САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛЕ Тхи Ни Бик

ВЭЙВЛЕТЫ (ВСПЛЕСКИ) НЕНУЛЕВОЙ ВЫСОТЫ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2010

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВАГЕР Борис Георгиевич (Государственный Архитектурно-строительный университет (ГАСУ))
	доктор физико-математических наук, профессор РЯБОВ Виктор Михайлович (Санкт-Петербургский государственный университет)
Ведущая организация:	Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится "____" ____________ 2010 г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им.М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Автореферат разослан "____" ____________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Даугавет И. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача сокращения объемов цифровой информации за счет отбрасывания несущественных ее составляющих весьма актуальна, причем степень важности эффективного решения этой задачи постоянно возрастает. На первом месте среди средств решения этой задачи несомненно находятся вэйвлеты (всплески), что подтверждается большим числом приложений в различных технических и научных областях. Тем не менее остается актуальной разработка новых типов вэйвлетов (всплесков) и исследование их свойств. К новым типам вэйвлетов относятся вэйвлеты ненулевой высоты, разработки которых будут посвящены в данной работе.

Разработка новых алгоритмов сплайн-вэйвлетного разложения актуальна и в вопросах шифрования, потому что многие типы известных вэйвлетов обеспечивают быстрое, но весьма неточное сжатие. В данной работе используются сплайн-вэйвлетные системы с гарантированно высокой точностью приближения гладких цифровых потоков. Они приводят к эффективному сжатию и к достаточно точному результату, ибо учитывают "гладкость" обрабатываемого потока цифровой информации. Для случаев, когда исходный поток интерпретируется как значения гладкой функции на некоторой сетке, разработаны сплайн-вэйвлетные разложения лагранжева типа. В тех случаях, когда исходный поток распадается на два потока — на поток значений функции и на поток значений ее производной в узлах сетки, построены сплайн-вэйвлетные разложения эрмитова типа.

При разложении исходного информационного потока на основной и вэйвлетный потоки основными характеристиками служат малость компонент вэйвлетного потока, степень разреженности основного потока (по сравнению с исходным потоком), степень сложности формул декомпозиции/реконструкции и погрешность восстановления исходного потока; они определяют возможности экономии ресурсов вычислительной системы (ВС) и каналов связи (времени передачи, времени обработки и необходимых объемов памяти ВС). Сплайн-вэйвлетные разложения для потоков, определяемых гладкими (и дифференцируемыми) функциями, обладают свойствами асимптотической оптимальности по N-поперечнику аппроксимируемых компактов и простотой формул декомпозиции и реконструкции; возможность использовать неравномерную сетку и неполиномиальные сплайны приводит к определенной гибкости при выборе упомянутых разложений и к дальнейшему улучшению их характеристик.

Разработке сплайн-вэйвлетного разложения эрмитова типа первой высоты была посвящена работа Ю.К. Демьяновича и А.В. Зимина; при этом рассматривается вэйвлетное разложение потоков, включающих поток значений производной аппроксимируемой функции, и строится вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа (на неравномерной сетке), не встречавшееся ранее даже в полиномиальном случае. В данной работе разрабатывается сплайн-вэйвлетное разложение эрмитова типа второй и третьей высоты; полученные здесь теоретические результаты проиллюстрированы на модельных примерах.

Цель работы.

- Разработать новые сплайн-вэйвлетные разложения в следующих случаях:

  1. когда исходный поток распадается на три потока — на поток значений функции, на поток значений ее производной и на поток значений ее второй производной в узлах сетки (вэйвлетное разложение спайнов эрмитова типа второй высоты);
  2. когда исходный поток распадается на четыре потока — на поток значений функции, на поток значений ее производной, на поток значений ее второй производной и на поток значений ее третьей производной в узлах сетки (вэйвлетное разложение спайнов эрмитова типа третьей высоты);
  3. когда исходный поток можно интерпретировать как поток значений гладкой функции, определенной на интервале (α, β) вещественной оси при замене производных на разности.

- Привести формулы оценки устойчивости и аппроксимации.

- Провести практическую апробацию полученных результатов на модельных задачах.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры и функционого анализа. Для построений применен метод апроксимационных соотношений.

Достоверность и обоснованность. Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами; результаты согласуются с проведенными практическими экспериментами.

Основные результаты. В работе получены следующие основные научные результаты:

1. Получено сплайн-вэйвлетное разложение эрмитова типа второй высоты для весьма произвольных генерирующих дважды непрерывно дифференцируемых функций. Полученные базисные вэйвлеты дважды непрерывно дифференцируемы и имеют компактный носитель, причем добавление одного узла ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на три единицы. Выводятся новые формулы декомпозиции и реконструкции.

2. Получено сплайн-вэйвлетное разложение эрмитова типа третьей высоты для весьма произвольных генерирующих трижды непрерывно дифференцируемых функций. Полученные базисные вэйвлеты трижды непрерывно дифференцируемы и имеют компактный носитель, причем добавление одного узла ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на четыре единицы. Здесь также установлены формулы декомпозиции и реконструкции.

