САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАРКУША ГРИГОРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

Топологические методы в K-теории, теории колец и теории локализаций

01.01.06 – математическая логика, алгебра
и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, профессор
Генералов Александр Иванович

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор Панин Иван Александрович (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

доктор физ.-мат. наук Панов Тарас Евгеньевич (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

доктор физ.-мат. наук, профессор Пунинский Геннадий Евгеньевич (Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова)

Ведущая организация:

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

Защита состоится "____"________________ 2010 г. в ______ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, СПб, Университетская наб., д.7/9.

Автореферат разослан "_____"__________________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М.Нежинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важной особенностью алгебраической K-теории, особенностью, приведшей к возникновению новых точек зрения в алгебре, является возможность использовать методы гомотопической топологии. Так, важнейшим открытием Квиллена [Q73] в 70-е годы в построении алгебраической K-теории было наблюдение, что высшие K-группы должны определяться как гомотопические группы некоторого топологического пространства.

В своей фундаментальной работе Вальдхаузен [W] строит алгебраическую K-теорию для категорий с корасслоениями и слабыми эквивалентностями, которая также называется K-теорией Вальдхаузена, а такие категории называются в литературе категориями Вальдхаузена. Важными примерами категорий Вальдхаузена служат точные и модельные категории в смысле Квиллена. K-теория Вальдхаузена приводит к мощным обобщениям теории Квиллена. Здесь уместно отметить выдающуюся работу Томасона [T] по высшей алгебраической K-теории схем, в которой K-теория Вальдхаузена работает в полную силу. K-теория Вальдхаузена также тесно связана с некоторыми фундаментальными вопросами гомотопической алгебры, предметом, созданном Квилленом в [Q67]. Он возник как язык, предназначенный для описания топологических свойств алгебраических объектов. Основным объектом гомотопической алгебры служат модельные категории.

Жилé–Вальдхаузен [T] доказали, что K-теория Квиллена $K(\mathcal{E})$ точной категории $\mathcal{E}$ эквивалентна K-теории Вальдхаузена $K(C^b(\mathcal{E}))$. Другая классическая «теорема аппроксимации» Вальдхаузена [W] утверждает, что если нам задан точный функтор $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ между категориями Вальдхаузена такой, что индуцированный функтор гомотопических категорий $\mathrm{Ho}(i) : \mathrm{Ho}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\,\mathcal{D}$ является эквивалентностью, то отображение K-теорий $K(i) : K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{D})$ — гомотопическая эквивалентность. Также, Дуггер–Шипли [DS] доказали, что если имеется триангулированная эквивалентность производных категорий $D(R)$ и $D(S)$ двух колец R и S, то эквивалентны их K-теории Квиллена $K(R)$ и $K(S)$.

Все вышеперечисленные результаты естественным образом приводят к постановке следующих вопросов.

1. Возможно ли построение K-теории для триангулированных категорий, которая бы удовлетворяла естественной теореме локализации и которая бы восстанавливала K-теорию Квиллена точной категории по K-теории ее производной категории ограниченных комплексов?

2. От какой вообще «высшей гомотопической информации» зависит K-теория Квиллена?

Ответы на эти вопросы значительно прояснят гомотопическую природу алгебраической K-теории.

Как показал в своей работе Шлихтинг [Sch], ответ на первый вопрос отрицательный. Следовательно, никакой «разумной» K-теории на уровне триангулированных категорий быть не может. Чтобы ответить на второй вопрос, напомним две мощные теории, которые в значительной мере обогащают «наивную» локализацию $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ Габриэля-Цисмана категории $\mathcal{C}$ относительно стрелок $\mathcal{W}$. Первая теория — это теория симплициальной локализации, предложенная Двайером–Каном в [DK1, DK2, DK3]. Теория симплициальной локализации Двайера–Кана является одной из разновидностей «высшей гомотопической теории».

