САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ИГНАТЬЕВ Михаил Викторович

ОРБИТЫ, ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРЫ УНИПОТЕНТНЫХ ГРУПП

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии механико–математического факультета Самарского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ПАНОВ Александр Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВАВИЛОВ Николай Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет)
	кандидат физико-математических наук, доцент АРЖАНЦЕВ Иван Владимирович (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «___» ____________ 20___ года в ____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Защита состоится по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, комн. 311 (помещение ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН).

Автореферат разослан «___» ____________ 20___ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Нежинский В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из самых важных и красивых областей современной алгебры является теория представлений. В начале XX века её роль сводилась к изучению представлений конечных групп и конечномерных ассоциативных алгебр, но постепенно круг проблем, изучаемых теорией представлений, расширялся в связи с задачами анализа, геометрии и физики. В настоящее время теория представлений имеет обширные приложения в теории групп и алгебр Ли, теории алгебраических групп, гармоническом анализе, квантовой механике.

Одним из интереснейших классов с точки зрения теории представлений являются конечные унипотентные группы (точнее, максимальные унипотентные подгруппы в группах Шевалле над конечными полями); именно им и посвящена настоящая работа. Основным инструментом в теории представлений таких групп является созданный А.А. Кирилловым в 1962 г. *метод орбит.*

Первоначально этот метод использовался для описания неприводимых (бесконечномерных) унитарных представлений вещественных нильпотентных групп Ли в гильбертовых пространствах. Первые общие результаты о таких представлениях были получены Ж. Диксмье. Решающим продвижением стала статья Кириллова[1], в которой было показано, что неприводимые представления связной односвязной нильпотентной группы Ли однозначно соответствуют орбитам её *коприсоединённого* представления (сопряжённого представления к присоединённому представлению группы Ли в своей алгебре Ли). Позже выяснилось, что метод орбит работает — с некоторыми поправками — и для других типов групп Ли, а с помощью коприсоединённых орбит можно построить множество примеров интегрируемых систем.

В 1977 г. Д. Каждан доказал[2], что метод орбит позволяет описывать неприводимые конечномерные комплексные представления максимальных унипотентных подгрупп в группах Шевалле над конечными полями. Изучению орбит тех или иных унипотентных групп над конечным полем посвящено огромное число работ; отметим хотя бы статьи[3,4], где обсуждаются различные асимптотические задачи, связанные с числом орбит данной размерности.

[1]Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. // УМН, т. **17**, 1962, с. 57–110.

[2]Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis. Israel J. Math., v. **28**, 1977, p. 272–286.

[3]Kirillov A.A. Variations on the triangular theme. AMS Transl., v. **169**, 1995, p. 43–73.

[4]Kirillov A.A., Melnikov A. On a remarkable sequence of polynomials. Publ. SMF, no. 2, 1996, p. 35–42.

Дело в том, что задача описания всех неприводимых представлений, будучи переформулированной в терминах орбит, не становится от этого проще. Описание множества коприсоединённых орбит в общем случае неизвестно и представляется чрезвычайно трудной проблемой. С другой стороны, некоторые специальные серии орбит изучены достаточно хорошо.

Так, например, ещё в 1962 г. Кирилловым было получено описание всех орбит максимальной размерности (так называемых *регулярных* орбит) *унитреугольной* группы $U_n(\mathbb{R})$ — группы всех унипотентных нижнетреугольных вещественных матриц; оно остаётся верным и над конечным полем, когда характеристика основного поля достаточно велика. Орбиты предмаксимальной размерности этой группы (мы будем называть их *субрегулярными*) были полностью описаны А.Н. Пановым в 2007 г. В статьях[5,6] К. Андре и А.М. Нето развивается теория *базисных* характеров, или *суперхарактеров* максимальных унипотентных подгрупп классических матричных групп над конечными полями. В частности, из полученных там результатов вытекает описание регулярных орбит максимальной унипотентной подгруппы симплектической группы и *элементарных* орбит (орбит одного корневого ковектора) для всех классических систем корней. Упомянем ещё работу[7] И.М. Айзекса, в которой речь идёт о характерах подгрупп $U_n(\mathbb{F}_q)$ специального вида.

Оказывается, что почти все упомянутые выше орбиты (и вообще почти все орбиты, сколь-нибудь полно изученные к настоящему времени) укладываются в единую схему: все они относятся к орбитам, ассоциированным с теми или иными ортогональными подмножествами в системах корней. Изучение этого класса орбит и является одной из основных задач диссертационной работы.