3. Получено сплайн-вэйвлетное разложение эрмитова типа при замене производной на разности для весьма произвольных гладких функций. Полученные базисные вэйвлеты непрерывны, имеют компактный носитель, причем добавление двух узлов ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на две единицы. Здесь также установлены новые формулы декомпозиции и реконструкции, основанные на замене производных разностными отношениями.

4. Приведены оценки устойчивости и аппроксимации для случая сплайн-вэйвлетного разложения эрмитова типа первой высоты.

5. Доказан ряд теорем, связанных с построением новых вэйвлетных разложений и созданием формул декомпозиции и реконструкции.

6. Написана программа для апробации теоретических результатов на некоторых модельных задачах. Полученные численные эксперименты согласуются с созданной теорией (малая погрешность вычислений происходит из-за ошибок округления).

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Теоретическая ценность работы состоит в обогащении теории в области обработки больших числовых массивов информации с помошью вэйвленого разложения. Полученные результаты могут быть применены для создания эффективных алгоритмов решения многих прикладных задач, связанных с обработкой больших числовых массивов информации, в часности к обработке изображений и к задачам аппроксимации.
Апробация работы. Полученные результаты обсуждались на семинарах кафедры параллельных алгоритмов (2008-2010г.) и докладывались на XL и XLI Международной научной конференции "Процессы управления и устойчивость", С-Петербург, 6-9 апреля 2009 и 5-8 апреля 2010, и на XVI Всероссийской научно-методической конференции "Телематика", С-Петербург, 22-25 июня 2009.
Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах [1–5]. Из них два публикации [1, 2] в журналах из перечня ВАК. Работы [1], [2], [4] написаны в соавторстве. В работах [1, 2, 4] Ю.К.Демьяновичу принадлежат постановки задач вэйвлетного разложения сплайнов эрмитова типа второй, третьей высоты, и вэйвлетного разложения сплайнов эрмитова типа при замене производных на разности, а соискателю принадлежит решение поставленных задач: построение вэйвлетного разложения и вывод формул декомпозиции/реконструкции. В работе [5], Ю.К.Демьяновичу принадлежит идея построения программы , а соискателю принадлежат реализации и обоснования описываемых методов, создание демонстрационных примеров и программных средств.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 88 источников. Текст занимает 112 страниц, содержит 8 рисунков и три таблицы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность тематики диссертационной работы и кратко излагаются ее основные результаты.

В **первой главе** "Некоторые понятия и результаты" рассматривается основная идея вэйвлетного преобразования, приведены некоторые понятия теории вэйвлетов: пространство вэйвлетов, вэйвлетное разложение и формулы декомпозиции, реконструкции, а также кратно-масштабные соотношения,... проиллюстрированные на примере вэйвлетов Хаара. В пункте 1.8 приведены результаты Ю.К.Демьяновича и А.В.Зимина о вэйвлетным разложение пространств сплайнов эрмитова типа первой высоты; изложенную там основную идею автор диссертации использует для развития теории сплайн-вэйвлетных разложений.

Во **второй главе** "Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа" рассматриваются вэйвлетные разложения сплайнов эрмитова типа второй и третьей высоты и вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа при замене производной на разности. Кроме того, получены оценки устойчивости и аппроксимации. Базисы таких сплайнов отыскиваются из аппроксимационных соотношений при минимальной (почти везде на рассматриваемом промежутке) кратности накрытия носителями базисных функций; таким образом, эти сплайны относятся к классу минимальных.

В пункте 2.1 рассматривается разложение числовых потоков, включающих поток значений первой и второй производной аппроксимируемой функции (как правило, это улучшает качество аппроксимации), строится всплесковое разложение сплайнов эрмитова типа. Строятся вэйвлетные разложения и выводятся формулы декомпозиции/реконструкции. Полученные базисные вэйвлеты дважды дифференцируемы и имеют компактный носитель, причем добавление одного узла ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на три единицы.

Итак, рассмотрим шестикомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ класса $C^2(\alpha,\beta)$, удовлетворяющую условию
(B) $\quad W_B \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi''(x),\varphi'(x),\varphi(x),\varphi''(y),\varphi'(y),\varphi(y)) \neq 0$, для всех различных $x,y \in (\alpha,\beta), x \neq y$.