В своей фундаментальной работе [DK3] Двайер–Кан показали, что симплициальная локализация $L\mathcal{C}$ полностью восстанавливает гомотопическую информацию об исходной модельной категории $\mathcal{C}$. По этой причине естественно ожидать, что если имеется K-теория на уровне симплициальных категорий, то такая гипотетическая K-теория восстанавливает классическую K-теорию в специальных случаях. В [TV] Тоэн и Ведзоси строят K-теорию симплициальных категорий и доказывают, что K-теория $K(\mathcal{C})$ категории Вальдхаузена $\mathcal{C}$ действительно полностью восстанавливается по K-теории $K(L\mathcal{C})$ ее симплициальной локализации $L\mathcal{C}$. Таким образом, ответ на второй вопрос в случае симплициальной локализации положительный.

Другой разновидностью «высшей гомотопической теории» является теория дериваторов или систем диаграммных категорий, развитая в 80-е независимо Гротендиком [G], Хеллером [H] и несколько позднее Франке [F]. Идея заключается в том, что наряду с модельной категорией $\mathcal{C}$ мы должны рассматривать также модельные категории диаграмм $\mathcal{C}^I$ над $\mathcal{C}$. Дериватор $\mathbb{D}\mathcal{C}$, ассоциированный с $\mathcal{C}$, вообще говоря, уже теряет часть гомотопической информации об исходной модельной категории $\mathcal{C}$ и является менее богатым, нежели симплициальная локализация $L\mathcal{C}$, объектом. Как и в случае с симплициальной локализацией, естественно возникает вопрос, а возможно ли определить K-теорию на уровне дериваторов и, если да, то возможно ли восстановить алгебраическую K-теорию Квиллена по гипотетической K-теории дериваторов?

В 2001 г. Малциниотис [M] определяет K-теорию $K(\mathbb{D})$ триангулированного дериватора $\mathbb{D}$ и формулирует три естественные для K-теории гипотезы:

1. верно ли, что K-теория Квиллена $K(\mathcal{E})$ точной категории $\mathcal{E}$ восстанавливается по K-теории дериватора $\mathbb{D}^b(\mathcal{E})$, ассоциированного с категорией Вальдхаузена ограниченных комплексов $C^b(\mathcal{E})$ над $\mathcal{E}$?

2. справедлива ли теорема локализации для $K(\mathbb{D})$?

3. справедлива ли теорема аддитивности для $K(\mathbb{D})$?

В первой главе диссертации мы в значительной мере отвечаем на гипотезы Малциниотиса. В ней мы также строим производную K-теорию $DK(\mathcal{E})$ точных категорий и доказываем для нее теоремы аддитивности, аппроксимации, а также теорему о резольвенте. Кроме того доказывается, что K-теория Квиллена для большого класса точных категорий, включающего абелевы категории, является ретрактом производной K-теории. Во всех случаях K_0- и K_1-группы совпадают с DK_0 и DK_1.

Вторая глава диссертации посвящена гомотопическим методам в теории колец.

Построение всевозможных теорий (ко)гомологий для колец и схем имела сильное развитие в 60-е/70-е годы — в период, когда происходило становление алгебраической K-теории. Были предложены различные конструкции и методы, разработанные в основном Бассом, Квилленом, Герстеном, Каруби–Вилламайором, Суоном, Вассерштейном и рядом других математиков, все из которых имели приложения в алгебраической K-теории. Эти методы стали мощным инструментом изучения алгебраических объектов, позволившие решить многие классические алгебраические и геометрические проблемы.

Однако, вплоть до начала 90-х годов построение теорий когомологий, например, для категории алгебраических многообразий носило спорадический характер. Причиной подобных трудностей являлось, в частности, отсутствие в инструментарии алгебраической геометрии машинерии, позволяющей создавать теории когомологий при помощи унифицированной процедуры.

