САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛАДИЛОВА Анна Александровна

ДЕФОРМАЦИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2010

Работа выполнена на кафедре геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета Нижегородского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор КУЗНЕЦОВ Михаил Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВАВИЛОВ Николай Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет) доктор физико-математических наук, профессор ГАЛКИН Владимир Михайлович (Нижегородский государственный технический университет)
Ведущая организация:	Московский государственный университет

Защита состоится «____» ____________ 2010 г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете в помещении ПОМИ РАН по адресу: 191023, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «____» ____________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Задача описания фильтрованных деформаций градуированных алгебр Ли возникает в связи с классификацией простых алгебр Ли, которая является одной из центральных проблем теории модулярных алгебр Ли. Общая схема классификации простых алгебр Ли была разработана в 60-х годах XX века А.И. Кострикиным и И.Р. Шафаревичем, сформулировавшими в 1966 г. основную классификационную гипотезу, согласно которой любая простая конечномерная ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 5$ либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна алгебре Ли картановского типа. Эту гипотезу доказали в 1984 г. Р.Е. Блок и Р.Л. Вильсон.

Классификационная схема для неклассических простых алгебр Ли $\mathscr{L}$ состоит из следующих этапов:

1) построить максимальную подалгебру $\mathscr{L}_0$ в $\mathscr{L}$, которая определяет длинную неуплотняемую фильтрацию в $\mathscr{L}$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-q} \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{-1} \supset \mathscr{L}_0 \supset \supset \mathscr{L}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{L}_r \supset \mathscr{L}_{r+1} = \{0\}$, такую, что в ассоциированной градуированной алгебре Ли $L = \oplus_{i=-q}^{r} L_i$ подалгебра L_0 является классической редуктивной алгеброй Ли, то есть прямой суммой классических простых алгебр Ли и, возможно, одномерного центра;

2) получить классификацию простых градуированных алгебр Ли, обладающих теми же свойствами, что и ассоциированная градуированная алгебры Ли L из п. 1), а именно, L — транзитивная алгебра Ли, L_0 — классическая редуктивная алгебра Ли, L_{-1} — неприводимый L_0-модуль, $L_{-i} = L_{-1}^{i}, i = 1, \ldots, q$;

3) найти все фильтрованные алгебры Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли из п. 2), то есть найти все фильтрованные деформации алгебр Ли из п. 2).

В 1970г. В.Г. Кац провел исследование градуированных алгебр Ли, удовлетворяющих условиям п. 2). Он сформулировал теорему, согласно которой градуированная алгебра Ли из п. 2) либо является классической, либо изоморфна градуированной алгебре Ли картановского типа. Эта теорема стала называться теоремой распознавания. В конце 60-х годов А.И. Кострикин и И.Р. Шафаревич построили серии неограниченных простых градуированных алгебр Ли картановского типа. В [1] В.Г. Кац предложил более общую конструкцию, включающую неградуированные алгебры Ли картановского типа. В 70-е годы В.Г. Кац и Р.Л. Вильсон получили качественное описание фильтрованных деформаций алгебр Ли картановского типа. Позднее в работах С.А. Тюрина, С.А. Кириллова, М.И. Кузнецова, С.М. Скрябина были найдены классы изоморфизма фильтрованных деформаций алгебр Ли картановского типа. В этих работах методы, применяемые в теории бесконечномерных транзитивных фильтрованных алгебр Ли нулевой характеристики (когомологии Спенсера, теоремы вложения и т.д.), были адаптированы к модулярному случаю.

В настоящее время получена классификация простых модулярных алгебр Ли характеристики $p > 3$ (Х. Штраде, А. Премет). Список простых алгебр Ли, кроме классических алгебр Ли и алгебр Ли картановского типа, при заданном ограничении на характеристику содержит только одну серию исключительных простых алгебр Ли характеристки $p = 5$ — серию алгебр Меликяна.

Над полями характеристики $p = 3$ ситуация иная. Здесь построено много серий простых градуированных алгебр Ли, которые не имеют аналогов при большей характеристике основного поля — так называемые исключительные алгебры Ли. Это алгебры серии T, построенные М. Франк, алгебры Ли серии $\mathscr{R}$ (Ю.Б. Ермолаев, М.И. Кузнецов, Г. Браун, С.М. Скрябин), алгебры Ли серий X, Y, Z, построенные С.М. Скрябиным. Все эти алгебры Ли содержат подалгебру, которая является алгеброй Ли векторных полей, и, как модуль над этой подалгеброй, допускают описание в терминах модулей дифференциальных форм.