Пусть X – сетка вида

$$X : \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots; \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j.$$

Введем обозначения:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in \mathrm{Z}} (x_j, x_{j+1}), \quad \varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k), \quad \varphi'_k, \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_k) \quad \varphi''_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_k).$$

Функции $\omega_{3j-2}(t), \omega_{3j-1}(t)$ и $\omega_{3j}(t), t \in G, j \in \mathbf{Z}$, определим из аппроксимационных соотношений

$$\sum_j \left(\varphi''_{j+1}\omega_{3j-2}(t) + \varphi'_{j+1}\omega_{3j-1}(t) + \varphi_{j+1}\omega_{3j}(t)\right) = \varphi(t)$$

при условиях
$\mathrm{supp}\omega_{3j-2} \subset [x_j, x_{j+2}], \quad \mathrm{supp}\omega_{3j-1} \subset [x_j, x_{j+2}], \quad \mathrm{supp}\omega_{3j} \subset [x_j, x_{j+2}].$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t) \in C^2(\alpha, \beta)$, и выполнено условие (B). При любом $q \in \mathbf{Z}$ функции $\omega_{3q-2}(t), \omega_{3q-1}(t)$ и $\omega_{3q}(t)$ могут быть продолжены на весь интервал (α, β) до функций класса $C^2(\alpha, \beta)$, так что*

$$\omega_{3q-2}(x_q) = \omega_{3q-2}(x_{q+1}) = \omega_{3q-2}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega'_{3q-2}(x_q) = \omega'_{3q-2}(x_{q+1}) = \omega'_{3q-2}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega''_{3q-2}(x_q) = 0, \quad \omega''_{3q-2}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega''_{3q-2}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega_{3q-1}(x_q) = \omega_{3q-1}(x_{q+1}) = \omega_{3q-1}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega'_{3q-1}(x_q) = 0, \quad \omega'_{3q-1}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega'_{3q-1}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega''_{3q-1}(x_q) = \omega''_{3q-1}(x_{q+1}) = \omega''_{3q-1}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega_{3q}(x_q) = 0, \quad \omega_{3q}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega_{3q}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega'_{3q}(x_q) = \omega'_{3q}(x_{q+1}) = \omega'_{3q}(x_{q+2}) = 0,$$
$$\omega''_{3q}(x_q) = \omega''_{3q}(x_{q+1}) = \omega''_{3q}(x_{q+2}) = 0.$$

Добавляя ξ к сетке X, $\xi \in (x_k, x_{k+1})$, получим новую сетку $\overline{X}$. Обозначим $\overline{x}_j = x_j$ при $j \leq k$, $\quad \overline{x}_j = x_{j-1}$ при $j \geq k+2$, $\quad \overline{x}_{k+1} = \xi$. Построим новые базисные функции $\overline{\omega}_j(t), j \in \mathbf{Z}$, аналогичным методом.

Теорема 2. *Если выполнено условие (B), то при $t \in (\alpha, \beta)$ справливы соотношения*

$$\omega_i(t) = \sum_{j \in Z} \mathfrak{p}_{ij} \overline{\omega}_j(t),$$

где

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{ij} \ \textit{при}\ j \leq 3k-3,$$
$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j-3} \ \textit{при}\ j \geq 3k+1,$$
$$\mathfrak{p}_{i,3k-2} = 0 \ \textit{при}\ (i \leq 3k-6) \vee (i \geq 3k+1),$$
$$\mathfrak{p}_{3k-5,3k-2} = \omega''_{3k-5}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-4,3k-2} = \omega''_{3k-4}(\xi),$$
$$\mathfrak{p}_{3k-3,3k-2} = \omega''_{3k-3}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-2,3k-2} = \omega''_{3k-2}(\xi),$$
$$\mathfrak{p}_{3k-1,3k-2} = \omega''_{3k-1}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k,3k-2} = \omega''_{3k}(\xi),$$
$$\mathfrak{p}_{i,3k-1} = 0 \ \textit{при}\ (i \leq 3k-6) \vee (i \geq 3k+1),$$
$$\mathfrak{p}_{3k-5,3k-1} = \omega'_{3k-5}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-4,3k-1} = \omega'_{3k-4}(\xi),$$
$$\mathfrak{p}_{3k-3,3k-1} = \omega'_{3k-3}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-2,3k-1} = \omega'_{3k-2}(\xi),$$

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{p}_{3k-1,3k-1} = \omega'_{3k-1}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k,3k-1} = \omega'_{3k}(\xi), \\
\mathfrak{p}_{i,3k} = 0 \text{ при } (i \le 3k-6) \vee (i \ge 3k+1), \\
\mathfrak{p}_{3k-5,3k} = \omega_{3k-5}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-4,3k} = \omega_{3k-4}(\xi), \\
\mathfrak{p}_{3k-3,3k} = \omega_{3k-3}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k-2,3k} = \omega_{3k-2}(\xi), \\
\mathfrak{p}_{3k-1,3k} = \omega_{3k-1}(\xi), \quad \mathfrak{p}_{3k,3k} = \omega_{3k}(\xi),
\end{gathered}
$$

Над пространством $C^2(\alpha, \beta)$ рассмотрим систему линейных функционалов $\{g_i\}_{i \in Z}$, определяемых соотношениями

$$
\langle g_{3q-2}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u''(x_{q+1}), \quad \langle g_{3q-1}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u'(x_{q+1}), \quad \langle g_{3q}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{q+1}).
$$

Обозначим $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i, \overline{\omega}_j \rangle$.