Ситуация изменилась с появлением $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии, развитой в 90-е годы Воеводским, Суслиным, Морелем и рядом других математиков [FSV, MV, V]. Как всякий удачный математический язык, она быстро проявила тенденцию к саморазвитию и все последующие годы $\mathbb{A}^1$-гомотопическая теория была и продолжает быть «нервом» исследований в соответствующей области алгебраической геометрии. Она также доставляет необходимую машинерию, позволяющая создавать теории когомологий для алгебраический многообразий.

Однако в некоммутативном случае, скажем для колец, никаких аналогов $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии построено не было. Естественным образом также — по аналогии с алгебраическими многообразиями — возникает проблема построения машинерии, которая бы позволила единообразно строить теории гомологий для колец.

В первой части второй главы диссертации мы строим аналог $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии для колец. Также строится машинерия, которая позволяет создавать теории гомологий при помощи унифицированной процедуры. Другая часть второй главы посвящена построению различных структур триангулированных категорий на категории колец. Структура триангуляции — это средство, благодаря которому можно строить бивариантные теории гомологий.

Одно из приложений наших методов относится к проблеме построения «алгебраической K-теории Каспарова». Основные идеи и конструкции здесь были развиты Кунцем для локально выпуклых алгебр [Cu, CuT]. Чуть позднее Кортинас и Том [CT] обобщили конструкции Кунца на все алгебры. Они строят бивариантную теорию гомологий $kk_*(A, B)$ для категории алгебр. Эта бивариантная K-теория определяется посредством триангулированной категории kk, чьи объекты суть алгебры, и $kk_n(A, B) = kk(A, \Omega^n B)$, $n \in \mathbb{Z}$. В качестве приложения методов, развитых во второй главе, мы, в частности, приводим другое описание триангулированной категории kk.

Завершает диссертацию третья глава, которая посвящена проблеме классификации локализаций в категориях модулей и квазикогерентных пучков над схемой, а также проблеме восстановления схем.

В своей знаменитой работе по абелевым категориям Габриэль [G62] доказал, что для всякой нетеровой схемы X отображения

(1)
$$\operatorname{coh} X \supseteq \mathcal{D} \mapsto \bigcup_{x \in \mathcal{D}} \mathsf{supp}_X(x) \quad \text{и} \quad X \supseteq U \mapsto \{x \in \operatorname{coh} X \mid \mathsf{supp}_X(x) \subseteq U\}$$

задают биекцию между:

- ⋄ множеством всех тензорных подкатегорий Серра в $\operatorname{coh} X$ и
- ⋄ множеством всех подмножеств $Y \subseteq X$ вида $Y = \bigcup_{i \in \Omega} Y_i$, где $X \setminus Y_i$ квазикомпактно и открыто для всех $i \in \Omega$.

Томасон [T97] классифицирует тензорные толстые подкатегории совершенных комплексов $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$ над квазикомпактной, квазиотделимой схемой аналогично (1). Хопкинс [H87] и Нееман [N] доказали этот результат для $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$ в случае, когда X — аффинная, нетерова схема.

Стоит отметить, что методы, которые использует Габриэль в своей теореме, не работают в случае, когда схема X не является нетеровой. Поэтому для более общих схем требуются новые методы. Так, Хови [Hov], в значительной мере используя теорему классификации Томасона для совершенных комплексов, обобщает теорему Габриэля на случай, когда X — аффинная схема над когерентным регулярным кольцом. Хови ставит вопрос о наличии методов, которые бы работали для всех когерентных коммутативных колец, и которые бы не зависили от теоремы Томасона.

Глава 3 диссертации в значительной мере посвящена изложению таких методов. Замечательно то, что они уходят корнями в теорию моделей модулей и свойства спектра Циглера [Z]. Тот же язык и подход (а именно свойства спектра Циглера) используются в работах автора [1, 2, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Основной результат главы 3 («теорема классификации») формулируется следующим образом. Пусть $\mathrm{Qcoh}(X)$ — категория квазикогерентных пучков над квазикомпактной, квазиотделимой схемой. Тогда отображения

$$V \mapsto \mathcal{S} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}(X) \mid \mathsf{supp}_X(\mathcal{F}) \subseteq V\} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} \mapsto V = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{S}} \mathsf{supp}_X(\mathcal{F})$$

индуцируют биекцию между:

(1) множеством всех подмножеств вида $V = \bigcup_{i\in\Omega} V_i$, где дополнение $X \setminus V_i$ квазикомпактно и открыто для всех $i \in \Omega$,
(2) множеством тензорных локализующих подкатегорий конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$.