С другой стороны, даже если известно полное описание какого-либо класса коприсоединённых орбит, явное вычисление неприводимых характеров, соответствующих этим орбитам, представляет отдельную вычислительную проблему. К примеру, формула для характеров, соответствующих регулярным орбитам $U_n(\mathbb{F}_q)$, была получена Андре лишь в 2001 г. Вторая часть диссертационного исследования посвящена вычислению характеров, соответствующих субрегулярным орбитам этой группы.

---

[5] Andrè C.A.M. The basic character table of the unitriangular group. J. Algebra, v. **241**, 2001, p. 437–471.

[6] Andrè C.A.M., Neto A.M. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n. J. Algebra, v. **305**, 2006, p. 394–429.

[7] Isaacs I.M. Characters of groups associated with finite algebras. J. Algebra, v. **177**, 1995, p. 708–730.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в диссертационной работе, находятся в контексте современной теории представлений унипотентных алгебраических групп над конечными полями.

Цель работы. Целью работы является изучение орбит коприсоединённого представления максимальных унипотентных подгрупп в группах Шевалле над конечными полями, ассоциированных с ортогональными подмножествами в системах корней, а также получение точной формулы для субрегулярных характеров унитреугольной группы.

Методы исследования. Используются методы алгебраической геометрии и теории представлений конечных групп. Доказательства фактов, касающихся орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами, чаще всего основаны на индукции по рангу системы корней. При изучении субрегулярных характеров унитреугольной группы ключевую роль играет метод полупрямого разложения Г. Макки.

Основные результаты. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- Получена оценка сверху в терминах группы Вейля на размерности коприсоединённых орбит максимальных унипотентных подгрупп в группах Шевалле над конечными полями, ассоциированных с ортогональными подмножествами в системах корней.

- Для классических систем корней получена точная формула для размерности таких орбит. Как следствие, описаны все возможные размерности неприводимых комплексных представлений максимальных унипотентных подгрупп в классических группах над конечными полями. Кроме этого, построены поляризации для канонических форм на орбитах.

- Полностью описаны субрегулярные характеры унитреугольной группы: найдены уравнения, задающие произвольный класс сопряженности, на котором значение данного характера отлично от нуля, как аффинное многообразие, и вычислено это значение.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные автором лично.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены в теории представлений конечных групп и в дальнейших исследованиях по методу орбит; они могут представлять интерес для специалистов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургского государственного университета, Самарского государственного университета, Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Апробация работы. Основные результаты исследований по теме диссертации докладывались на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета (рук. проф. В.Е. Воскресенский), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д.К. Фаддеева ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН (рук. проф. А.В. Яковлев), на семинаре "Алгебраические группы" кафедры высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета (рук. проф. Н.А. Вавилов), на семинарах кафедры высшей алгебры Московского государственного университета "Группы Ли и теория инвариантов" (рук. проф. Э.Б. Винберг, проф. А.Л. Онищик, доц. И.В. Аржанцев, доц. Д.А. Тимашёв) и "Избранные вопросы алгебры" (рук. доц. И.А. Чубаров), на Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (Самара, 2007 г.), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007 г.), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 2008 г.), на Летней школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" (Самара, 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[7]. Работы [1], [2] опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 60 наименований. Первая глава состоит из двух параграфов, вторая и третья — из трёх параграфов. Объём диссертации — 156 страниц.

Содержание диссертации

Во **введении** излагается история вопроса, обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируются цели и задачи работы, даётся обзор методов исследования и основных результатов и описывается структура диссертации.

Глава 1 носит подготовительный характер. В ней собран необходимый материал из теории групп Шевалле и теории представлений конечных групп. В **параграфе 1** мы напоминаем основные факты, связанные с системами корней и группами Шевалле над конечными полями. В частности, через Φ обозначается произвольная приведённая система корней, а через G и $G(q)$ — *группы Шевалле* с системой корней Φ над полями k и $\mathbb{F}_q$ соответственно. Здесь p — достаточно большое простое число (например, достаточно потребовать $p > \operatorname{rk}\Phi + |\Phi|$), $q = p^r$ для некоторого $r \geqslant 1$, $\mathbb{F}_p$ — простое поле из p элементов, $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ — его алгебраическое замыкание и $\mathbb{F}_q = \{t \in k \mid t^q = t\}$ — конечное поле из q элементов. Подчеркнём, что $G(q)$ — подгруппа в G.

