САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КРУТИКОВ Юрий Юрьевич

СУЩЕСТВЕННАЯ РАЗМЕРНОСТЬ И БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии механико–математического факультета Самарского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ВОСКРЕСЕНСКИЙ Валентин Евгеньевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН ПАНИН Иван Александрович (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН) кандидат физико-математических наук, доцент ЛУЗГАРЕВ Александр Юрьевич (Санкт-Петербургский государственный университет)
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «___» ____________ 20___ года в ____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Защита состоится по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, комн. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Автореферат разослан «___» ____________ 20___ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.М. Нежинский.

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Алгебраический тор — это один из базовых элементов структурной теории алгебраических групп. Если основное поле является алгебраически замкнутым, то теория алгебраических торов тривиальна. Все меняется при рассмотрении алгебраических торов над незамкнутым полем. Изучение таких торов действительно многогранно, так как приводит к постановке комбинаторных, алгеброгеометрических и арифметических задач. В данной работе мы затрагиваем лишь малую часть этой области математического знания. Более конкретно, мы ведем исследования в двух направлениях: первое из них — классическая проблема бирациональной классификации алгебраических торов, второе — проблема вычисления существенной размерности линейных алгебраических групп. Интерес к проблеме рациональности алгебраических торов, определенных над незамкнутым полем, не ослабевает уже более сорока лет. Эта проблема почти всегда редуцируется к вычислению основного бирационального инварианта алгебраического тора T. Один из важных результатов В.Е. Воскресенского состоит в том, что тривиальность этого инварианта равносильна стабильной рациональности алгебраического тора. Уже в момент появления этого результата была высказана гипотеза, что стабильно рациональный тор является рациональным над полем определения. В недавно вышедшей монографии Воскресенского представлено доказательство этой давно стоявшей проблемы. Заметим, что данный результат имеет весьма интересное прикладное значение в области торической криптографии: на базе рациональных торов возможно построение криптосистем с очень хорошими параметрами.

Существует несколько путей исследования рациональности алгебраических торов. Один из них связан с рассмотрением максимальных торов в связных полупростых алгебраических группах. Известно, что группа разложения Γ_{gen} общего тора T_{gen} (определенного над полем функций многообразия всех максимальных торов) лежит между группой Вейля и группой автоморфизмов системы корней: $W(R) \subset \Gamma_{gen} \subset A(R)$. Максимальный k-тор $T \subset G$ называется *тором без аффекта*, если $\Pi = \Gamma_{gen}$. Бирациональная геометрия торов без аффекта в полупростых группах стала изучаться более четверти века назад. В пионерской работе данного направления В.Е. Воскресенский и Б.Э. Кунявский разобрали случаи максимальных торов без аффекта в присоединенных и односвязных классических группах. Их результаты получили обобщение в работе А.А. Клячко, в которой он установил выполнение принципа Хассе и слабой аппроксимации для максимальных торов без аффекта в полупростых алгебраических группах, определенных над полем алгебраических чисел следующих типов: внутренние формы Шевалле, односвязные группы, присоединенные группы и простые группы. Обе эти работы в основном посвящены вычислению группы $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$, которая является бирациональным инвариантом k-тора T. Здесь $\overline{X}$ — это гладкая проективная модель тора T. Напомним, что всякий k-тор T с минимальным полем разложения L может быть вложен в гладкое проективное k-многообразие X, тогда $\overline{X} = X \otimes_k L$ и есть проективная модель тора T (такая проективная модель для тора существует над любым полем). Когомологический бирациональный инвариант $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ имеет важное значение, так как вычисление этой группы позволяет установить выполнение принципа Хассе и слабой аппроксимации, а значит, имеет важное значение не только для бирациональной геометрии алгебраических торов, но и для их арифметических приложений. Затем исследователи сконцентрировали свое внимание на проблеме рациональности торов без аффекта в полупростых группах. К настоящему времени эта проблема полностью решена. В совместной работе А. Кортелла и Б.Э. Кунявского разобраны все торы без аффекта в простых односвязных и присоединенных группах и установлена нерациональность этих торов за исключением пяти рациональных случаев: $\mathrm{rk}\,G \leq 2$; G — внутренняя форма присоединенной группы типа A_l; G — форма присоединенной группы типа A_{2l}; G — форма присоединенной группы типа B_l; G — форма односвязной группы типа C_l. И наконец, полный ответ (включая промежуточные группы) получен в работе Н. Лемир, В.Л. Попова и З. Райхштейна "On the Cayley degree of an algebraic group". Тем не менее на данный момент почти нет информации о когомологических бирациональных инвариантах $H^1(F, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ для нерациональных торов без аффекта, где $F \subset L$ — промежуточное расширение поля k. В данной работе в главе 2 мы вычисляем все когомологические бирациональные инварианты для тора без аффекта в полупростой исключительной группе типа F_4.