В качестве приложения теоремы классификации мы показываем, что имеется взаимно однозначное соответствие между тензорными локализующими подкатегориями конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$ и тензорными толстыми подкатегориями в $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$. Другим приложением теоремы классификации является «теорема восстановления». Общим подходом в некоммутативной геометрии является изучение абелевых и триангулированных категорий, которые могут рассматриваться в качестве замены схемы. Эта идея восходит к работам Гротендика и Манина. Розенберг [R] доказал, что квазикомпактная схема X восстановливается по $\mathrm{Qcoh}(X)$. Однако подход, который использует Розенберг, является довольно абстрактным.

В настоящей диссертации мы восстанавливаем квазикомпактную, квазиотделимую схему X по категории $\mathrm{Qcoh}(X)$. Наш подход полностью отличен от подхода Розенберга [R]. Мы показываем, что теорема восстановления в действительности является довольно естественным следствием теоремы классификации. В этом смысле наши методы в значительной мере менее абстрактны, нежели методы Розенберга.

Вышеуказанное показывает актуальность темы диссертации.

Цель работы. Развитие производной K-теории точных категорий и K-теории дериваторов Гротендика. Построение $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии для колец. Исследование теорий гомологий и построение триангулированных структур на категории колец. Исследование локализаций в абелевых и триангулированных категориях.

Методы исследования. В диссертации используются методы гомотопической топологии, $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии, алгебраической K-теории, гомологической алгебры, алгебраической геометрии, теории колец и теории категорий.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем (в порядке их изложения в тексте).

- ◇ В значительной мере решаются гипотезы Малциниотиса для K-теории дериваторов Гротендика.
- ◇ Строится производная K-теория точных категорий $DK(\mathcal{E})$. Доказываются теоремы аддитивности, аппроксимации, а также теорема о резольвенте для $DK(\mathcal{E})$. Кроме того показано, что K-теория Квиллена для большого класса точных категорий, включающего абелевы категории, является ретрактом производной K-теории.
- ◇ Строится аналог $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии для колец. Развивается техника, позволяющая создавать теории гомологий колец при помощи унифицированной процедуры.
- ◇ Построение различных структур триангулированных категорий на категории колец. Даются приложения для алгебраической K-теории Каспарова.
- ◇ Получена классификация тензорных локализующих подкатегорий конечного типа в категории квазикогерентных пучков $\mathrm{Qcoh}(X)$ над квазикомпактной, квазиотделимой схемой X.
- ◇ Доказывается существование взаимно однозначного соответствия между тензорными локализующими подкатегориями конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$ над квазикомпактной, квазиотделимой схемой X и тензорными толстыми подкатегориями категории совершенных комплексов $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в исследованиях по топологическим инвариантам колец и категорий, алгебраической K-теории, теории категорий, алгебраической геометрии. Результаты диссертации могут быть использованы в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на алгебраическом семинаре им. Д.К. Фаддеева в ПОМИ РАН, а также были представлены в докладах на многочисленных международных и российских конференциях, среди которых выделим следующие.

(1) Международная конференция «Some Trends in Algebra» (Прага, Чехия, 2001 г.).

