н. Микрюкову — проведение численных экспериментов, касающихся колебаний оболочек, соавтору А. Л. Смирнову — общая постановка задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы, включающего 65 наименований. Работа содержит 113 страниц, 63 рисунка, 4 таблицы.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Приведён обзор работ, посвящённых устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями.

Первая глава посвящена исследованию задачи о потере устойчивости тонкой изотропной упругой прямоугольной пластины, ослабленной одним или несколькими отверстиями, подвергнутой сжимающему нагружению, приложенному к торцам пластины. Исследуется влияние геометрических параметров оболочки и отверстия, граничных условий закрепления пластины на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Численные значения величины критической нагрузки, полученные путём моделирования пластины с помощью метода конечных элементов в пакете прикладного программного обеспечения ANSYS v.10, сравнивались с результатами, полученными методом Рэлея-Ритца и аналитическими результатами для пластин без отверстия

В первых параграфах главы произведена постановка задачи потери устойчивости однородных пластин, приведено основное уравнение и его решения для прямоугольных и круглых пластин. Рассмотрен метод исследования, ис-

пользуемый для проведения численных экспериментов — метод конечных элементов, описаны общие характеристики конечных элементов, используемых для моделирования пластины.

Параграф 1.3 посвящён численному эксперименту, позволяющему оценить влияние количества конечных элементов модели на точность вычисления величины критической нагрузки, которая сравнивается с известными аналитическими значениями. Далее поставлена задача об устойчивости тонкой прямоугольной пластины, ослабленной отверстием, находящейся под действием осевого сжимающего усилия. Введены безразмерные переменные, возможные типы граничных условий на сторонах пластины и контуре отверстия.

Изложение новых результатов начинается в параграфе 1.5, где исследовано влияние площади одиночного центрального квадратного отверстия на критическую нагрузку пластины под действием осевого сжатия при разных типах граничных условий. Для случая шарнирного опирания боковых сторон пластины и незакреплённых боковых сторон произведено сравнение результатов моделирования с аналитической формулой “приведённой толщины”.

В параграфе 1.6. изучено влияние пропорций пластины на величину критической нагрузки. Для однородной пластины обнаружено хорошее совпадение численных и аналитических результатов.

Для пластины с отверстием в зависимости от соотношения сторон пластины r произведено сравнение вычисленной величины критической нагрузки q_{cr} с аналитическими значениями, полученных для пластины без отверстия и с формулой (1), полученной И. Н. Преображенским и имеющей вид:

$$q_{cr} = k_x \frac{\pi^2 D_0}{b^2}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
 k_x &= c \left[g(S - S^*) - \frac{g}{4\alpha\beta}(2\varrho + m_{12}m_{22} + 2(1 - \mu)\alpha\beta\varrho) \right]; \\
 c &= \frac{b^2}{S\pi^2(\alpha^2 + \lambda\beta^2)}; a_1^* = x_2 - x_1; b_1^* = y_2 - y_1; \\
 \lambda &= \frac{q_x}{q_y}; g = (\alpha^2 + \beta^2)^2; \varrho = m_{12}b_1^*\beta + m_{22}a_1^*\alpha; \\
 m_{12} &= \sin 2\alpha x_1 - \sin 2\alpha x_2; m_{22} = \sin 2\beta y_1 - \sin 2\beta y_2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где x_1, x_2, y_1 и y_2 — координаты вершин прямоугольного выреза, $S^* = a_1^*b_1^*$ — площадь выреза, D_0 — цилиндрическая жёсткость пластины, $S = ab$ — площадь пластины, q_x, q_y — величины сжимающих усилий, приложенных соответственно к торцам и боковым сторонам пластины, $\alpha = n\pi/a; \beta = m\pi/b$; n и m — число полуволн, образующихся в пластинке после потери устойчивости, соответственно вдоль сторон a и b .