Другой подход к изучению рациональности алгебраических торов — это последовательное изучение торов размерности 1, 2, и т.д. Как известно, все алгебраические торы размерности один и два являются рациональными над полем определения. Первый пример нерационального алгебраического тора (трехмерный тор с биквадратичным полем разложения) был найден К. Шевалле. Б.Э. Кунявский же получил полную бирациональную классификацию трехмерных алгебраических торов. Уже по поводу четырехмерных торов мало что известно. Настоящая работа является первым систематическим шагом в получении бирациональной классификации четырехмерных торов.

Кроме этого, диссертация посвящена изучению существенной размерности алгебраического тора. Для исследователя, независимо от области исследования понятие *параметра* является базовым. Более того, большой интерес вызывает любой способ уменьшения количества *параметров*, определяющих изучаемую систему. В середине 90-х годов прошлого века Дж. Булер и З. Райхштейн ввели понятие существенной размерности для алгебраических групп над замкнутым полем характеристики 0: неформально говоря, существенная размерность равна минимальному количеству параметров, необходимых для описания данной алгебраической структуры. Они также установили связь теории существенной размерности с 13-ой проблемой Гильберта. Позже в ситуации произвольного поля понятие существенной размерности, используя функториальный подход, дал А.С. Меркурьев. Несмотря на относительно простую структуру алгебраического тора, вопрос вычисления существенной размерности этой алгебраической группы почти не был затронут математиками. Первое значительное продвижение в этом направлении было достигнуто в недавно вышедшем препринте Р. Лотшера, М. МакДональда, А. Майера и З. Райхштейна "Essential p-dimension of algebraic tori". Настоящая же работа связана с вычислением существенной размерности алгебраических торов малой размерности и получением верхней границы существенной размерности для произвольных алгебраических торов.

Цель работы. Целями работы являются изучение бирациональной геометрии четырехмерных алгебраических торов, а также нахождение границ существенной размерности алгебраических торов.

Методы исследования. Основным инструментом в исследованиях являются методы целочисленных представлений групп Галуа и классификация соответствующих целочисленных решеток. Важный аппарат в исследовании – это группы Пикара соответствующих моделей и их группы когомологий. В работе использован алгебраический метод построения вялых (канонических) резольвент модуля Галуа.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором лично.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

i. Вычислены когомологические бирациональные инварианты четырехмерных алгебраических торов. Построены вялые резольвенты. Вычислены бирациональные инварианты максимального тора без аффекта в связной полупростой группе типа F_4.

ii. Получена оценка существенной размерности произвольных алгебраических торов, вычислена существенная размерность торов малой размерности.

iii. Получена классификация аффинных представлений трехмерных алгебраических торов.