(2) Международная конференция «K-Theory and Linear Algebraic Groups» (Дуйсбург, Германия, 2001 г.).
(3) Международная конференция, посвященная памяти З.И.Боревича (Санкт-Петербург, Россия, 2002 г.).
(4) Международная конференция «Algebras, Modules and Rings» (Лиссабон, Португалия, 2003 г.).
(5) Международная алгебраическая конференция (Москва, Россия, 2004 г.).
(6) Международная конференция по геометрии и топологии (Москва, Россия, 2005 г.).
(7) Международная конференция по триангулированным категориям (Лидс, Великобритания, 2006 г.).
(8) Международная конференция «K-theory and Noncommutative Geometry» (Валладолид, Испания, 2006 г.).
(9) British Mathematical Colloquium, (Суонси, Великобритания, 2007 г.).
(10) Международная конференция по теории моделей (Барселона, Испания, 2008 г.).

Результаты диссертации неоднократно докладывались на алгебраических и топологических семинарах в Великобритании (университеты Абердина, Лестера, Лидса, Манчестера, Ноттингема, Ньюкасла, Оксфорда, Суонси, Уорика), Германии (университеты Дуйсбурга, Йены, Мюнстера, Падерборна, Штутгарта), Франции (университет Париж XIII), Италии (международный центр по теоретической физике, Триест).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано пятнадцать статей, из них четырнадцать — в российский журналах, рекомендованных ВАК, и зарубежных журналах, входящих в систему цитирования Web of Science. В статьях [6, 10, 15] соавтору принадлежит только формулировка задачи. В статье [11] соавтору принадлежат результаты раздела 3 (описание языка первого порядка для компактно порожденных триангулированных категорий); в статьях [12, 13, 14] соавтору принадлежат результаты, описывающие соотношение топологий Циглера и Зариского на инъективном спектре. Остальные результаты статей [11, 12, 13, 14] принадлежат диссертанту.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3-х глав, разбитых на 27 разделов, некоторые из которых, в свою очередь, разбиты на подразделы, списка цитированной литературы и предметного указателя, что составляет 190 страниц. Библиография включает 93 источника.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается общая характеристика работы, краткая история задач и их современное состояние, обосновывается актуальность темы исследования и кратко описывается содержание работы.

Глава 1. Системы диаграммных категорий, дериваторы Гротендика и K-теория

Первая глава диссертации посвящена K-теории систем диаграммных категорий и дериваторов Гротендика.

В разделах 1.1–1.2 приводятся необходимые сведения о системах диаграммных категорий в смысле Франке и дериваторах Гротендика. Следует отметить, что мы не требуем от этих объектов быть триангулированными. Наиболее важный пример на практике системы диаграммных категорий или деривaтора доставляет гиперфунктор

$$I \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C}^I), \quad \mathcal{C} \text{ — модельная категория},$$

который сопоставляет каждой диаграмме I гомотопическую категорию $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^I)$ модельной категории диаграмм $\mathcal{C}^I$. На практике мы почти всегда работаем с диаграммами, которые являются либо частично упорядоченными множествами, либо конечными категориями без циклов.

Пусть $\mathbb{B}$ — либо левая система диаграммных категорий, либо левый выделенный дериватор. В разделе 1.3 мы определяем $S.$-конструкцию для $\mathbb{B}$, которая является аналогом $S.$-конструкции Вальдхаузена [W] для категорий с корасслоениями и слабыми эквивалентностями. Мы строим симплициальную категорию

$$n \mapsto S_n\mathbb{B},$$

а затем вводим бисимплициальное множество $i.S.\mathbb{B}$

$$\Delta^m \times \Delta^n \longmapsto i_m S_n \mathbb{B},$$

у которого (m, n)-симплексы суть струны изоморфизмов в $S_n\mathbb{B}$

$$B_0 \xrightarrow{\sim} B_1 \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} B_m.$$

Мы определяем пространство K-теории для $\mathbb{B}$ следующим образом.