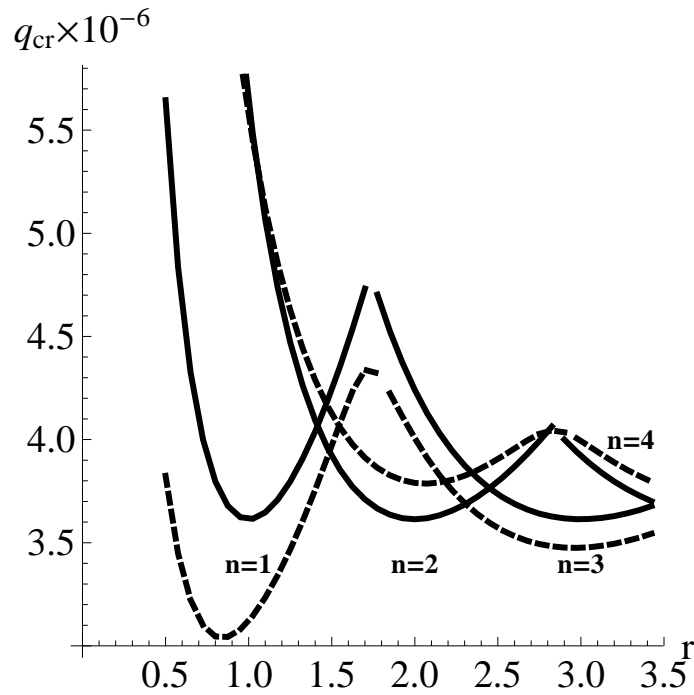


Рис. 1. Зависимость величины критической нагрузки для однородной пластины (сплошная линия) и пластины с квадратным отверстием со стороной $d = 0.1$ (пунктир) от соотношения сторон пластины r для разных волновых чисел n .

На рис. 1 произведено сравнение критической нагрузки для пластины с центральным квадратным отверстием со стороной $d = 0.1$ и для пластины без

отверстия при различных соотношений сторон пластины r . Наличие отверстия приводит к падению величины критической нагрузки для нечётных волновых чисел n (количество волн в форме потери устойчивости пластины в направлении действия осевой сжимающей силы) и рост для чётных n . Обнаружено, что наличие отверстия в пластине ведёт не только к уменьшению её жёсткости, но и к увеличению начальных напряжений вблизи отверстия, которые тем больше, чем более жёсткие граничные условия заданы на боковых сторонах, что может привести к росту критической нагрузки при увеличении размера отверстия. Заметное влияние на увеличение критической нагрузки оказывает рост коэффициента Пуассона.

Параграфы 1.7-1.8 посвящены вопросам влияния пропорций центрального прямоугольного отверстия и граничных условий на величину критической нагрузки. Оказывается, что увеличение длины отверстия вдоль оси действия сжимающей силы приводит к снижению критической нагрузки, а увеличение длины в поперечном направлении влечёт за собой рост величины критической нагрузки.

Параграф 1.9 посвящён изучению влияния формы и положения отверстия. Показано, что форма отверстия в пластине не оказывает существенного влияния на величину критической нагрузки, хотя для длинных пластин, длина которых в три раза превышает ширину, критическая нагрузка квадратного отверстия немного превышает нагрузку для круглого отверстия. Смещение отверстия из центра вдоль оси сжатия пластины приводит к монотонному падению величины критической нагрузки до тех пор, пока отверстие расположено далеко от края пластины. Наибольшее влияние на величину критической нагрузки оказывает смещение отверстия к боковым сторонам пластины. В таком случае критическая нагрузка падает быстрее.

В параграфе 1.10 анализируется устойчивость шарнирно опертой по контуру перфорированной пластины, т.е. ослабленной несколькими отверстиями,

расположенными равноудалённо вдоль средних линий пластины в вертикальном или горизонтальном направлениях. В случае осевой перфорации выявлены “резонансные” значения для числа отверстий, кратного волновому числу формы потери устойчивости. Поперечная перфорация приводит к монотонному уменьшению критической нагрузки при увеличении числа отверстий.

Устойчивость кольцевых пластин исследуется в параграфе 1.11, где изучено влияние размера отверстия на устойчивость кольцевой пластины для граничных условий шарнирного опирания и жёсткой заделки наружных краёв пластины. Исследовано влияние пропорций отверстия в виде эллиптического выреза на устойчивость. Обнаружено, что рост эксцентриситета приводит к увеличению критической нагрузки.