Далее вводится ряд обозначений, связанных с максимальными унипотентными подгруппами в G и $G(q)$. А именно, через Δ обозначается произвольный фиксированный базис Φ, через Φ^+ и Φ^- — соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Phi^+}$ — корневые векторы из *базиса Шевалле* $\mathfrak{g}$, соответствующие положительным корням, и $\mathfrak{u}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ вида $\mathfrak{u} = \sum_{\alpha\in\Phi^+} ke_\alpha$. Тогда корректно определено *экспоненциальное отображение* $\exp\colon \mathfrak{u} \to G$. Его образ U будет максимальной унипотентной подгруппой в G, причём $\mathfrak{u}$ будет алгеброй Ли группы U. Отображение $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ взаимно однозначно, обратное отображение обозначается через $\ln\colon U \to \mathfrak{u}$. Для произвольных элементов $x, y \in \mathfrak{u}$ имеет место *формула Кэмпбелла–Хаусдорфа*:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y + z)$$

для некоторого $z \in [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$, где $\mathfrak{v}$ — любая подалгебра Ли в $\mathfrak{u}$, содержащая оба элемента x, y, а $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] = \langle [u, v], u, v \in \mathfrak{v}\rangle_k$.

Аналогично определяется подалгебра $\mathfrak{u}(q) = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{F}_q e_\alpha$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}(q)$ группы $G(q)$ и максимальная унипотентная подгруппа $U(q) = \exp \mathfrak{u}(q)$ в $G(q)$ ($\mathfrak{u}(q)$ будет её алгеброй Ли над $\mathbb{F}_q$). Подчеркнём, что $U(q)$ — подгруппа в U и $\mathfrak{u}(q)$ — $\mathbb{F}_q$-подпространство в $\mathfrak{u}$.

Параграф 2 посвящён краткому изложению метода орбит для конечных унипотентных групп. Группа U действует на $\mathfrak{u}$ с помощью присоединённого представления:

$$\mathrm{Ad}_{\exp(x)}(y) = (\exp \mathrm{ad}_x)(y), \quad x, y \in \mathfrak{u}$$

(оператор $\mathrm{ad}_x \colon \mathfrak{u} \to \mathfrak{u} \colon y \mapsto [x, y]$ является нильпотентным, поэтому отображение $\exp \mathrm{ad}_x$ корректно определено). Сопряжённое представление в пространстве $\mathfrak{u}^* = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{u}, k)$ называется *коприсоединённым*. Мы обозначаем результат коприсоединённого действия элемента $g = \exp(x) \in U$ на линейную форму $f \in \mathfrak{u}^*$ через $g.f$:

$$\begin{aligned}(g.f)(y) &= f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(y)) = f(\exp \mathrm{ad}_{-x} y)\\ &= f(y) - f([x, y]) + \frac{1}{2} \cdot f([x, [x, y]]) - \ldots\end{aligned}$$

Произвольная коприсоединённая орбита является неприводимым аффинным многообразием как орбита действия связной унипотентной группы на аффинном пространстве.

Аналогично определяется коприсоединённое представление группы $U(q)$ в пространстве $\mathfrak{u}^*(q) = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{F}_q e_\alpha^* \subset \mathfrak{u}^*$ (здесь e_α^* — ковекторы, двойственные к корневым векторам e_α). Обратим внимание, что мы можем рассматривать орбиты произвольной линейной формы $f \in \mathfrak{u}^*(q) \subset \mathfrak{u}^*$ как под действием группы $U(q)$, так и под действием всей группы U; обозначим эти орбиты через $\Omega(q)$ и Ω соответственно. Известно, что размерность Ω всегда чётна, причём $|\Omega(q)| = q^{\dim \Omega}$. Суть метода орбит коротко можно выразить так: существует взаимно однозначное соответствие между множеством коприсоединённых орбит $\mathfrak{u}^*(q)/U(q)$ и множеством классов эквивалентности неприводимых конечномерных комплексных представлений группы $U(q)$.

Подробнее, выберем и зафиксируем произвольный нетривиальный гомоморфизм групп $\theta \colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$. Для данной орбиты $\Omega(q) \subset \mathfrak{u}^*(q)$ определим функцию $\chi = \chi_{\Omega(q)}$ на группе $U(q)$ следующим правилом:

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega(q)|}} \cdot \sum_{\lambda \in \Omega(q)} \theta(\lambda(x)), \quad g \in U(q), x = \ln(g) \in \mathfrak{u}(q).$$

Функция χ является характером некоторого неприводимого представления $T = T_{\Omega(q)}$ группы $U(q)$, любой неприводимый характер можем быть получен таким образом и $T_{\Omega_1(q)} \cong T_{\Omega_2(q)}$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1(q) = \Omega_2(q)$.