В [2] была получена геометрическая реализация алгебр Мелякяна, то есть получено представление алгебры в виде градуированной по модулю 3 алгебры Ли, в которой компонента $L_{\overline{0}}$ является алгеброй Ли картановского типа, остальные компоненты реализованы как модули сечений геометрических расслоений над соответствующей алгеброй разделенных степеней, а умножение компонент задается инвариантными дифференциальными операторами. Метод М.И. Кузнецова построения геометрических реализаций, основанный на теории усеченных коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли ([3]), был применен С.М. Скрябиным ([4]) и Г. Брауном ([5]) для построения новых простых алгебр Ли над полями малой характеристики.

В работах М.И. Кузнецова [2], [6] описание деформаций алгебр Меликяна, с помощью теорем вложения сводилось к деформациям внутри контактной алгебры Ли. В 2004г. Х. Штраде использовал геометрическую реализацию алгебр Меликяна для доказательства их жесткости. Однако систематического исследования фильтрованных деформаций алгебр Ли, имеющих геометрическую реализацию, не проводилось.

Цель работы. Диссертационная работа посвящена разработке методов исследования фильтрованных деформаций исключительных простых градуированных алгебр Ли характеристки 3, имеющих геометрическую реализацию.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказательство жесткости алгебр Ли серии Франк относительно фильтрованных деформаций, основанное на вложении фильтрованных деформаций в контактную алгебру Ли от трех переменных.

2. Доказательство жесткости алгебр Ли серии R относительно фильтрованных деформаций.

3. Доказательство жесткости алгебр Ли серии Y относительно фильтрованных деформаций.

4. Доказательство жесткости простых градуированных алгебр Ли серии X относительно фильтрованных деформаций.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. В частности, впервые показано, что простые градуированные алгебры Ли серии X, а также исключительные алгебры Ли серии Франк и серий R, Y являются жесткими относительно фильтрованных деформаций.

Методы исследования. В работе использовались методы гомологической алгебры, в частности, точные последовательности коэффициентов групп когомологий, спектральные последовательности Серра-Хохшильда, когомологии Спенсера. Применялся аппарат усеченных индуцированных и коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли, а также теорема вложения для фильтрованных деформаций алгебры контактного типа в контактную алгебру Ли.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при классификации простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 3.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были представлены на международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (Самара, 2007), на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007), на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 2008), на летней школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2009), на нижегородских сессиях молодых ученых (Нижний Новгород, 2007, 2008, 2009), на всероссийских молодежных научных конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2006, 2007, 2009), на научном семинаре по алгебре кафедры геометрии и высшей алгебры ННГУ (рук. проф. М.И. Кузнецов, 2010).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 2 статьи, причем 1 статья из перечня, рекомендованного ВАК РФ, 2 работы в материалах всероссийских конференций и 4 тезисов докладов. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно под научным руководством профессора М.И. Кузнецова.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Главы разделены на параграфы. Библиография включает 48 наименований. Общий объем диссертации 90 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели исследования, представлено краткое содержание работы и изложены основные результаты.

Первая глава имеет подготовительный характер. В ней содержатся общие сведения из теории алгебр Ли и теории когомологий, которые используются в диссертационной работе, определяются когомологии Спенсера, вводится понятие спектральной последовательности Серра-Хохшильда.

Здесь же рассматриваются различные определения деформаций алгебр Ли: приводятся понятия геометрических и формальных деформаций, излагаются определения фильтрованной деформации градуированной алгебры Ли и деформации однородной подалгебры внутри градуированной алгебры Ли.

Под фильтрованной деформацией градуированной алгебры Ли L, $L = \oplus_{i=-q}^{r} L_i$ понимается фильтрованная алгебра Ли $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(-q)} \supset \mathscr{L}_{(-q+1)} \supset \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{(r)}$ такая, что ее ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}\mathscr{L}$ изоморфна L. Далее показывается связь между деформациями алгебр Ли и группами когомологий этих алгебр. Алгебра Ли $\mathscr{L}$ может быть представлена в виде прямой суммы векторных пространств $\{V_i\}$, дополнительных к членам фильтрации, то есть $\mathscr{L}_{(i)} = V_i \oplus \mathscr{L}_{(i+1)}$. Очевидно, отождествляя, L и $\operatorname{gr}\mathscr{L}$, найдется изоморфизм векторных пространств $\lambda : L \to \mathscr{L}$, отображающий L_i на V_i такой, что $\operatorname{gr} \circ \lambda = \mathrm{Id}$. Из того, что $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры L, следует, что умножение в $\mathscr{L}$ может быть записано в виде