Результаты первой главы (для прямоугольных пластин) опубликованы в работе [2].

Вторая глава посвящена численному исследованию устойчивости прямых круговых цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями. В начале параграфа рассмотрена задача об устойчивости однородной шарнирно опертой цилиндрической оболочки под действием нормального давления и осевого сжатия. Для первого случая асимптотическая формула критической нагрузки получена Саутуэллом и Папковичем:

$$\lambda_{cr} = \frac{0,856E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h^5}{L^2 R^3} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

а для второго — Лоренцем и Типошенко

$$\lambda_{cr} = -Eh^2 / \left[R \sqrt{3(1-\nu^2)} \right], \quad (4)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона для материала оболочки, L, R, h — соответственно её длина, радиус и толщина. Сравнение асимптотических и численных результатов для однородной оболочки выявило их хорошее согласование.

Изложение новых результатов начинается в параграфе 2.1, посвящённом устойчивости цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями, под действием нормального давления. Изучается влияние площади одиночного квадратного отверстия на устойчивость шарнирно опёртой цилиндрической оболочки, которое приводит к расщеплению кратных критических нагрузок. Сравнение полученных результатов с работами других авторов показало совпадение характера поведения критической нагрузки. Произведён анализ влияния формы отверстия. Выявлено, что для круглого отверстия падение критической нагрузки происходит менее интенсивно, чем в случае квадратного отверстия.

Далее изучается влияние положения отверстия на величину критической нагрузки. Рассматривалось два типа закрепления торцов оболочки — шарнирное опирание и жёсткая заделка. Единственное центральное квадратное отверстие смещалось с центральной параллели цилиндра вдоль его оси к краю. Установлено, что смещение отверстия в осевом направлении не оказывает существенного влияния на величину критической нагрузки. В случае жёсткой заделки краёв оболочки наблюдаются меньшие флуктуации критической нагрузки, по сравнению с шарнирно опёртой оболочкой.

Представлены результаты исследования влияния пропорций центрально расположенного прямоугольного отверстия постоянной площади на величину критической нагрузки. Выявлено, что вытягивание отверстия вдоль параллели приводит к более сильному падению критической нагрузки.

В завершении параграфа 2.1 проведено исследование влияния перфорации на критические нагрузки. Под перфорацией понимается ослабление оболочки несколькими отверстиями, расположенными равномерно на центральной параллели цилиндра. Результаты численных экспериментов приведены на рисунке 2, где изображена зависимость первых двух кратных критических нагрузок от количества отверстий k . Общая площадь отверстий остаётся посто-

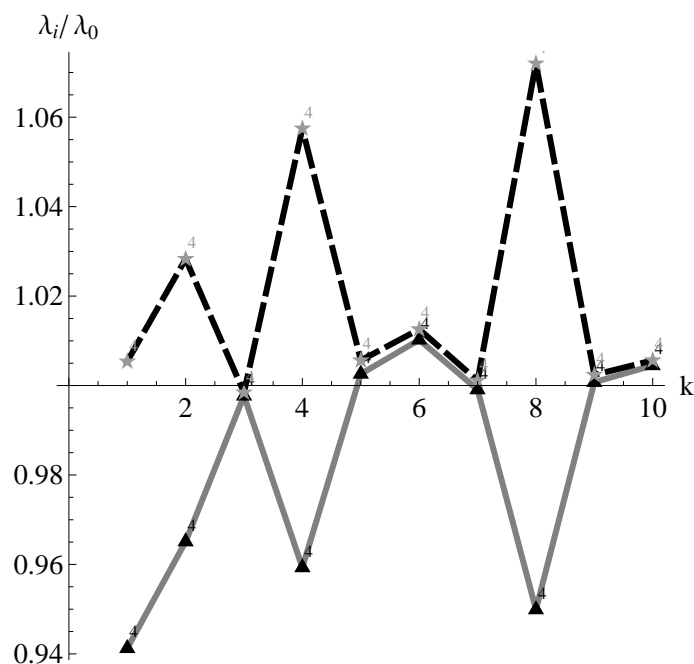


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки λ (сплошная линия — первая кратная нагрузка, пунктир — вторая) от количества отверстий k при общей постоянной площади для шарнирно опёртой цилиндрической оболочки под действием нормального давления.