Более того, можно указать даже явную конструкцию представления T по орбите $\Omega(q)$. Напомним, что *поляризацией* для линейной формы $f \in \mathfrak{u}^*(q)$ называется произвольная подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}(q)$, являющаяся одновременно f-*изотропным* подпространством (то есть удовлетворяющая условию $f([x, y]) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{p}$) и максимальная по включению среди всех таких подпространств. (Дословно такое же определение можно дать, конечно, и для линейных форм из $\mathfrak{u}^*$.) Пусть f — произвольная точка на орбите $\Omega(q)$, а $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}(q)$ — любая поляризация для f. (Согласно классической конструкции М. Вернь[8], поляризация всегда существует.) Тогда

$$T_{\Omega(q)} \cong \mathrm{Ind}_P^{U(q)} \psi,$$

где $P = \exp \mathfrak{p} \subset U(q)$, а ψ — одномерное представление этой подгруппы вида $\psi(g) = \theta(f(\ln(g)))$, $g \in P$. (В частности, полученное представление не зависит — с точностью до изоморфизма — от выбора точки f на орбите и поляризации для f.) Тем самым, поляризации играют ключевую роль в явном построении неприводимого представления, соответствующего данной коприсоединённой орбите. Отметим также, что $\dim \Omega = 2 \cdot \mathrm{codim}_{\mathfrak{u}} \mathfrak{p}$ для любой поляризации (и даже любого максимального изотропного подпространства) любой точки на Ω.

Кроме этого, во втором параграфе мы рассматриваем ряд важных примеров коприсоединённых орбит: регулярные и субрегулярные орбиты унитреугольной группы (она отвечает системе корней $\Phi = A_{n-1}$), то есть орбиты соответственно максимальной и предмаксимальной размерности, регулярные орбиты для $\Phi = C_n$, элементарные орбиты.

Наконец, мы кратко напоминаем суть метода Г. Макки полупрямого разложения. Предположим, что конечная группы $\mathcal{G} = A \rtimes B$ представлена в виде полупрямого произведения своих подгрупп A и B (то есть $\mathcal{G} = AB$, $A \lhd \mathcal{G}$ и $A \cap B = \{e\}$), причём группа A — абелева. Примером является $U_n(q) = U_0(q) \rtimes \widetilde{U}_{n-1}(q)$, где

$$U_0(q) = \{g \in U_n(q) \mid g_{i,j} = 0 \text{ при } 2 \leqslant j < i \leqslant n\} \cong \mathbb{F}_q^n,$$
$$\widetilde{U}_{n-1}(q) = \{g \in U_n(q) \mid g_{i,1} = 0 \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n\} \cong U_{n-1}(q).$$

[8] Vergne M. Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B, v. **270**, 1970, p. A173–A175.

Тогда любой элемент $g \in \mathcal{G}$ однозначно представляется в виде произведения $g = g_A g_B$, $g_A \in A$, $g_B \in B$, поэтому корректно определены отображения $\pi_A^{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \to A \colon g \mapsto g_A$ и $\pi_B^{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \to B \colon g \mapsto g_B$.

Выберем произвольный неприводимый характер κ группы A и обозначим через $B^\kappa = \{b \in B \mid \kappa(bab^{-1}) = \kappa(a)$ для всех $a \in A\}$ его централизатор в подгруппе B. Пусть, в свою очередь, ψ — произвольный неприводимый характер подгруппы B^κ. Отображения $\kappa_0 = \kappa \circ \pi_A^{AB^\kappa}$ и $\psi_0 = \psi \circ \pi_B^{AB^\kappa}$ являются характерами группы $AB^\kappa = A \rtimes B^\kappa$. Более того, $\mathrm{Ind}_{AB^\kappa}^{\mathcal{G}} \kappa_0 \psi_0$ будет неприводимым характером группы $\mathcal{G}$; любой её неприводимый характер может быть так получен. (Это позволяет свести изучение тех или иных неприводимых характеров группы $\mathcal{G}$ к рассмотрению неприводимых характеров B^κ.)

Глава 2 посвящена изучению коприсоединённых орбит групп U и $U(q)$, ассоциированных с ортогональными подмножествами в системе корней Φ. В **параграфе 3** мы даем необходимые определения и рассматриваем такие орбиты для всех систем корней с простыми связями, а также для систем корней типа F_4 и G_2.

Пусть D — произвольное *ортогональное* (то есть состоящее из попарно ортогональных корней) подмножество в Φ^+. Выберем любое отображение $\xi \colon D \to k^* \colon \beta \mapsto \xi_\beta$ и определим линейную форму $f = f_{D,\xi} \in \mathfrak{u}^*$ правилом

$$f = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta e_\beta^*.$$

Определение. Будем говорить, что коприсоединённая орбита $\Omega = \Omega_{D,\xi}$ элемента f *ассоциирована* с ортогональным подмножеством D. Элемент f называется *канонической формой* на орбите Ω.