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{q}_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \le 3k-3, \quad \mathfrak{q}_{ij} = \delta_{i,j-3} \text{ при } j \ge 3k+1, \\
\mathfrak{q}_{i,3k-2} = \mathfrak{q}_{i,3k-1} = \mathfrak{q}_{i,3k} = 0 \quad \forall i \in \mathbf{Z}.
\end{gathered}
$$

Теорема 4. *(Формулы декомпозиции). Для всплескового разложения справедливы следующие соотношения :*

$$
\begin{gathered}
a_i = c_i \text{ при } i \le 3k-3, \quad a_i = c_{i+3} \text{ при } i \ge 3k-2, \\
b_j = 0 \text{ при } (i \le 3k-3) \vee (j \ge 3k+1), \\
b_{3k-2} = c_{3k-2} - c_{3k-5} w''_{3k-5}(\xi) - c_{3k-4} w''_{3k-4}(\xi) - c_{3k-3} w''_{3k-3}(\xi) - \\
- c_{3k+1} w''_{3k-2}(\xi) - c_{3k+2} w''_{3k-1}(\xi) - c_{3k+3} w''_{3k}(\xi), \\
b_{3k-1} = c_{3k-1} - c_{3k-5} w'_{3k-5}(\xi) - c_{3k-4} w'_{3k-4}(\xi) - c_{3k-3} w'_{3k-3}(\xi) - \\
- c_{3k+1} w'_{3k-2}(\xi) - c_{3k+2} w'_{3k-1}(\xi) - c_{3k+3} w'_{3k}(\xi), \\
b_{3k} = c_{3k} - c_{3k-5} w_{3k-5}(\xi) - c_{3k-4} w_{3k-4}(\xi) - c_{3k-3} w_{3k-3}(\xi) - \\
- c_{3k+1} w_{3k-2}(\xi) - c_{3k+2} w_{3k-1}(\xi) - c_{3k+3} w_{3k}(\xi).
\end{gathered}
$$

Теорема 5. *(Формулы реконструкции). Пусть известны коэффициенты a_i, b_{3k-2}, b_{3k-1}, b_{3k} в разложениях проекций элемента $\tilde{u} \in S^2_\varphi(\overline{X})$ на пространство $S^2_\varphi(X)$ и W, $P\tilde{u} = \sum\limits_i a_i \omega_i$, $Q\tilde{u} = b_{3k-2}\overline{\omega}_{3k-2} + b_{3k-1}\overline{\omega}_{3k-1} + b_{3k}\overline{\omega}_{3k}$. Тогда коэффициенты c_k в формуле $\tilde{u} = \sum\limits_k c_k \overline{\omega}_k$ имеют вид*

$$
\begin{gathered}
c_i = a_i \text{ \textit{при} } i \le 3k-3, \quad c_i = a_{i-3} \text{ \textit{при} } i \ge 3k+1, \\
c_{3k-2} = b_{3k-2} + a_{3k-5}w''_{3k-5}(\xi) + a_{3k-4}w''_{3k-4}(\xi) + a_{3k-3}w''_{3k-3}(\xi) + \\
+ a_{3k-2}w''_{3k-2}(\xi) + a_{3k-1}w''_{3k-1}(\xi) + a_{3k}w''_{3k}(\xi), \\
c_{3k-1} = b_{3k-1} + a_{3k-5}w'_{3k-5}(\xi) + a_{3k-4}w'_{3k-4}(\xi) + a_{3k-3}w'_{3k-3}(\xi) + \\
+ a_{3k-2}w'_{3k-2}(\xi) + a_{3k-1}w'_{3k-1}(\xi) + a_{3k}w'_{3k}(\xi), \\
c_{3k} = b_{3k} + a_{3k-5}w_{3k-5}(\xi) + a_{3k-4}w_{3k-4}(\xi) + a_{3k-3}w_{3k-3}(\xi) + \\
+ a_{3k-2}w_{3k-2}(\xi) + a_{3k-1}w_{3k-1}(\xi) + a_{3k}w_{3k}(\xi).
\end{gathered}
$$

В пункте 2.2 рассматривается разложение числовых потоков, включающих поток значений третьей производной аппроксимируемой функции, что в ряде случаев позволяет улучшить качество аппроксимации; строится вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа. Полученные базисные вэйвлеты три раза дифференцируемы и имеют компактный носитель, причем добавление одного узла ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на четыре единицы.

Рассмотрим восьми-компонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ класса $C^3(\alpha,\beta)$, удовлетворяющую условию:

$$
(C) \quad W_C \stackrel{def}{=} \det(\varphi'''(x), \varphi''(x), \varphi'(x), \varphi(x), \varphi'''(y), \varphi''(y), \varphi'(y), \varphi(y)) \neq 0
$$

для всех различных $x, y \in (\alpha,\beta), x \neq y$.