Научная новизна. Все представленные в диссертации результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты составляют решение задач, имеющих существенное значение для исследования структурной теории и бирациональной геометрии алгебраических торов. Результаты могут представлять интерес для специалистов Московского, Санкт-Петербургского, Саратовского, Самарского государственных университетов и Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Апробация результатов. Основные научные и практические результаты исследований по теме диссертации докладывались на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета, на Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (2007, Самара), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (2007, Санкт-Петербург), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (2008, Москва), на летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии для молодых математиков европейской части России (2008, Ярославль), на Международной научной конференции, посвящчнной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Вагнера (2008, Саратов), на летней школе-конференции для молодых математиков (2009, Самара), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д.К. Фаддеева (руководитель — проф. А.В. Яковлев, 2009, Санкт-Петербург).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, из них 2 статьи в журнале из перечня, рекомендованного ВАК, и 5 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка используемой литературы, содержащего 38 наименований, и трех приложений. Начиная с первой, главы разделены на пункты. В каждой главе применены одна нумерация для определений, теорем, следствий, замечаний и алгоритмов и отдельная нумерация для формул. Для нумерации примеров и таблиц используются сквозные нумерации. Общий объем диссертации 102 страницы без приложений, 119 страниц с приложениями.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, формулируются задачи, решаемые в диссертации, и дается обзор используемых методов и основных результатов диссертации.

Глава 1 носит подготовительный характер. В ней собран весь необходимый материал из теории функторов и групповых схем, а также теории существенной размерности, требуемый в дальнейшем. Глава содержит краткое изложение некоторых результатов, касающихся аффинных схем, форм и одномерных когомологий алгебраических многообразий, группы Пикара неособой проективной модели и основного бирационального инварианта линейной алгебраической группы, существенной размерности линейных алгебраических групп.

В частности, в этой главе дается определение основного объекта исследования настоящей работы — алгебраического тора как аффинной k-схемы:

$$T = Spec(L[\mathbb{Z}^n])^{\Pi},$$

где T — алгебраический тор, определенный над произвольным полем k, L— расширение Галуа поля k с конечной группой Π, называемое полем разложения тора T, $\mathbb{Z}^n$ — Π-модуль. Подобное определение устанавливает двойственность категорий k-торов, разложимых над L, и категории Π-модулей конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения (решеток Галуа).

Для всякого П-модуля $\widehat{T}$ можно построить точную последовательность

$$0 \to \widehat{T} \to \widehat{S} \to \widehat{N} \to 0, \qquad (*)$$

называемую вялой резольвентой модуля $\widehat{T}$, где $\widehat{S}$ — пермутационный П-модуль, а $\widehat{N}$ — вялый, то есть удовлетворяющий условию $H^{-1}(\pi, \widehat{N}) = 0$ для любой подгруппы π группы П. Модуль $\widehat{N}$, называемый модулем Пикара, определяемый однозначно с точностью до добавления и сокращения на пермутационные прямые слагаемые, то есть с точностью до подобия, был введен и изучен В.Е. Воскресенским, поместившим точную последовательность $(*)$ на титульном листе своей книги "Алгебраические торы". Класс подобия $p(\widehat{T})$ вялого модуля $\widehat{N}$ является бирациональным инвариантом тора T и называется классом Пикара тора T, так как имеет своим представителем геометрический модуль Пикара $\operatorname{Pic} \overline{X}$ проективной неособой модели $\overline{X} \supset \overline{T}$ тора T. Наряду с основным бирациональным инвариантом $p(\widehat{T})$, алгебраический тор имеет и производные когомологические бирациональные инварианты — $H^1(\pi, \widehat{N})$, где π является подгруппой группы П.

Также в этой главе приведено функториальное понятие существенной размерности алгебраической группы. После определения существенной размерности для ковариантых функторов из категории расширений поля k в малую категорию множеств существенная размерность $\mathrm{ed}_k(G)$ произвольной алгебраической группы G над полем k определяется следующим образом. Пусть $H^1(K, G) := H^1(\Gamma_K, G(K_s))$, где K — расширение поля k, K_s — его сепарабельное замыкание и $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_s/K)$. Тогда, $H^1(\_\_, G)$ является ковариантым функтором из категории расширений поля k в малую категорию множеств, и