$$[\lambda(x), \lambda(y)] = \lambda([x, y]) + \sum_{r>0} \mu_r(x, y)$$

для однородных $x \in L_i$, $y \in L_j$, при этом $\mu_r \in \operatorname{Hom}(L \wedge L, \oplus_l V_l)_r$ — однородное отображение степени r. Если μ_k — первое отображение, не равное тождественно нулю на $L \wedge L$, то $\varphi_k = \lambda^{-1} \circ \mu_k$ является коциклом на алгебре L степени $k > 0$. В случае, когда этот коцикл когомологичен нулевому отображению, то есть когда существует линейное отображение $\psi_k \colon L \to L$ такое, что $\delta\psi_k = \varphi_k$, можно выбрать новый набор пространств $\{V_i\}$, чтобы μ_k на $L \wedge L$ обращалось в нуль. Таким образом, из тривиальности подгруппы $H_+^2(L, L)$ второй группы когомологий следует жесткость алгебры Ли L относительно фильтрованных деформаций, то есть все фильтрованные деформации L изоморфны L.

Если градуированная алгебра Ли L является однородной подалгеброй конечномерной градуированной алгебры Ли $M = \oplus_i M_i$, то можно определить понятие фильтрованной деформации внутри алгебры. Это такая фильтрованная алгебра Ли $\mathscr{L}$, для которой существует вложение $j\colon \mathscr{L} \to M$. Причем $j(\mathscr{L}_{(i)}) \subset \oplus_{j\geqslant i} M_j$ и $\operatorname{gr} j(\mathscr{L}) = L$. В этом случае произвольный элемент $u \in \mathscr{L}_{(i)} \setminus \mathscr{L}_{(i+1)}$ можно представить в виде

$$u = x + \varphi_k(x) + \varphi_{k+1}(x) + \ldots,$$

где $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots$ — однородные отображения из $\operatorname{Hom}(L, M)$ степени k, $k+1, \ldots$, соответственно. При этом $\overline{\varphi}_k = \pi \circ \varphi_k$, где $\pi\colon M \to M/L$ — каноническая проекция, является однородным коциклом степени k, то есть $\overline{\varphi}_k \in Z^1_+(L, M/L)$. Классы орбит таких коциклов относительно автоморфизмов алгебры M составляют группу, обозначаемую через $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)$. В случае, если

$$\operatorname{Lie} \operatorname{Aut}_{(1)} M + \oplus_{i>0} N_{\operatorname{Der} M}(L)_i = \operatorname{ad} M_{(1)},$$

эта группа совпадает с группой $H^1_+(L, M/L)$. Таким образом, при выполнении последнего условия локальные деформации описываются подгруппой первой группы когомологий $H^1_+(L, M/L)$.

В главе 1 также приводятся сведения об алгебрах Ли картановского типа, в частности, определяются алгебра разделенных степеней $O(n\colon \overline{m})$, общая алгебра Ли картановского типа $W(n\colon \overline{m})$, комплекс дифференциальных форм, специальная алгебра Ли картановского типа $S(n\colon \overline{m})$ и контактная алгебра Ли $K(n\colon \overline{m})$. Наконец, вводятся понятия усеченных индуцированных и коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли. Приведена теорема о когомологиях градуированной транзитивной алгебры Ли L с коэффициентами в усеченном коиндуцированном модуле $\overline{\operatorname{coind}}\, V$, согласно которой

$$\begin{aligned} &H^2(L, \overline{\operatorname{coind}}\, V) \cong \\ &\qquad \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(L_{(0)}, V) + H^1(\Omega) \otimes H^1(L_{(0)}, V) + H^2(\Omega) \otimes H^0(L_{(0)}, V), \end{aligned}$$

где $H^i(\Omega)$ — группа когомологий де Рама, $L_{(0)}$ — пространство естественной фильтрации алгебры L.