Введем обозначения: $\varphi'''_k \stackrel{def}{=} \varphi'''(x_k)$. Функции $\omega_{4j-3}(t), \omega_{4j-2}(t), \omega_{4j-1}(t), \omega_{4j}(t), t \in G, j \in \mathbf{Z}$, определим из аппроксимационных соотношений:

$$
\sum_j \left(\varphi'''_{j+1}\omega_{4j-3}(t) + \varphi''_{j+1}\omega_{4j-2}(t) + \varphi'_{j+1}\omega_{4j-1}(t) + \varphi_{j+1}\omega_{4j}(t) \right) = \varphi(t)
$$

при условиях $\mathrm{supp}\omega_{4j-3} \subset [x_j, x_{j+2}]$, $\mathrm{supp}\omega_{4j-2} \subset [x_j, x_{j+2}]$, $\mathrm{supp}\omega_{4j-1} \subset [x_j, x_{j+2}]$, $\mathrm{supp}\omega_{4j} \subset [x_j, x_{j+2}]$.

Теорема 6. *Пусть $\varphi(t) \in C^3(\alpha,\beta)$, и выполнено условие (C). При любом $q \in \mathbf{Z}$ функции $\omega_{4q-3}(t), \omega_{4q-2}(t), \omega_{4q-1}(t)$ и $\omega_{4q}(t)$ могут быть продолжены на весь интервал (α,β) до функций класса $C^3(\alpha,\beta)$. Кроме того выполнены соотношения:*

$$
\omega^{(i)}_{4q-s}(x_j) = \delta_{q+1,j}\delta_{s,i},
$$

где $i = 0, 1, 2, 3; j = q, q+1, q+2; s = 0, 1, 2, 3; q \in \mathbf{Z}$.

Теорема 7. *Если выполнено условие (C), то при* $t \in (\alpha, \beta)$ *справедливы соотношения*

$$\omega_i(t) = \sum_{j \in Z} \mathfrak{p}_{ij} \overline{\omega}_j(t),$$

где

$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \le 4k-4,$$
$$\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j-4} \text{ при } j \ge 4k+1,$$
$$\mathfrak{p}_{i,4k-s} = 0 \text{ при } s = 0,1,2,3, \quad (i \le 4k-8) \vee (i \ge 4k+1),$$
$$\mathfrak{p}_{i,4k-s} = \omega_i^{(s)}(\xi) \text{ при } s = 0,1,2,3, \quad 4k-7 \le i \le 4k.$$

Над пространством $C^3(\alpha, \beta)$ рассмотрим систему линейных функционалов $\{g_i\}_{i \in Z}$, определяемых соотношениями

$$\langle g_{4q-s}, u \rangle \stackrel{def}{=} u^{(s)}(x_{q+1}), \text{ при } s = 0,1,2,3.$$

Обозначим $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{def}{=} \langle g_i, \overline{\omega}_j \rangle$.

Теорема 8. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \le 4k-4, \quad \mathfrak{q}_{ij} = \delta_{i,j-4} \text{ при } j \ge 4k+1,$$
$$\mathfrak{q}_{i,4k-3} = \mathfrak{q}_{i,4k-2} = \mathfrak{q}_{i,4k-1} = \mathfrak{q}_{i,4k} = 0 \quad \forall i \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 9. *(Формулы декомпозиции). Для всплескового разложения справедливы следующие соотношения :*

$$a_i = c_i \text{ при } i \le 4k-4, \quad a_i = c_{i+4} \text{ при } i \ge 4k-3,$$
$$b_j = 0 \text{ при } (i \le 4k-4) \vee (j \ge 4k+1),$$
$$b_{4k-i} = c_{4k-i} - c_{4k-7} w_{4k-7}^{(i)}(\xi) - c_{4k-6} w_{4k-6}^{(i)}(\xi) - c_{4k-5} w_{3k-5}^{(i)}(\xi) -$$
$$- c_{4k-4} w_{4k-4}^{(i)}(\xi) - c_{4k+1} w_{4k-3}^{(i)}(\xi) - c_{4k+2} w_{4k-2}^{(i)}(\xi) -$$
$$- c_{4k+3} w_{4k-1}^{(i)}(\xi) - c_{4k+4} w_{4k}^{(i)}(\xi)$$
$$\text{при } i = 0,1,2,3.$$

Теорема 10. *(Формулы реконструкции). Пусть известны коэффициенты* a_i,

$b_{4k-3},\ b_{4k-2},\ b_{4k-1},\ b_{4k}$ *в разложениях проекций элемента* $\tilde{u} \in S^3_\varphi(\overline{X})$ *на пространство* $S^3_\varphi(X)$ *и* W, $P\tilde{u} = \sum_i a_i\omega_i, Q\tilde{u} = b_{4k-3}\overline{\omega}_{4k-3} + b_{4k-2}\overline{\omega}_{4k-2} + b_{4k-1}\overline{\omega}_{4k-1} + b_{4k}\overline{\omega}_{4k}$. *Тогда коэффициенты* c_k *в формуле* $\tilde{u} = \sum_k c_k\overline{\omega}_k$ *имеют вид*

$$\begin{gathered}
c_i = a_i \text{ при } i \le 4k-4, \quad c_i = a_{i-4}, \quad i \ge 4k+1, \\
c_{4k-i} = b_{4k-i} + a_{4k-7}w^{(i)}_{4k-7}(\xi) + a_{4k-6}w^{(i)}_{4k-6}(\xi) + a_{4k-5}w^{(i)}_{3k-5}(\xi) + \\
+ a_{4k-4}w^{(i)}_{4k-4}(\xi) + a_{4k-3}w^{(i)}_{4k-3}(\xi) + a_{4k-2}w^{(i)}_{4k-2}(\xi) + \\
+ a_{4k-1}w^{(i)}_{4k-1}(\xi) + a_{4k}w^{(i)}_{4k}(\xi) \\
\text{при } i = 0, 1, 2, 3.
\end{gathered}$$