Точно такое же определение можно дать и для орбит $\Omega(q)$ коприсоединённого представления группы $U(q)$. Все рассмотренные во втором параграфе орбиты ассоциированы с теми или иными ортогональными подмножествами в системах корней.

Нас, в основном, будет интересовать, чему равна размерность орбиты Ω как неприводимого аффинного многообразия (соответственно, сколько точек лежит на орбите $\Omega(q)$, или же какую размерность имеет соответствующее ей неприводимое представление группы $U(q)$.) Для ответа на этот вопрос в рассмотрение вовлекаются инволюции в группах Вейля. А именно, обозначим через $W = W(\Phi)$ группу Вейля системы корней Φ, а через $\sigma = \sigma_D$ — инволюцию (элемент второго порядка) в W вида

$$\sigma = \prod_{\beta \in D} r_\beta,$$

где r_β — отражение, соответствующее корню β (порядок, в котором следуют отражения, не имеет значения, ибо они коммутируют ввиду ортогональности D). Пусть $l(\sigma)$ — длина σ в простых, а $s(\sigma)$ — в произвольных отражениях. (Другими словами, $l(\sigma) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \sigma\alpha \in \Phi^-\}$ и $s(\sigma) = |D|$.) Основной результат второй главы выражается следующей теоремой:

Теорема 1. *Размерность орбиты Ω не зависит от выбора отображения $\xi\colon D \to k^*$ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$. Иначе говоря,*

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta,$$

где $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ зависит только от подмножества D (но не от ξ).

Заметим, что оценка на размерность Ω во многих случаях является точной (например, при $\Phi = A_n$ и $\Phi = C_n$ "дефект" ϑ всегда равен нулю); однако, есть примеры, когда получается строгое неравенство.

Сначала мы показываем, что теорему достаточно проверить для неприводимых систем корней и для ортогональных подмножеств специального вида. (Точнее говоря, можно не рассматривать ортогональные подмножества, содержащие два положительных корня β_1, β_2, если β_1 можно представить в виде $\beta_1 = \beta_2 + \alpha$ для какого-то $\alpha \in \Phi^+$.) Затем мы доказываем эту теорему для всех систем корней с простыми связями. Доказательство использует индукцию по рангу системы корней Φ. Мы выбираем произвольный корень $\beta \in D$, максимальный относительно естественного порядка на корнях, и рассматриваем систему корней

$$\widetilde{\Phi} = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \perp \beta\}.$$

Очевидно, $\operatorname{rk} \widetilde{\Phi} < \operatorname{rk} \Phi$, и удаётся свести вопрос к изучению орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами в системе корней $\widetilde{\Phi}$.

В конце третьего параграфа мы доказываем теорему 1 для систем корней типа F_4 и G_2. Случай G_2 разбирается совсем просто, а при $\Phi = F_4$ приходится часть ортогональных подмножеств рассматривать по отдельности и для каждого из них строить максимальное f-изотропное подпространство, зависящее только от подмножества D (но не от отображения ξ).

Далее, в **параграфе 4** мы уточняем полученные результаты для классических систем корней. (Случай $\Phi = A_n$ полностью разобран А.Н. Пановым в работе[9], поэтому мы акцентируем внимание на остальных классических системах корней.) Удобно представлять множество положительных корней как подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ следующим образом: $\Phi^+ = \Phi_0^+ \cup \Phi_1^+$, где $\Phi_0^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, а

$$\Phi_1^+ = \begin{cases} \{\varepsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}, & \text{если } \Phi = B_n, \\ \{2\varepsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}, & \text{если } \Phi = C_n, \\ \varnothing, & \text{если } \Phi = D_n. \end{cases}$$

Здесь $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$.

Для произвольного ортогонального подмножества $D \subset \Phi^+$ положим

$$\begin{aligned} d_1 &= \#\{(i,j,l,s) \mid i < l < s < j \text{ и } \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_s \in D\}, \\ d_2 &= \#\{(i,j,l,s) \mid i < l < j < s \text{ и } \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_l - \varepsilon_s, \varepsilon_l + \varepsilon_s \in D\}, \\ d_3 &= \#\{(i,j) \mid \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i > l, \text{ где } \varepsilon_l \in D\}, \\ d_4 &= \#\{(i,j) \mid \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D \text{ и } i < j < l, \text{ где } \varepsilon_l \in D\}. \end{aligned}$$

Эти числа могут быть не равны нулю лишь при $\Phi = B_n$ или $\Phi = D_n$. Более того, два последних числа могут отличаться от нуля лишь при $\Phi = B_n$. В этом случае множество D может содержать не более одного корня вида ε_l (другие подмножества можно не рассматривать: они не дают новых примеров орбит), так что d_3 и d_4 корректно определены.