Вторая глава посвящена доказательству жесткости алгебр серии Франк $T(m)$ относительно фильтрованных деформаций. Она состоит из трех параграфов, в первом из которых приводится геометрическая реализация простых алгебр Ли $T(m)$ как $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр, построенная С.М. Скрябиным в [4]. Согласно этой работе,

$$T(m) = T_{\overline{0}} \oplus T_{\overline{1}},$$

где

$$T_{\overline{0}} = W(1\colon m) \oplus (\mathfrak{sl}(U) \otimes O(1\colon m)) \text{ и}$$

$$T_{\overline{1}} = U \otimes \Omega^1(1\colon m),$$

здесь U — фиксированное двумерное векторное пространство. Алгебра Франк $T(m)$ допускает также естественную $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 2, согласованную с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой

$$T(m) = T_{-2} \oplus T_{-1} \oplus T_0 \oplus \dots .$$

Особенностью алгебр Ли этой серии является возможность их представления в качестве однородной подалгебры в контактной алгебре Ли от трех переменных $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$. Такое представление было получено Г. Брауном. Более того, $T(m)$ является алгеброй контактного типа, то есть

$$\oplus_{i\leqslant 0} T_i = \oplus_{i\leqslant 0}\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))_i.$$

Поэтому, если она удовлетворяет условиям теоремы вложения, полученной М.И. Кузнецовым в [6], то ее фильтрованная деформация $\mathscr{L}$ допускает вложение в ту же самую контактную алгебру $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$.

В п. 2.2 проверяется, что $T(m)$ удовлетворяет условию теоремы вложения, а значит, исследование фильтрованных деформаций алгебры $T(m)$ может быть сведено к описанию деформаций $T(m)$ внутри $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$. Кроме того, в работе устанавливается справедливость равенства

$$\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\mathcal{K}(3\colon (1,1,m)) + \oplus_{i>0}(N_{\mathrm{Der}\,\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))}T(m))_i = \mathrm{ad}\,\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))_{(1)},$$

поэтому локальные фильтрованные деформации однородной подалгебры $T(m)$ внутри алгебры Ли $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$ описываются положительной частью первой группы когомологий $H^1_+(T(m),\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$.

Группа $H^1_+(T(m),\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$ вычисляется в п. 2.3. Из работы [6] известно, что для алгебры Ли L и транзитивного L-модуля V положительная часть первой группы когомологий $H^1_+(L,V)$ может быть вложена в группу когомологий Спенсера $\oplus_{j>0}H^{j,1}(L,V)$. Поскольку модуль $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m)$ является транзитивным $T(m)$-модулем, то тривиальность группы

$$H^1_+(T(m),\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$$

следует из тривиальности групп когомологий Спенсера

$$H^{j,1}(T(m),\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m)),\ j>0.$$

Причем в силу того, что в $T(m)$ содержится элемент x_3, действующий на однородные 1-коциклы степени i умножением на скаляр $-i$, можно ограничиться вычислением лишь пространств, где $j \equiv 0(\mod 3)$. Непосредственно проверяется, что для всех положительных j, $j \equiv 0(\mod 3)$, указанные группы когомологий нулевые. Таким образом, можно сделать вывод о тривиальности локальных фильтрованных деформаций алгебры $T(m)$ внутри $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$, что влечет жесткость $T(m)$ относительно фильтрованных деформаций, то есть справедлива

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры Ли $T(m)$, тогда $\mathscr{L} \cong T(m)$.*

В третьей главе исследуются фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathscr{R}$. Алгебры этой серии параметризуются двумя натуральными параметрами и являются $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами:

$$R(m_1, m_2) = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus \Omega^2(m_1, m_2),$$

$$R(m_1, m_2)^{(1)} = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus B^2(\Omega(m_1, m_2)),$$

причем $R(m_1, m_2)^{(1)}$ — простая алгебра Ли. Алгебры $L = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus M$, где $B^2(\Omega(m_1, m_2)) \subseteq M \subseteq \Omega^2(m_1, m_2)$, допускают $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 1, согласованную с определенной выше $\mathbb{Z}_2$-градуировкой.

Используя приведенную ниже схему, установлено, что алгебры Ли L серии $\mathscr{R}$ являются жесткими. Эта схема состоит из трех этапов.

На первом этапе, в п. 3.1, доказывается утверждение о тривиальности подгруппы $H^2_+(W(2\colon (m_1, m_2)), M)$ второй группы когомологий, которое будет необходимо в дальнейшем. Здесь для упрощения вычислений используется факт, что модуль $\Omega^2(m_1, m_2)$ является усеченным коиндуцированным $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулем, а значит, достаточно показать тривиальность групп

$$H^i(W(2\colon (m_1, m_2))_{(0)}, \Omega^2(m_1, m_2)/\mathfrak{m}\Omega^2(m_1, m_2)),\ i = \overline{0,1} \text{ и}$$

$$H^2_+(W(2\colon (m_1, m_2))_{(0)}, \Omega^2(m_1, m_2)/\mathfrak{m}\Omega^2(m_1, m_2)),$$

где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в алгебре $O(m_1, m_2)$. Вычисление вышеприведенных групп основано на применении спектральной последовательности Серра-Хохшильда для алгебры $W(2\colon (m_1, m_2))_{(0)}$, ее идеала $W(2\colon (m_1, m_2))_{(1)}$ и модуля $\Omega^2(m_1, m_2)/\mathfrak{m}\Omega^2(m_1, m_2)$. Для нахождения второй группы когомологий с коэффициентами в $M = B^2(m_1, m_2)$ используется точная когомологическая последовательность коэффициентов.