Цель данной работы в пункте 2.3 — разработать сплайн-вэйвлетные разложения эрмитова типа в случаях, когда исходный поток можно интерпретировать как поток значений гладкой функции, определенной на интервале (α, β) вещественной оси. Замена производных разностными отношениями приводит к новому вэйвлетному разложению пространств (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов эрмитова типа. Строятся новые вэйвлетные разложения и выводятся новые формулы декомпозиции и реконструкции, основанные на замене производных разностными отношениями. Полученные базисные вэйвлеты имеют компактный носитель, причем добавление двух узлов ведет к увеличению размерности вэйвлетного пространства на две единицы.

Рассмотрим четырехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ класса $C(\alpha, \beta)$, удовлетворяющую условию:

$$(D) \quad W_D \stackrel{def}{=} \det(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z), \varphi(t)) \ne 0$$

для всех попарно различных $x, y, z, t \in (\alpha, \beta)$.

Введем обозначения $l_{2k} \stackrel{def}{=} x_{2k+1} - x_{2k}$. Функции $\omega_{2j-1}(t)$ и $\omega_{2j}(t), t \in G, j \in \mathbf{Z}$, определим из аппроксимационных соотношений

$$\sum_j \big(\frac{\varphi_{2j+3} - \varphi_{2j+2}}{l_{2j+2}}\omega_{2j-1}(t) + \varphi_{2j+2}\omega_{2j}(t)\big) = \varphi(t)$$

при условиях $\mathrm{supp}\omega_{2j-1} \subset [x_{2j}, x_{2j+4}], \quad \mathrm{supp}\omega_{2j} \subset [x_{2j}, x_{2j+4}]$.

Теорема 11. *Пусть $\varphi(t) \in C(\alpha, \beta)$ и выполнено условие (D). При любом $q \in$ $\mathbf{Z}$ функции $\omega_{2q-1}(t)$ и $\omega_{2q}(t)$ могут быть продолжены на весь интервал (α, β) до функций класса $C(\alpha, \beta)$. Кроме того, выполнены соотношения*

$$\begin{gathered}
\omega_{2q-1}(x_{2q}) = \omega_{2q-1}(x_{2q+1}) = \omega_{2q-1}(x_{2q+2}) = \omega_{2q-1}(x_{2q+4}) = 0, \\
\omega_{2q-1}(x_{2q+3}) = l_{2q+2}, \\
\omega_{2q}(x_{2q}) = \omega_{2q}(x_{2q+1}) = \omega_{2q}(x_{2q+4}) = 0, \\
\omega_{2q}(x_{2q+2}) = \omega_{2q}(x_{2q+3}) = 1.
\end{gathered}$$

Теорема 12. *Если выполнено условие (D), то при $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы соотношения*

$$\omega_i(t) = \sum_{j \in Z} \mathfrak{p}_{ij} \bar{\omega}_j(t),$$

где

$$\begin{gathered}
\mathfrak{p}_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \leq 2k-4, \quad \mathfrak{p}_{ij} = \delta_{i,j-2} \text{ при } j \geq 2k+1, \\
\mathfrak{p}_{i,2k+3} = 0 \text{ при } i \leq 2k-4 \vee i \geq 2k-1, \\
\mathfrak{p}_{2k-3,2k-3} = \frac{\omega_{2k-3}(\xi_1)}{\xi_1 - x_{2k}}, \quad \mathfrak{p}_{2k-2,2k-3} = \frac{\omega_{2k-2}(\xi_1) - 1}{\xi_1 - x_{2k}}, \\
\mathfrak{p}_{i,2k-2} = \delta_{i,2k-2} \text{ при } i \in \mathbf{Z}, \quad \mathfrak{p}_{i,2k-1} = 0 \text{ при } i \leq 2k-4 \vee i \geq 2k+1, \\
\mathfrak{p}_{2k-3,2k-1} = \frac{\omega_{2k-3}(\xi_2) - l_{2k}}{\xi_2 - x_{2k+1}}, \quad \mathfrak{p}_{2k-2,2k-1} = \frac{\omega_{2k-2}(\xi_2) - 1}{\xi_2 - x_{2k+1}}, \\
\mathfrak{p}_{2k-1,2k-1} = \frac{\omega_{2k-1}(\xi_2)}{\xi_2 - x_{2k+1}}, \quad \mathfrak{p}_{2k,2k-1} = \frac{\omega_{2k}(\xi_2)}{\xi_2 - x_{2k+1}}, \\
\mathfrak{p}_{i,2k} = 0 \text{ при } i \leq 2k-4 \vee i \geq 2k-1, \quad \mathfrak{p}_{2k-3,2k} = l_{2k}, \quad \mathfrak{p}_{2k-3,2k} = 1.
\end{gathered}$$