Теорема 2. *Пусть Φ относится к типу B_n, C_n или D_n. Тогда "дефект" ϑ в формуле из теоремы 1 для размерности орбиты Ω, ассоциированной с ортогональным подмножеством D, равен $\vartheta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$. В частности, если $\Phi = C_n$, то $\vartheta = 0$.*

Доказательство этой теоремы также основано на индукции по рангу Φ. Как следствие, мы описываем все возможные размерности неприводимых конечномерных комплексных представлений группы $U(q)$. Пусть 2μ — максимально возможная размерность коприсоединённой орбиты группы U. (Соответственно, $q^{2\mu}$ — максимальное число точек на орбите группы $U(q)$, а q^{μ} —

[9] Панов А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты. // Зап. научн. сем. ПОМИ, т. **349**, вып. 16, 2007, с. 150–173.

максимально возможная размерность неприводимого представления этой группы.) Легко проверить, что

$$\mu = \mu(\Phi) = \begin{cases} n(n-1)/2, & \text{если } \Phi = B_n \text{ или } C_n, \\ n(n-1)/2, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ чётно}, \\ (n-1)^2/2, & \text{если } \Phi = D_n \text{ и } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Следствие. *Группа $U(q)$ обладает неприводимым комплексным представлением размерности N тогда и только тогда, когда $N = q^l$ для некоторого $0 \leqslant l \leqslant \mu$.*

Достаточно для каждого такого l предъявить орбиту Ω группы U, для которой $\dim \Omega = 2l$. Оказывается, для всякого l среди орбит, ассоциированных с ортогональными подмножествами, такая орбита найдётся. (Мы просто строим соответствующее подмножество D и вычисляем размерность ассоциированной с ним орбиты Ω по теореме 2.)

Кроме этого, в четвёртом параграфе мы строим поляризации для канонических форм на рассматриваемых орбитах. Определим отображения $\mathrm{row}\colon \Phi^+ \to \{-n, \ldots, n\}$ и $\mathrm{col}\colon \Phi^+ \to \{1, \ldots, n\}$ правилом $\mathrm{row}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mp j$, $\mathrm{row}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{row}(2\varepsilon_i) = -i$, $\mathrm{col}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mathrm{col}(\varepsilon_i) = \mathrm{col}(2\varepsilon_i) = i$. Положим $\mathcal{R}_i = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{row}(\alpha) = i\}$ и $\mathcal{C}_j = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{col}(\alpha) = j\}$ (эти множества назовём *i-ой строкой* и *j-ым столбцом* Φ^+ соответственно). Далее, для любого $\beta \in \Phi^+$ корни $\alpha, \gamma \in \Phi^+$ будем называть *β-сингулярными*, если $\alpha + \gamma = \beta$; множество всех β-сингулярных корней обозначим через $S(\beta)$.

Для данного ортогонального подмножества $D \subset \Phi^+$ пусть $j_1 < \ldots < j_t$ — все те номера столбцов Φ^+, в которых лежат корни из D. Положим $j_0 = 0$ и обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D = \bigcup_{i=0}^{t} \mathcal{M}_{j_i}$, где $\mathcal{M}_0 = \varnothing$ и для каждого $i = 1, \ldots, t$

$$\mathcal{M}_{j_i} = \{\gamma \in S^-(\beta) \mid \beta \in D \cap \mathcal{C}_{j_i} \text{ и } \gamma, \beta - \gamma \notin \bigcup\nolimits_{l=0}^{i-1} \mathcal{M}_{j_l}\}.$$

Рассмотрим также подпространство $\mathfrak{p}_0$ в $\mathfrak{u}$ (или в $\mathfrak{u}(q)$), натянутое на все векторы вида $\xi_{\varepsilon_l + \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l - \varepsilon_j} - \xi_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \cdot e_{\varepsilon_l + \varepsilon_j}$, где $\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \in D$, $i < l < j$, $\varepsilon_l - \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_j \in \mathcal{M}_i$ и $D \cap \mathcal{R}_{-l} = \varnothing$.