$$\mathrm{ed}_k(G) = \mathrm{ed}_k(H^1(\_\_, G)).$$

Глава 2 посвящена вычислению когомологических бирациональных инвариантов $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, здесь, как и ранее, $\overline{X}$ — это проективная модель тора T. Первый этап решения этой задачи — это построение канонической резольвенты для алгебраического тора. Мы использовали алгебраический метод построения, предложенный Колье-Теленом и Сансюком. Пусть имеем эпиморфизм П-модулей $\widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{T}^0$, где $\widehat{S}$ — некоторый пермутационный П-модуль. Рассмотрим гомоморфизмы $\widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi$ для всех подгрупп π группы П. Добавляя, если необходимо, прямые пермутационные слагаемые к $\widehat{S}$, можно добиться того, что данные отображения станут сюрьективными для любой подгруппы π. Тогда рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \widehat{T}^0 \longrightarrow 0, \qquad (**)$$

которая в свою очередь индуцирует точную последовательность когомологий

$$0 \to (\widehat{N}^0)^\pi \to \widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi \to H^1(\pi, \widehat{N}^0) \to 0.$$

А это в свою очередь будет означать, что $H^1(\pi, \widehat{N}^0) = 0, \forall \pi \leq \Pi$. Так как $H^{-1}(\pi, \widehat{N}) = H^1(\pi, \widehat{N}^0) = 0$, то, обратив по двойственности точную последовательность $(**)$, мы получим каноническую резольвенту.

Реализация этого метода привела к *алгоритму оптимального перебора* подгрупп π, результат работы этого алгоритма — это список тех подгрупп в группе Π, для которых достаточно проверить условие сюрьективности отображения $\widehat{S}^\pi \twoheadrightarrow (\widehat{T}^0)^\pi$, чтобы получить вялую резольвенту.

Пусть T — произвольный четырехмерный k-тор. Следуя определению тора как аффинной групповой k-схемы, тор T задается двумя объектами: минимальным полем разложения L и действием $\Pi = Gal(L/k)$ на группе характеров тора $\widehat{T}$, то есть представлением $\phi \colon \Pi \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$ (образ $\phi(\Pi)$ также будем обозначать Π, так как из контекста можно понять, о какой группе идет речь). Группа Π называется группой разложения тора T, она является конечной подгруппой в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$. Согласно теореме Жордана, Π содержится в одной из максимальных конечных подгрупп W в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$. Таких подгрупп конечное число; все они описаны С.С. Рышковым. Если мы построим каноническую резольвенту с вялым модулем $\widehat{N}$ для алгебраического тора с максимальной группой разложения, то ограничение на подгруппу Π даст нам каноническую резольвенту и для тора T, а значит, мы вычислим и $H^1(\Pi, \widehat{N})$. Таким образом, задача вычисления $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$ для произвольного четырехмерного k-тора сведена к вычислению таблиц инвариантов $H^1(\pi, \widehat{N})$, где π — произвольная подгруппа в максимальной конечной подгруппе в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$. Заметим, что нам достаточно рассмотреть неразложимые максимальные подгруппы, так как в противном случае рассматриваемый тор T является прямым произведением торов меньшей размерности, для которых бирациональная классификация уже проведена. В обозначениях С.С. Рышкова максимальные конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$ являются группами автоморфизмов следующих квадратичных форм:

$$C_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$S_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4,$$

$$P_4 : 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4,$$

$$T : 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

$$B : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_3x_4,$$

$$Q_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4.$$

Торы с этими группами разложения будем обозначать так же, как обозначаются сами квадратичные формы, а сами группы разложения — W_0, WS, WP, WT, WB и WQ соответственно. Далее мы рассматриваем случай за случаем.

Торы C_4 и S_4 рациональны, это следует из результатов Воскресенского и совместного результата Воскресенского и Кунявского. Для торов P_4, T, B были построены канонические резольвенты для силовских нециклических подгрупп в соответствующих группах разложения. Несмотря на то, что основной бирациональный инвариант этих торов мог оказаться ненулевым (например, для P_4 это следует из результатов Л. Ле Брюна), когомологические инварианты оказались тривиальными. Наконец, рассмотрим тор Q_4. Этот тор является максимальным тором без аффекта в связной полупростой группе типа F_4. Это замечание позволило использовать комбинаторику группы Вейля $W(F_4)$ для упрощения вычислений.