Рассмотрим систему линейных функционалов $\{g_i\}_{i \in Z}$ над пространством $C(\alpha, \beta)$, определяемых соотношениями

$$\langle g_{2q-1}, u \rangle \stackrel{def}{=} \frac{u(x_{2q+3}) - u(x_{2q+2})}{x_{2q+3} - x_{2q+2}}, \quad \langle g_{2q}, u \rangle \stackrel{def}{=} u(x_{2q+2}) \quad \forall q \in \mathbf{Z}.$$

Обозначим $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{def}{=} \langle g_i, \overline{\omega}_j \rangle$.

Теорема 13. *Справедливы соотношения*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{q}_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } j \leq 2k-4, \quad \mathfrak{q}_{ij} = \delta_{i,j-2} \text{ при } j \geq 2k+1, \\
\mathfrak{q}_{i,2k-3} = \mathfrak{q}_{i,2k-1} = 0 \text{ при } i \in \mathbf{Z},
\end{gathered}$$

$$\mathfrak{q}_{i,2k-2} = 0 \text{ при } (i \le 2k-4) \vee (i \ge 2k-1),$$
$$\mathfrak{q}_{2k-3,2k-2} = -\frac{1}{l_{2k}}, \quad \mathfrak{q}_{2k-2,2k-2} = 1, \quad \mathfrak{q}_{2k-3,2k} = \frac{1}{l_{2k}},$$
$$\mathfrak{q}_{i,2k} = 0 \text{ при } (i \le 2k-4) \vee (i \ge 2k-2).$$

Теорема 14. *(Формулы декомпозиции) Для вэйвлетного разложения справедливы следующие соотношения:*

$$a_i = c_i \text{ при } i \le 2k-4, \quad a_i = c_{i+2} \text{ при } i \ge 2k,$$
$$a_{2k-3} = -\frac{c_{2k-2}}{l_{2k}} + \frac{c_{2k}}{l_{2k}}, \quad a_{2k-2} = c_{2k-2}, \quad a_{2k-1} = \frac{c_{2k+1}}{l_{2k+2}},$$
$$b_{2k-3} = c_{2k-3} - \Big(-\frac{\omega_{2k-3}(\xi_1)}{(\xi_1 - x_{2k})l_{2k}} + \frac{\omega_{2k-2}(\xi_1) - 1}{\xi_1 - x_{2k}}\Big)c_{2k-2} - \frac{\omega_{2k-3}(\xi_1)}{\xi_1 - x_{2k}}c_{2k},$$
$$b_{2k-1} = -\Big(-\frac{\omega_{2k-3}(\xi_2) - l_{2k}}{(\xi_2 - x_{2k+1})l_{2k}} + \frac{\omega_{2k-2}(\xi_2) - 1}{\xi_2 - x_{2k+1}}\Big)c_{2k-2} + c_{2k-1} -$$
$$-\frac{\omega_{2k-3}(\xi_2) - l_{2k}}{(\xi_2 - x_{2k+1})l_{2k}}c_{2k} - \frac{\omega_{2k-1}(\xi_2)}{(\xi_2 - x_{2k+1})l_{2k+2}}c_{2k+1} - \frac{\omega_{2k}(\xi_2)}{\xi_2 - x_{2k+1}}c_{2k+2},$$
$$b_j = 0 \quad \text{при остальных} \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 15. *(Формулы реконструкции) Пусть известны коэффициенты a_i в разложении проекции элемента $\tilde{u} \in S_\varphi(\overline{X})$ на пространство $S_\varphi(X)$ и коэффициенты b_{2k-3}, b_{2k-1} в разложении проекции элемента $\tilde{u}$ на пространство W, $P\tilde{u} = \sum\limits_i a_i\omega_i, Q\tilde{u} = b_{2k-3}\omega_{2k-3} + b_{2k-1}\omega_{2k-1}$. Тогда коэффициенты c_k в формуле $\tilde{u} = \sum\limits_k c_k\overline{\omega}_k$ имеют вид*

$$c_i = a_i \text{ при } i \le 2k-4, \quad c_i = a_{i-2}, i \ge 2k+2,$$

$$c_{2k-3} = b_{2k-3} + \Big(\frac{\omega_{2k-3}(\xi_1)(l_{2k} - 1)}{(\xi_1 - x_{2k})l_{2k}} + \frac{\omega_{2k-2}(\xi_1) - 1}{\xi_1 - x_{2k}}\Big)a_{2k-2} +$$
$$+\frac{\omega_{2k-3}(\xi_1).l_{2k}}{\xi_1 - x_{2k}}a_{2k-3},$$
$$c_{2k-2} = b_{2k-2},$$
$$c_{2k-1} = b_{2k-1} + \frac{\omega_{2k-2}(\xi_2) - 1}{\xi_2 - x_{2k+1}}a_{2k-2} + \frac{\omega_{2k-3}(\xi_2) - l_{2k}}{\xi_2 - x_{2k+1}}a_{2k-3} +$$
$$+\frac{\omega_{2k-1}(\xi_2)}{\xi_2 - x_{2k+1}}a_{2k-1} - \frac{\omega_{2k}(\xi_2)}{\xi_2 - x_{2k+1}}a_{2k},$$
$$c_{2k} = l_{2k}a_{2k-3} + a_{2k-2}, \quad c_{2k+1} = l_{2k+2}a_{2k-1}.$$