На втором этапе, в п. 3.2, показывается, что в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ содержится подалгебра, изоморфная $W(2\colon (m_1, m_2))$. Для этого $\mathscr{L}$ разбивается в прямую сумму подпространств $\{V_i \oplus M_i | \operatorname{gr} V_i \cong W(2\colon (m_1, m_2))_i, \operatorname{gr} M_i \cong (L_{\bar{1}})_i\}$ из дополнений к членам фильтрации алгебры. Утверждается, что подпространства $\{V_i\}$ могут быть выбраны так, чтобы сумма $\oplus_i V_i$ являлась подалгеброй в $\mathscr{L}$, изоморфной $W(2\colon (m_1, m_2))$. Выбрав подходящий изоморфизм векторных пространств $\lambda\colon L \to \mathscr{L}$, умножение в $\mathscr{L}$ можно записать в виде

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} (\mu_r(u, v) + \nu_r(u, v)).$$

Здесь предполагается, что отображения μ_i принимают значения в $\oplus_i M_i$, а ν_i — в $\oplus_i V_i$. Тогда для первого μ_r в данном разложении, не тождественно равного нулю на $W(2\colon (m_1, m_2)) \wedge W(2\colon (m_1, m_2))$, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом положительной степени алгебры $W(2\colon (m_1, m_2))$ с коэффициентами в модуле M. Так как группа $H^2_+(W(2\colon (m_1, m_2)), M)$ тривиальна, существует линейное отображение $\psi\colon W(2\colon (m_1, m_2)) \to M$ такое, что $\delta\psi = \lambda^{-1} \circ \mu_r$. Применяя ψ к подпространствам V_i, получается новый набор подпространств, для которых значения μ_r в ограничении на $W(2\colon (m_1, m_2)) \wedge W(2\colon (m_1, m_2))$ тривиальны. Таким образом, индукцией по r можно получить требуемый набор $\{V_i\}$. Изоморфность полученной подалгебры алгебре $W(2\colon (m_1, m_2))$ следует из жесткости общей алгебры Ли картановского типа при $p \geqslant 3$.

В результате $\mathscr{L}$ можно рассматривать как $W(2\colon (m_1, m_2))$-модуль. Поэтому следующий шаг состоит в доказательстве изоморфности L и $\mathscr{L}$ как $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулей. Здесь с помощью универсального свойства коиндуцированных модулей, которое означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus \Omega^2(2\colon (m_1, m_2)) \arrow[r, "\iota"] & \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}, \\ \mathscr{L} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

удается вложить $\mathscr{L}$ в $W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus \Omega^2(2\colon (m_1, m_2))$, откуда и следует изоморфизм модулей L и $\mathscr{L}$.

Наконец, на последнем этапе устанавливается, что построенный изоморфизм градуированных $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулей L и $\mathscr{L}$ в действительности является изоморфизмом алгебр Ли. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если $\mathscr{L}$ — фильтрованная алгебра Ли такая, что $\operatorname{gr} \mathscr{L} = L$, где L — алгебра Ли серии $\mathscr{R}$, то $\mathscr{L} \cong L$.*

Четвертая глава посвящена описанию фильтрованных деформаций алгебр Ли серии Y. Это семейство простых алгебр Ли, зависящих от трех натуральных параметров $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и, как и алгебры предыдущих серий, они наделены $\mathbb{Z}_2$-градуировкой,

$$Y(\overline{m}) = Y_{\overline{0}} \oplus Y_{\overline{1}},$$

где

$$Y_{\overline{0}} = W(3\colon \overline{m}),$$
$$Y_{\overline{1}} = \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}}.$$

Через $\Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}}$ обозначается $W(3\colon \overline{m})$-модуль $\Omega^1(3\colon \overline{m})$ с действием, определенным формулой

$$D \circ \Theta = D \cdot \Theta + \operatorname{div}(D)\Theta,$$

где $D \in W(3\colon \overline{m})$, $\Theta \in \Omega^1(3\colon \overline{m})$, а $\cdot$ — стандартное действие $W(3\colon \overline{m})$ на модуле дифференциальных форм. Естественные градуировки на алгебре Ли $W(3\colon \overline{m})$ и модуле $\Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}}$ индуцируют $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 2 алгебры $Y(\overline{m})$, согласованную с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой. При описании фильтрованных деформаций этих алгебр применяется схема, использованная при описании деформаций алгебр серии $\mathscr{R}$.