Во-первых, мы предложили следующий метод перечисления элементов $W(F_4)$ с помощью четырехмерных массивов. Так как Группа $W(F_4)$ сопряжена над $\mathbb{Q}$ группе ортогональных матриц $O(4,\mathbb{Q})$, более точно, $W(F_4) =$ $= T^{-1}O(4,\mathbb{Q})\,T$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса стандартной решетки L_0 к базису стандартной решетки L_2. В свою очередь группа $O(4,\mathbb{Q})$ в качестве нормальной подгруппы содержит группу $O(4, f_0)$ целочисленных автоморфизмов квадратичной формы $f_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Эта группа является полупрямым произведением $\mathbf{S}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2^4$, причем

$$O(4,\mathbb{Q}) =< O(4,f_0),\lambda >, \text{ где } \lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (***)$$

Со всякой матрицей $||a_{ij}||$ из $O(4,f_0)$ можно биективно связать отображение $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$ такое, что $\sigma(k) = i_k$ равно номеру строки в k-ом столбце матрицы $||a_{ij}||$, содержащей ненулевой элемент, умноженному на знак этого элемента. Табличная запись отображения σ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$. Если зафиксируем первую строку этой таблицы, то для задания σ достаточно записать вторую строку. По этой записи легко восстановить соответствующую матрицу из $W(F_4)$. Зафиксируем обозначение τ для элемента $W(F_4)$ вида $T^{-1}\lambda T$, который нельзя представить 4-элементным массивом. В силу $(***)$ любой элемент $W(F_4)$ можно записать в виде $\sigma\cdot\tau^i, i = 0..2$, где σ соответствует некоторому 4-элементному массиву.

Далее мы классифицировали все нециклические подгруппы в силовской 2-группе $W(F_4)$ с точностью до сопряжения, используя тот факт, что эта группа изоморфна $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2^4$.

Мы построили каноническую резольвенту для тора Q_4. Средствами гомологической алгебры мы вычислили когомологические инварианты этого тора для всех с точностью до сопряжения подгрупп группы $W(F_4)$. Наконец, собирая вместе все вычислительные результаты этой главы, а также результаты С.Ю. Попова о трехмерных алгебраических торах, получаем основную **теорему 2.8**.

Теорема 2.8. Пусть T — четырехмерный алгебраический k-тор с группой разложения W, X — гладкая проективная модель тора T, $\overline{X} = X \otimes k_s$. Тогда **i.** когомологический бирациональный инвариант $H^1(W, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда

i.i. тор $T = T_1 \times_k T_3$, где T_1 — произвольный одномерный k-тор, а T_3 — трехмерный k-тор, группа разложения которого целочисленно эквивалентна одной из следующих групп:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle, \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

или

i.ii. группа W целочисленно эквивалентна одной из следующих групп в обозначениях замечания 2.3

ϵ	Порядок подгруппы W	Система образующих W
1	4	$(-1-234),(-12-3-4)$
2	4	$(-12-34),(-1432)$
3	8	$(-12-34),(1-23-4),(-1432)$
4	8	$(-143-2),(-12-34)$
5	8	$(-12-34),(1432),(-1-23-4)$
6	8	$(1-4-32),(-1-2-34)$
7	8	$(34-1-2),(-12-34)$
8	16	$(-143-2),(123-4),(-12-34)$
9	16	$(-2341),(1-23-4)$
10	16	$(34-1-2),(-1432),(-12-34)$
11	16	$(34-1-2),(-1-234),(-21-43)$
12	16	$(-2341),(14-32)$
13	32	$(-2341),(-1432),(1-23-4)$
14	48	$(2431)\cdot\tau,(-1-234)$
15	48	$(-2341),\tau$
16	96	$(-12-34)\cdot\tau,(-2341)$

Таблица 8.

ii. когомологический бирациональный инвариант $H^1(W, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда группа W целочисленно эквивалентна одной из следующих групп в обозначениях замечания 2.3

ϵ	Порядок подгруппы W	Система образующих W
1	8	$(34-1-2),(2-1-43)$
2	24	$(2-4-31)\cdot\tau,(-3-412)$

Таблица 9.

iii. в остальных случаях $H^1(W, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0$.