Предложение. *Подпространство $\mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \mathcal{M}} k e_\alpha + \mathfrak{p}_0$ в алгебре Ли $\mathfrak{u}$ (соответственно, $\mathfrak{u}(q)$) будет поляризацией для канонической формы f на орбите Ω (соответственно, $\Omega(q)$), ассоциированной с ортогональным подмножеством D.*

В **главе 3** получено полное описание субрегулярных характеров унитреугольной группы $U(q) = U_n(q)$; по определению, это неприводимые характеры, соответствующие коприсоединённым орбитам предмаксимальной размерности, равной $2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{[n/2]}(n-2i) - 1\right)$. В **параграфе 5** в качестве примера мы, используя описанный в первой главе метод Макки полупрямого разложения, доказываем формулу Андре для вычисления характеров основной серии группы $U_n(q)$ (они соответствуют регулярным орбитам). Кроме этого, мы приводим принадлежащую Панову классификацию субрегулярных орбит унитреугольной группы.

Все такие орбиты распадаются на классы, нумеруемые натуральным числом δ, $1 \leqslant \delta \leqslant n_1$, где $n_1 = [(n-1)/2]$. Будем для удобства обозначать $\mathscr{D}(n) = \{(i,j), 1 \leqslant j < i \leqslant n\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и для всякой линейной формы $f \in \mathfrak{u}^*(q)$ положим $\mathrm{Supp}(f) = \{(i,j) \in \mathscr{D}(n) \mid f(e_{i,j}) \neq 0\}$ ($e_{i,j}$ — стандартная матричная единица). На каждой субрегулярной орбите лежит ровно одна *каноническая форма* — элемент $f \in \mathfrak{u}^*(q)$, для которого $\mathrm{Supp}(f) = \mathscr{D}_\delta$. Здесь $\mathscr{D}_\delta$ — одно из следующих множеств:

1. Пусть сначала $1 \leqslant \delta < n_1$. Пусть $n_0 = [n/2]$ и

$$D_{\mathrm{reg}} = \bigcup_{i=1}^{n_0}(n-i+1, i).$$

При чётном n множество $\bigcup_{i=1}^{n_0-1}(n-i+1,i)$ также будем обозначать D_{reg}. Положим $D_{\mathrm{sreg}}^{\delta} = (D_{\mathrm{reg}} \backslash \{(n-\delta+1,\delta),(n-\delta,\delta+1)\}) \cup \{(n-\delta,\delta),(n-\delta+1,\delta+1)\}$. Тогда $\mathscr{D}_\delta$ — любое из подмножеств $D_{\mathrm{sreg}}^{\delta}$ или $D_{\mathrm{sreg}}^{\delta} \cup \{(n-\delta+1, n-\delta)\}$.

2. Пусть теперь n нечётно и $\delta = n_1 = n_0$. Здесь $\mathscr{D}_\delta$ — любое из подмножеств, лежащих (нестрого) между $D_{\mathrm{sreg}}^{\delta} \setminus \{(n_0+1,n_0),(n_0+2,n_0+0)\}$ и $D_{\mathrm{sreg}}^{\delta}$.

3. Если же n чётно и $\delta = n_1 = n_0 - 1$, то положим $D'_{\mathrm{reg}} = \bigcup_{i=1}^{n_1-1}(n-i+1,i)$,

$$\widehat{D}_1 = D'_{\mathrm{reg}} \cup \{(n_0+1, n_1)\}, \widehat{D}_2 = D'_{\mathrm{reg}} \cup \{(n_0+2, n_0)\}$$

и через $\mathscr{D}_\delta$ обозначим любое из подмножеств $\mathscr{D}_\delta^1$ или $\mathscr{D}_\delta^2$, где, в свою очередь, $\mathscr{D}_\delta^1$ обозначает любое из подмножеств, лежащих (нестрого) между $\widehat{D}_1$ и $\widehat{D}_1 \cup \{(n_0+2,n_0),(n_0+2,n_0+1)\}$, а $\mathscr{D}_\delta^2$ — любое из подмножеств, лежащих (нестрого) между $\widehat{D}_2$ и $\widehat{D}_2 \cup \{(n_0,n_1)\}$.

Обратно, коприсоединённая орбита любой канонической формы будет субрегулярной, так что мы имеем полную классификацию субрегулярных орбит.