Сначала в п. 4.1 доказывается тривиальность подгруппы

$$H^2_{(0)}(W(3\colon \overline{m}), \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}})$$

второй группы когомологий. Метод вычисления также использует аппарат спектральных последовательностей и формулу для вычисления когомологий транзитивных алгебр с коэффициентами в усеченном коиндуцированном модуле.

Затем в п. 4.2 в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ алгебры $Y(\overline{m})$ выделяется подалгебра, изоморфная $W(3\colon \overline{m})$. Здесь проводятся рассуждения, аналогичные рассуждениям в серии $\mathscr{R}$, однако, из-за иного строения однородных подпространств в $\mathbb{Z}$-градуировке алгебр серии Y, имеются некоторые отличия. Алгебра $\mathscr{L}$ разбивается на подпространства V_i, дополнительные к членам фильтрации. Далее показывается, что пространства V_{2i} можно выбрать так, чтобы их сумма $\oplus_i V_{2i}$ являлась подалгеброй в $\mathscr{L}$. Она и будет изоморфна $W(3\colon \overline{m})$. Доказательство носит индукционный характер. Общий шаг индукции выглядит следующим образом. Используя изоморфизм векторных пространств λ между $Y(\overline{m})$ и $\mathscr{L}$, умножение в $\mathscr{L}$ записывается в виде

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v).$$

Для наименьшего нечетного значения r такого, что $\mu_r(W(3\colon \overline{m}) \wedge W(3\colon \overline{m})) \neq 0$, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом из $Z^2_{(0)}(W(3\colon \overline{m}), \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}})$. Поэтому тривиальность соответствующей группы когомологий, доказанная в п. 4.1, позволяет выбрать линейное отображение ψ, дифференциал которого равен $\lambda^{-1} \circ \mu_r$, и применить зависящее от него отображение $1 - \lambda \circ \psi \circ \lambda^{-1}$ к пространствам V_{2i}, взяв образы этих пространств за новый набор $\{V_{2i}\}$. При этом отображение μ_r при данном значении r станет тривиальным на $W(3\colon \overline{m}) \wedge W(3\colon \overline{m})$. За конечное число шагов получается искомая подалгебра.

П. 4.3 содержит собственно доказательство жесткости алгебр Ли серии Y относительно фильтрованных деформаций. Сначала, чтобы показать изоморфность $Y(\overline{m})$ и $\mathscr{L}$ как $W(3\colon \overline{m})$-модулей, используется свойство универсальности индуцированных модулей для доказательства вложения $Y(\overline{m})$ в $\mathscr{L}$. Таким образом, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \langle x^{(\delta)}\partial_i | i = 1,2,3\rangle \oplus \langle x^{(\delta)} dx_i | i = 1,2,3\rangle \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\iota"'] & W \oplus \Omega^1_{\mathrm{div}}, \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathscr{L} & \end{tikzcd}$$

где отображение φ инъективно. Сравнивая размерности, легко убедиться, что это вложение и есть искомый изоморфизм, причем можно считать, что он сохраняет фильтрацию. На последнем этапе с помощью индукции доказывается, что этот изоморфизм является изоморфизмом алгебр Ли. Таким образом, алгебры серии Y являются жесткими относительно фильтрованных деформаций, что составляет утверждение следующей теоремы.

Теорема 4. *Если $\mathscr{L}$ — фильтрованная алгебра Ли такая, что* $\mathrm{gr}\,\mathscr{L} = Y(\overline{m})$, *то* $\mathscr{L} \cong Y(\overline{m})$.

В пятой главе рассматриваются алгебры Ли серии X и описываются фильтрованные деформации для простой градуированной алгебры Ли из этого семейства.