Глава 3 посвящена оценке и вычислению существенной размерности алгебраических k-торов. Если k — это алгебраически замкнутое поле, то алгебраический тор — это специальная группа Серра, а значит, его существенная размерность равна 0. Мы рассматриваем случай произвольного поля k и используем функториальное определение существенной размерности алгебраической группы, которое принадлежит А.С. Меркурьеву. Непосредственное применение определения существенной размерности приводит к верхней границе, которую мы обозначили $\overline{\mathrm{ed}}(T)$, для существенной размерности алгебраического тора T.

Теорема 3.1. Пусть T алгебраический k-тор, тогда

$$\mathrm{ed}_k(T) \le min \dim(T_1), \tag{3.2}$$

где минимум берется по всем точным последовательностям алгебраических k-торов

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow T_1 \longrightarrow 1,$$

где S — квазиразложимый алгебраический тор.

Отметим, что имеются случаи, когда неравенство в теореме 3.1 строгое. Опишем его. Пусть L_6/k — циклическое расширение поля k, $[L : k] = 6$, $\Pi = \mathrm{Gal}(L_6/k) =< \sigma, \sigma^6 = 1 >$ и $L_2 = L_6^{<\sigma^2>}, L_3 = L_6^{<\sigma^3>}$. Рассмотрим следующий k-тор T, заданный точной последовательностью

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow R_{L_2/k}(\mathrm{G}_m) \times R_{L_3/k}(\mathrm{G}_m) \xrightarrow{N_2 \cdot N_3} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1,$$

где N_2 и N_3 — нормы расширений L_2/k и L_3/k, соответственно. Имеем $\mathrm{ed}_k(T) = 0$, а по теореме 3.1 $\overline{\mathrm{ed}}(T) = 1$.

Далее мы предлагаем алгоритм вычисления $\overline{\mathrm{ed}}(T)$ для произвольного алгебраического тора. После чего приводим тип алгебраических торов, для которых этот алгоритм дает точное значение существенной размерности.

Теорема 3.4. Если $T = R^1_{M/F}(\mathbb{G}_m)$ — норменный F-тор, где F/k и M/F— промежуточные сепарабельные расширения для расширения L/k и $k \subset F \subset M \subset L$, тогда

$$\mathrm{ed}_k(R_{F/k}(T)) = [F : k].$$

Эта теорема имеет важное следствие, которое позволяет получить нижнюю оценку существенной размерности для достаточно широкого класса алгебраических торов.

Следствие 3.5. Если алгебраический k-тор T допускает замкнутое вложение в тор $N = R_{F/k}(R^1_{M/F}(\mathbb{G}_m))$, где $F/k, M/F$ — конечные сепарабельные расширения полей и $k \subset F \subset M \subset L$, то

$$\mathrm{ed}_k(T) \ge [F : k].$$

Далее мы рассматриваем торы малой размерности, используя их аффинную реализацию. Так как чаще всего мы получаем верхнюю и нижнюю оценки $\mathrm{ed}_k(T)$, то в силу неравенств для алгебраических k-торов

$$max\{\mathrm{ed}_k(T_1), \mathrm{ed}_k(T_2)\} \leq \mathrm{ed}_k(T_1 \times T_2) \leq \mathrm{ed}_k(T_1) + \mathrm{ed}_k(T_2),$$

мы сконцентрировали свое внимание на неразложимых алгебраических торах. Результаты вычислений представлены в **теоремах 3.7, 3.8, 3.9** и соответствующих таблицах 10, 13, 14.