В пункте 2.4 приведены оценки устойчивости и аппроксимации для вэйвлетного разложения сплайнов эрмитова типа первой высоты.

Итак, рассмотрим четырехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ класса $C^1(\alpha,\beta)$, удовлетворяющую условию

$(A)\quad W_A(x,y,\varphi)\stackrel{\text{def}}{=}\det(\varphi'(x),\varphi(x),\varphi'(y),\varphi(y))\neq 0$, для всех различных $x,y\in(\alpha,\beta)$. Пусть $h\stackrel{def}{=}sup(x_{j+1}-x_j)$. При фиксировании $k\in\mathbf{Z}$ обозначаем $W_{A(k)}\stackrel{\text{def}}{=}\det(\varphi_k',\varphi_k,\varphi_{k+1}',\varphi_{k+1})$. Благодаря условию (A), $W_{A(k)}\neq 0\ \forall k\in\mathbf{Z}$.

Теорема 16. *(Об устойчивости). Существуют такие* $\varepsilon_0>0,h_0>0$, *что при* $h<h_0$ *верны соотношения:*

$$\max_{i\in\mathbf{Z}}|a_i|\leq\max_{i\in\mathbf{Z}}|c_i|;$$

$$\max_{i\in\mathbf{Z}}|c_i|\leq\max_{i\in\mathbf{Z}}|b_i|+(1+\eta+\frac{\eta\varepsilon_0}{W_{A(k)}})\max_{i\in\mathbf{Z}}|a_i|,$$

где $\eta=\max\limits_{i\in\mathbf{Z}}\Big\{x_{i+1}-x_i,\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+W_{A(k)}}\Big\}$.

Теорема 17. *(Об аппроксимации). Если* $\varphi,u\in C^4[\alpha,\beta],t\in(x_k,x_{k+1})$ *и* $h_k\stackrel{def}{=}x_{k+1}-x_k,k\in\mathbf{Z}$ *достаточно мало, то при условии* $W_k\stackrel{def}{=}(\varphi_k,\varphi_k',\varphi_k'',\varphi_k''')\neq 0$ *верна оценка:*

$$|\widetilde{u}(t)-u(t)|\leq\frac{h_k^4}{4!}\Big(\big(1+\frac{8\varepsilon_0}{W_{A(k)}}\big)\|FW_k^{-1}\|\|\varphi^{(4)}\|\sum_{i=0}^{3}\frac{u^{(i)}(x_k)}{i!}+2\big(1+\frac{4\varepsilon_0}{W_{A(k)}}\big)\|u^{(4)}\|\Big),$$

где $\widetilde{u}(t)=\sum\limits_{j\in\mathbf{Z}}\langle g_j,u\rangle w_j(t)$.

В **третьей главе** “Вэйвлетное разложение для модельных задач” рассматриваются вэйвлетные разложения пространств сплайнов эрмитова типа для некоторых модельных задач. Здесь изучаются алгоритмы разложения числовых потоков, включающих поток значений (первой, второй и третьей) производной некоторой элементарной функции и строятся вэйвлетные разложения, а также выводятся формулы декомпозиции/реконструкции. Алгоритмы реализуются на языке C#. Полученными результатами являются значения вэйвлетной составляющей и разности между значениями входного потока и значениями потока, восстановленного с помощью формул реконструкции.

В заключении диссертации подведены итоги проведенного и завершенного в рамках поставленных задач исследования.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] *Демьянович Ю.К., Ле Т.Н.Б.* Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа третьей высоты // Проблемы математического анализа, 2010. Вып. 44. С. 65–72.

[2] *Демьянович Ю.К., Ле Т.Н.Б.* Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2010. Вып. 2. С. 32–38.

Другие публикации:

[3] *Ле Т.Н.Б.* О всплесковом разложении сплайнов эрмитова типа при замене производных на разности // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н.В. Смирнова, Г.Ш. Тамасяна. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. С. 209–214.

[4] *Демьянович Ю.К., Ле Т.Н.Б.* Вэйвлетное разложение сплайнов эрмитова типа второй высоты // Методы вычислений/ Под ред. В.М. Рябова. СПб: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2010. Вып. 23. С. 99-112.

[5] *Ле Т.Н.Б.* Вэйвлетные разложения для модельных задач // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н.В. Смирнова, Г.Ш. Тамасяна. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. С. 182–185.