Пусть теперь $\mathscr{D} = \mathscr{D}_\delta$ — одно из только что описанных подмножеств и $\xi\colon \mathscr{D}_\delta \to \mathbb{F}_q^*\colon (i,j) \mapsto \xi_{j,i}$ — произвольное отображение. Пусть, далее,

$\Omega(q) = \Omega_{\mathscr{D},\xi}(q)$ — субрегулярная орбита группы $U_n(q)$, содержащая каноническую форму f, для которой $\mathrm{Supp}(f) = \mathscr{D}$ и $f(e_{i,j}) = \xi_{j,i}$ для любого $(i,j) \in \mathscr{D}$. В **параграфе 6** мы предъявляем ряд подмножеств $\mathscr{D}(n)$, называемых *δ-субрегулярными* и для каждого такого подмножества D определяем некоторое целое неотрицательное число m_D:

$$\mathcal{T} = \{(i,j) \in \mathscr{D}(n) \mid i > n-j+1\},$$
$$\mathcal{T}^\delta = \mathcal{T} \setminus (\mathscr{R}_{n-\delta+1} \cup \mathscr{R}_{n-\delta} \cup \mathscr{C}_\delta \cup \mathscr{C}_{n-\delta}),$$
$$m_D = \begin{cases} |R(D) \cap \mathcal{T}| - 1, & \text{если } (\delta+1,\delta) \notin D, \\ |R(D) \cap \mathcal{T}^\delta| + n - 2\delta + 1, & \text{если } (\delta+1,\delta) \in D. \end{cases}$$

Здесь $\mathscr{R}_i = \{(i,l), 1 \leqslant l < i\}$ и $\mathscr{C}_j = \{(r,j), j < r \leqslant n\}$ для любых i,j. Кроме того, $R(D) = \mathscr{D}(n) \setminus \mathcal{S}(D)$, где $\mathcal{S}(i,j) = \{(i,s), 1 \leqslant s \leqslant j\} \cup \{(r,j), i \leqslant r \leqslant n\}$ и $\mathcal{S}(D) = \bigcup_{(i,j)\in D} \mathcal{S}(i,j)$.

Для произвольного отображения $\varphi\colon D \to \mathbb{F}_q^*\colon (i,j) \mapsto \varphi_{i,j}$ мы определяем элемент группы $U_n(q)$ вида $x_D(\varphi) = 1_n + e_D(\varphi)$, где

$$e_D(\varphi) = \sum_{(i,j)\in D} \varphi_{i,j} e_{i,j} \in \mathfrak{u}(q),$$

а 1_n — единичная матрица размера $n \times n$. Далее мы указываем, какими уравнениями задаётся класс сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi) \subset U_n(q)$ элемента $x_D(\varphi)$ как аффинное многообразие. Наконец, мы формулируем и доказываем основной результат третьей главы:

Теорема 3. *Пусть χ — неприводимый характер группы $U_n(q)$, соответствующий субрегулярной орбите $\Omega(q)$. Его значение на элементе $g \in U_n(q)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $g \in \mathcal{K}_D(\varphi)$ для некоторого δ-субрегулярного подмножества D и некоторого отображения φ, удовлетворяющего условию $\xi_{\delta,n-\delta}\varphi_{\delta+1,\delta} = \xi_{\delta+1,n-\delta+1}\varphi_{n-\delta+1,n-\delta}$. В этом случае*

$$\chi(g) = q^{m_D} \cdot \theta\left(f(e_D(\varphi))\right).$$

Доказательство вновь основано на индукции по n (то есть по рангу системы корней A_{n-1}, которой отвечает группа $U_n(q)$). С помощью метода Макки полупрямого разложения удаётся свести описание характера χ к изучению тех или иных характеров основой серии и субрегулярных характеров группы $U_{n-2}(q)$. Описание первых получено Андре, а описание вторых известно по предположению индукции.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ:

[1] Игнатьев М.В. Базисные подсистемы в системах корней B_n и D_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, т. **3**(**62**), 2008, с. 124–148.

[2] Игнатьев М.В. Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединённые орбиты унипотентных групп. // Мат. заметки, т. **86**, вып. 1, 2009, с. 65–80.

Другие публикации:

[3] Игнатьев М.В. Субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем. // Фунд. и прикл. матем., т. **13**, вып. 5, 2007, с. 103–125.

[4] Игнатьев М.В. Субрегулярные подмножества и характеры унитреугольной группы. // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В.Е. Воскресенского. Тезисы докладов — Самара: Изд-во "Универс групп", 2007, с. 25–26.

[5] Игнатьев М.В. Поляризации и размерности орбит, ассоциированных с группами Вейля типа B_n и D_n. // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2008, с. 106–108.

[6] Игнатьев М.В. Орбиты унипотентных групп, ассоциированные с ортогональными подмножествами в системах корней. // Летняя школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Тезисы докладов. — Самара: Изд-во "Универс групп", 2009, с. 20–21.

[7] Ignatev M.V. Subregular subsets and subregular characters of the unitriangular group. International Algebraic Conference Dedicated to the 100$^{\text{th}}$ anniversary of D.K. Faddeev. Abstracts. St. Petersburg, 2007, p. 119–120.