Теорема 3.7. (о существенной размерности двумерных алгебраических торов) Существенная размерность неразложимых двумерных алгебраических k-торов удовлетворяет условиям таблицы 10.

Двумерный алгебраический тор	ed
$T_1^2 = R_{L/k}(\mathbb{G}_m)$	$=0$
$T_2^2 = R^1_{L/k}(\mathbb{G}_m), T_6^2 = R^1_{L/F}(\mathbb{G}_m)$	$=1$
$T_3^2 = R_{F/k}\left(R^1_{L/F}(\mathbb{G}_m)\right), T_4^2 = R_{F/k}\left(R^1_{L/F}(\mathbb{G}_m)\right),$ $T_7^2 = R_{F_2/k}\left(R^1_{F_4/F_2}(\mathbb{G}_m)\right)$	$=2$
$T_5^2 = R_{F_2/k}\left(R^1_{L/F_2}(\mathbb{G}_m)\right) \bigcap R_{F_3/k}\left(R^1_{L/F_3}(\mathbb{G}_m)\right),$ $T_8^2 = R_{F_3/k}\left(R^1_{F_6/F_3}(\mathbb{G}_m)\right) \bigcap R_{F_2/k}\left(R^1_{F_6/F_2}(\mathbb{G}_m)\right)$	≥ 3 ≤ 4

Таблица 10.

Мы приводим аффинную реализацию тридцати четырех неразложимых трехмерных алгебраических торов и фиксируем их нумерацию $T_1, T_2, ..., T_{34}$.

Теорема 3.8. Для неразложимых трехмерных алгебраических торов T существенная размерность удовлетворяет условиям таблицы 13 (используем нумерацию торов из Таблицы 11)

Трехмерный алгебраический тор	ed
T_1, T_{10}	=0
$T_3, T_6, T_{16}, T_{20}, T_{29}$	=1
T_2, T_5, T_7, T_{15}	≤ 1
$T_8, T_9, T_{18}, T_{19}, T_{23}, T_{26}, T_{27}, T_{32}$	=3
T_4, T_{12}	≥ 2 ≤ 5
$T_{11}, T_{13}, T_{14}, T_{17}, T_{22}, T_{24}, T_{28}, T_{33}$	≥ 4 ≤ 5
$T_{21}, T_{25}, T_{30}, T_{31}, T_{34}$	≥ 6 ≤ 9

Таблица 13.

Теорема 3.9. Для четырехмерных алгебраических торов с максимальной группой разложения существенная размерность определяется следующей таблицей

Четырехмерные алгебраические торы	ed
C_4	=4
P_4	≥ 5 ≤ 6
B_4	≥ 6 ≤ 8
T	≥ 9 ≤ 14
S_4	≥ 10 ≤ 16
Q_4	≥ 12 ≤ 20

Таблица 14.

Приложение A, B, C. Здесь приведены результаты работы алгоритмов вычисления когомологических бирациональных инвариантов для четырехмерных алгебраических торов из главы 2.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Крутиков Ю.Ю. Аффинные представления трехмерных алгебраических торов // Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия, №7(57), Самара, 2007, С. 92-106.

2. Крутиков Ю.Ю. Бирациональные инварианты тора без аффекта в исключительной группе типа F_4 // Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия, №6(72), Самара, 2009, С. 58-68.

В прочих изданиях:

3. Крутиков Ю.Ю. Аффинные представления трехмерных торов // Тезисы докладов Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского. Самара, 2007. С. 31-32.

4. Крутиков Ю.Ю. Affine representations of three dimensional algebraic tori. // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева. Санкт-Петербург, 2007. С.128-129.

5. Крутиков Ю.Ю. Каноническая резольвента торов типа T_{pqr} // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008, с. 142-143.

6. Крутиков Ю.Ю. Каноническая резольвента торов типа T_{pqr} // Тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2008, с. 83-85.

7. Крутиков Ю.Ю. Существенная размерность алгебраических торов // Тезисы докладов летней школы-конференции "Алгебра Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Самара, 2009, С. 29-30.