Первый параграф этой главы посвящен описанию алгебры Ли серии X, которые реализуются как подалгебры в алгебре $Y(\overline{m})$, но зависят не только от параметра $\overline{m}$, но и от формы $\omega = h dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ из пополнения комплекса дифференциальных форм $\widehat{\Omega}(E)$. Геометрически эти алгебры описываются следующим образом:

$$X(\overline{m}, \omega) = X_{\bar{0}} \oplus X_{\bar{1}},$$

где $X_{\bar{0}} = S(3\colon \overline{m}, \omega)$ — специальная алгебра Ли картановского типа, соответствующая форме ω, $X_{\bar{1}} = Z^1(\Omega(3\colon \overline{m})_{h^{-1}})$. В случае, когда $h = 1$, $X(\overline{m}, \omega)$ является однородной подалгеброй в градуированной алгебре Ли $Y(\overline{m})$, и ее третий коммутант — простая алгебра Ли, устроенная следующим образом:

$$X'''(\overline{m}) = X_{\bar{0}} \oplus X_{\bar{1}},$$

где

$$X_{\bar{0}} = S(3\colon \overline{m}),$$
$$X_{\bar{1}} = d(O'(3\colon \overline{m})),$$

под $O'(3\colon \overline{m})$ подразумевается $S(3\colon \overline{m})$-подмодуль в $O(3\colon \overline{m})$ коразмерности 1. В работе описываются фильтрованные деформации именно такой алгебры. Результатом исследования является следующее утверждение: простая алгебра Ли $X'''(\overline{m})$ не имеет фильтрованных деформаций, неизоморфных данной алгебре.

Также, как и в случаях серий $\mathscr{R}$ и Y, первый шаг доказательства, описанный в п. 5.2 и п. 5.3, заключается в нахождении некоторой подгруппы второй группы когомологий, а именно, $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m})))$. Здесь используются те же методы вычисления: спектральные последовательности Серра-Хохшильда, формула для вычисления когомологических групп с коэффициентами в коиндуцированном модуле и точные последовательности. Однако, в отличие от рассмотренных ранее случаев, искомая группа когомологий может быть нетривиальна. Более точно, группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ порождена классами четырех коциклов, один из которых — c_0, имеет степень 1, а степени остальных строго больше единицы. Для доказательства этого факта используется реализация коприсоединенного модуля $S(3\colon \overline{m})$ в виде $\Omega^1(3\colon \overline{m})/Z^1(3\colon \overline{m})$, полученная Я.С. Крылюком в [7]. Кроме того, для случая трех переменных присоединенный и коприсоединенный модули для алгебры $S(3\colon \overline{m})$ изоморфны. Применяя точную последовательность

$$0 \to Z^1(3\colon \overline{m}) \to \Omega^1(3\colon \overline{m}) \to B^2(3\colon \overline{m}) \to 0,$$

можно показать, что группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ изоморфна группе $H^1_+(S(3\colon \overline{m}), S(3\colon \overline{m}))$, описание которой получено в [8] (см. также [3]). Для трех последних коциклов, степень которых больше 1, получено их полное описание как образов дифференцирований $\mathrm{ad}(x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k)$ алгебры $S(3\colon \overline{m})$ при связывающем гомоморфизме:

$$c_k(D_1, D_2) = D_1\lrcorner(\mathrm{ad}\, x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_2)\lrcorner\omega_0) - \\ - D_2\lrcorner(\mathrm{ad}\, x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_1)\lrcorner\omega_0).$$

Далее показывается, что группы $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ и $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), B^1(3\colon \overline{m}))$ изоморфны. Наконец, устанавливается, что отображение

$$\varphi\colon H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m}))) \to H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), B^1(3\colon \overline{m})),$$

соответствующее точной последовательности коэффициентов

$$0 \to d(O'(3\colon \overline{m})) \to B^1(3\colon \overline{m}) \to B^1(3\colon \overline{m})/d(O'(3\colon \overline{m})) \to 0,$$

инъективно, и классы коциклов, степень которых больше 1, не лежат в образе φ. В результате получается, что группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m})))$ не более чем одномерна.

Следующий этап исследования заключается в выделении подалгебры в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ алгебры $X'''(\overline{m})$ с ассоциированной градуированной алгеброй, изоморфной $S(3\colon \overline{m})$. Также, как в случае серии Y, деформация $\mathscr{L}$ раскладывается в прямую сумму подпространств $\{V_i\}$, дополнительных к членам фильтрации. С помощью подходящего изоморфизма векторных пространств $\lambda\colon X'''(\overline{m}) \to \mathscr{L}$ умножение в $\mathscr{L}$ представимо в виде