янной при изменении k . В узлах указано количество волн в окружном направлении в форме потери устойчивости. Обнаружено сильное влияние взаимодействия отверстий и формы: если волновое число кратно количеству отверстий на оболочке, имеет место максимальное падение величины критической нагрузки и максимальное расхождение значений нагрузок для кратных форм.

Устойчивость цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями, находящихся под действием осевого сжатия рассмотрена в параграфе 2.2. Обнаружено, что при формах потери устойчивости оболочки с небольшим волновым числом в окружном направлении формула Лоренца-Тимошенко (4) имеет существенную погрешность, порядка 10%, поэтому при вычислении критической нагрузки использовалась уточнённая формула (П. Е. Товстик):

$$\lambda_{cr} = Eh \min_{m,n} \left(\mu^4 \frac{(\lambda_m^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1}{\lambda_m^2(1 + n^{-2})} + \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)^2(1 + n^{-2})} \right), \quad (5)$$

где $\lambda_m = m\pi/L$. В этом случае расхождение численных и асимптотических

результатов оказалось менее 1%.

Исследована зависимость критической нагрузки от размера единственного квадратного выреза. Обнаружено быстрое падение несущей способности оболочки по мере роста площади отверстия. Появление выреза приводит к локализации формы потери устойчивости в районе отверстия. Показано, что для круглого отверстия падение критической нагрузки происходит менее интенсивно, чем в случае квадратного отверстия, из-за возникновения дополнительных напряжений в углах квадратного выреза.

Произведён анализ влияния пропорций прямоугольного отверстия. Выявлено, что увеличение длины стороны прямоугольника вдоль параллели цилиндра оказывает наибольшее влияние на падение критической нагрузки.

В заключении параграфа 2.2 рассматривается воздействие окружной перфорации на устойчивость цилиндрической оболочки. Отмечена локализация деформаций около отверстий. Показано, что уменьшение площади каждого отверстия, происходящее по мере роста их количества, приводит к росту несущей способности оболочки. Локализация формы потери устойчивости вокруг отверстий препятствует появлению “резонансных” форм, имеющих место в случае нормального давления.

Результаты второй главы опубликованы в работе [3].

В третьей главе исследуется влияние отверстия на устойчивость тонких прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек из ортотропных материалов, слабо отличающихся от изотропных.

Аналитическая формула для вычисления величины критической нагрузки ортотропной прямоугольной шарнирно опертой пластины имеет вид:

$$N_{cr} = \pi^2 \left[D_{11} \left(\frac{n}{a} \right)^2 + 2H^* \left(\frac{m}{b} \right)^2 \left(\frac{n}{a} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{m}{b} \right)^4 \right], \quad (6)$$

где $H^* = \nu_{yx} D_{11} + \frac{Gh^3}{6}$, D_{11} и D_{22} — изгибные жёсткости по главным направлениям, ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона по главным направлениям, G — модуль

сдвига.

При рассмотрении ортотропных пластин введён коэффициент ϵ , характеризующий изменение жёсткости пластины в ортогональных направлениях:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0(1 + |\epsilon|)^{\text{sign } \epsilon}, E_y = E_0(1 + |\epsilon|)^{-\text{sign } \epsilon}, \\ \nu_{xy} &= \nu_0(1 + |\epsilon|)^{-\text{sign } \epsilon}, \\ E_x \nu_{yx} &= E_y \nu_{xy} = E_0 \nu_0, G = E_0 / (2(1 + \nu_0)), \end{aligned} \quad (7)$$

где E_0, ν_0 — постоянные величины. При этом при $\epsilon = 0$ материал пластины является изотропным.

Сравнение численных и аналитических результатов для ортотропных однородных пластин при $\epsilon = -2 \dots 2$ выявило хорошее соответствие.

Далее для ортотропной пластины под действием осевого сжатия исследуется зависимость критической нагрузки от размера отверстия. Отмечено, что по сравнению с аналогичной изотропной пластиной, критическая нагрузка для ортотропной пластины монотонно возрастёт с уменьшением $\epsilon < 0$ и убывает при положительных ϵ , т.е. уменьшение жёсткости в поперечном направлении ведёт к снижению величины критической нагрузки. Показано, что при увеличении отношения сторон пластины более существенное влияние на величину критической нагрузки оказывают свойства материала, а не размер отверстия.

Расчёт устойчивости ортотропной круговой цилиндрической оболочки с отверстием, находящейся под действием нормального давления, приведён в параграфе 3.2. Приближенная формула для критической нагрузки однородной ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид:

$$N_{cr} = 4 \frac{\pi R}{L} \left(\frac{B_x}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_\phi}{3R^3} \right)^{3/4}, \quad D_\phi = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \quad (8)$$

где R — радиус оболочки, L — длина, $B_x = E_x h$ — жёсткость на растяжение-сжатие в осевом направлении, D_ϕ — изгибная жёсткость в окружном направлении, h — толщина. Произведено сравнение численных и аналитических результатов

для оболочки без отверстия. Отмечено падение критической нагрузки по мере роста площади отверстия, а также сохранение характера зависимости критической нагрузки от ϵ при различных величинах отверстия.

В заключении главы исследуется влияние свойств ортотропного материала шарнирно опертой цилиндрической оболочки, ослабленной одним центральным прямоугольным отверстием постоянной площади. Отмечено, что увеличение жёсткости материала в окружном направлении (при постоянном размере отверстия) ведёт к монотонному росту величины критической нагрузки. Взаимодействие отверстия и формы потери устойчивости может привести к резким падениям величины критической нагрузки. Так, при относительно больших площадях отверстия критическая нагрузка оказывается весьма чувствительной к небольшому изменению пропорций отверстия.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [1].

В Заключении приводятся основные результаты работы.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

[1] *Лебедев А. В.* Влияние вырезов на устойчивость прямоугольных упругих пластин при осевом сжатии // *Вестник Санкт-Петербургского Университета.* — 2009. — № 4. — С. 77–83.

[2] *Лебедев А. В.* Устойчивость пластин, ослабленных отверстиями // *Вестник Санкт-Петербургского Университета.* — 2009. — № 2. — С. 94–99.

Другие публикации

[3] *Лебедев А. В.* Устойчивость цилиндрической оболочки, ослабленной отверстиями // *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды».* 2004-2005 гг. — 2005. — С. 108–126.

- [4] *Лебедев А. В.* Устойчивость пластин и оболочек, ослабленных отверстиями // Межд. Научная конф. по механике. Пятое Поляховские чтения, Тезисы докладов. — СПб: 2009. — С. 171.
- [5] *Лебедев А. В.* Устойчивость прямоугольных пластин, ослабленных отверстием // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2008-2009 гг. — 2009. — С. 142.
- [6] *Лебедев А. В., Микрюков С. Н., Смирнов А. Л.* Численный анализ свободных колебаний и устойчивости цилиндрической оболочки с отверстием // Обозрение прикладной и промышленной математики. Тезисы докладов. — Т. 12. — 2005. — С. 162–163.
- [7] *Smirnov A. L., Lebedev A. V.* Buckling of plates and shells weakened with cut-outs // 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics. Book of Abstracts / Ed. by M. Papadrakakis, M. Kojic, V. Papadopoulos. — Zografou Campus, Athens 15780, Greece: 2009. — June. — P. 209.
- [8] *Smirnov A. L., Lebedev A. V.* Buckling of plates and shells weakened with cut-outs // SEECCM 2009. 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics / Ed. by M. Papadrakakis, M. Kojic, V. Papadopoulos. — Athens: Institute of Structural Analysis and Seismic Research, National Technical University of Athens, 2009. — June. — Pp. 1–7.