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v).$$

Тогда для наименьшего нечетного значения r такого, что μ_r в ограничении на $S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})$ нетривиально, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом из $Z^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(\mathcal{O}'(3\colon \overline{m})))$. Минимальная степень нетривиального коцикла алгебры $X'''(\overline{m})$ равна 3, а значит, $\lambda^{-1} \circ \mu_3$ должен быть коциклом из $Z^2_{+}(X'''(\overline{m}), X'''(\overline{m}))$. Далее показывается, что этот коцикл не может быть когомологичным нетривиальному коциклу $c_{0|S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})}$. В результате, для любого положительного нечетного r можно выбрать линейное отображение ψ такое, что $\delta\psi = \lambda^{-1} \circ \mu_r$. При помощи отображения ψ можно построить новый набор пространств V_i, чтобы μ_r в ограничении на $S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})$ было тривиально. Повторяя эти рассуждения нужное количество раз, получатся такие V_i, что $\mathfrak{G} = \oplus_i V_{2i}$ является подалгеброй в $\mathscr{L}$. Ясно, что ассоциированная с ней градуированная алгебра изоморфна $S(3\colon \overline{m})$. Поскольку $S(3\colon \overline{m})$ не является жесткой относительно фильтрованных деформаций алгеброй, то либо $\mathfrak{G} \cong S(3\colon \overline{m})$, либо $\mathfrak{G} \cong S(3\colon \overline{m}, \omega)$, $\omega = (1 + x^{(\delta)})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Применяя универсальное свойство коиндуцированных модулей, из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \oplus \Omega^1(3\colon \overline{m}) \arrow[r, "\iota"] & \langle \partial_1, \partial_2, \partial_3 \rangle \oplus \langle dx_1, dx_2, dx_3 \rangle \\ \mathscr{L} \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

получается вложение $\mathfrak{G}$-модуля $\mathscr{L}$ в $\mathfrak{G} \oplus \Omega^1(3\colon \overline{m})$, поэтому по соображениям размерности случай, когда $\mathfrak{G} \cong S(3\colon \overline{m}, \omega)$, $\omega = (1 + x^{(\delta)})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, невозможен, а значит, $\mathscr{L}$ и $X'''(\overline{m})$ являются изоморфными $S(3\colon \overline{m})$-модулями.

Отображение λ устанавливает этот изоморфизм, более того λ является изоморфизмом алгебр Ли, что показано в п. 5.6. Итак, алгебра $X'''(\overline{m})$ является жесткой относительно фильтрованных деформаций:

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация простой градуированной алгебры Ли $X'''(\overline{m})$. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна алгебре $X'''(\overline{m})$.*

Цитированная литература

1. Кац В. Г. Глобальные псевдогруппы Картана и простые алгебры Ли характеристики p // УМН. 1971. Т. 26, № 3. С. 199–200.

2. Kuznetsov M. I. The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2 // Commun. Algebra. 1991. Vol. 19, no. 4. Pp. 1281–1312.

3. Кузнецов М. И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными

алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53, № 3. С. 557–589.

4. Скрябин С. М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 3–22.

5. Brown G. E. On the structure of some Lie algebras of Kuznetsov // Michgan Math. J. 1992. Vol. 39, no. 1. Pp. 85–90.

6. Kuznetsov M. I. On Lie algebras of contact type // Commun. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 9. Pp. 2943–30013.

7. Крылюк Я. С. О максимальной размерности неприводимых представлений простых p-алгебр Ли картановских серий S и H // Матем. сб. 1984. Т. 123, № 1. С. 108–119.

8. Целоусов М. Ю. Дифференцирования алгебр Ли картановского типа // Изв. вузов. Матем. 1970. № 7. С. 126–134.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Франк. / А.А. Ладилова // Изв. вузов. Матем. – 2009. № 8. – С. 53–56.

Другие публикации:

2. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Франк / А.А. Ладилова //Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань. – 2006. – Т. 34. – С. 148–149.

3. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр серии R / А.А. Ладилова // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посв. 80-летию В.Е. Воскресенского. Тезисы докладов. – Самара. – 2007. – С. 35-36.

4. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии R / А.А. Ладилова // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева. Тезисы докладов. – Санкт-Петербург. – 2007. – С. 48–49.

5. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y / А.А. Ладилова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань. – 2007. – Т. 36. – С. 140–141.

6. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии *Y*/ А.А. Ладилова // Междунар. алгебраическая конфер., посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тезисы докладов. – Москва. – 2008. – С. 153.

7. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации исключительных простых алгебр Ли характеристики 3 / А.А. Ладилова // Летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Тезисы докладов. – Самара. – 2009. – С. 32–33.

8. Ладилова, А.А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии *Y* / А.А. Ладилова // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. № 14(6). – С. 135–140.