Определение. *Алгебраическая K-теория левой системы диаграммных категорий или левого выделенного дериватора $\mathbb{B}$ — это пространство петель*

$$K(\mathbb{B}) = \Omega|i.S.\mathbb{B}|$$

геометрической реализации $|i.S.\mathbb{B}|$. K-группы для $\mathbb{B}$ суть гомотопические группы $K(\mathbb{B})$:

$$K_*(\mathbb{B}) = \pi_*(\Omega|i.S.\mathbb{B}|) = \pi_{*+1}(|i.S.\mathbb{B}|).$$

В разделе 1.3 также изучается группа $K_0(\mathbb{B})$.

В разделе 1.4 приводятся некоторые необходимые для дальнейшей работы сведения из теории симплициальных множеств.

В разделе 1.5 мы используем теорию Г-пространств в смысле Сегала для того, чтобы доказать, что $K(\mathbb{B})$ является бесконечнократным пространством петель, а также для построения некоторых гомотопически расслоенных последовательностей.

В разделе 1.6 обсуждается теорема аддитивности. В нём приводятся всевозможные критерии для теоремы аддитивности, а также доказывается следующий результат.

Теорема (1.6.4)**.** *Теорема аддитивности верна для пространства* $\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbb{B}| = \varinjlim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbb{B}|$.

В разделе 1.7 обсуждается соотношение K-теории Квиллена $K(\mathcal{E})$ точной категории $\mathcal{E}$ и K-теории ее дериватора $K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$, где $\mathbb{D}^b(\mathcal{E})$ — это дериватор

$$I \mapsto D^b(\mathcal{E}^I),$$

который переводит диаграмму I в производную категорию ограниченных комплексов точной категории диаграмм $\mathcal{E}^I$. Следующее утверждение показывает, что K-теория $K(\mathcal{E})$ для широкого класса точных категорий, включающего абелевы категории, является ретрактом $K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$.

Теорема (1.7.1)**.** *Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутая относительно расширений, полная точная подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям теоремы о резольвенте. То есть,*

(1) *если $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ точна в $\mathcal{A}$ и $M, M'' \in \mathcal{E}$, то $M' \in \mathcal{E}$ и*

(2) *для всякого объекта $M \in \mathcal{A}$ имеется конечная резольвента $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, где $P_i \in \mathcal{E}$.*

Тогда естественное отображение

$$K(\mathcal{E}) \to K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$$

— гомотопически расщепляющееся включение, т.е. существует отображение $p : K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E})) \to K(\mathcal{E})$ такое, что $p \circ K(\rho)$ гомотопно тождественному. В частности, каждая K-группа $K_n(\mathcal{E})$ — прямое слагаемое $K_n(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$.

Таким образом, теорема 1.7.1 показывает, что K-теория дериваторов имеет весьма непростую природу.

Раздел 1.8 содержит основные сведения о категории ограниченных комплексов $C^b(\mathcal{E})$. Там также доказываются несколько утверждений, которые играют существенную роль в доказательстве теоремы аддитивности для K-теории $K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$ дериватора $\mathbb{D}^b(\mathcal{E})$.

Раздел 1.9 почти целиком посвящен доказательству теоремы аддитивности для $K(\mathbb{D}^b(\mathcal{E}))$. Оно использует некоторые приемы работы с морфизмами в производных категориях, которые представляют сами по себе независимый интерес. Здесь стоит отдельно отметить те места в доказательстве, в которых решаются проблемы независимости выбора представителей классов эквивалентности морфизмов. При построении симплициальных гомотопий, связанных с такими классами эквивалентности, независимость выбора представителей — почти всегда самая трудная задача, которая редко решается положительно.

Раздел 1.10 посвящен доказательству теоремы аддитивности для дериваторов, которые ассоциируются с хорошими комплициальными бивальдхаузеновыми категориями. Под *хорошей комплициальной бивальдхаузеновой категорией* $\mathcal{C}$, полученной из категории ограниченных комплексов $C^b(\mathcal{B})$ абелевой категории $\mathcal{B}$, мы будем понимать комплициальную бивальдхаузенову категорию в смысле Томасона [T], которая замкнута относительно канонических, гомотопически универсальных и коуниверсальных квадратов. Например, пусть $\mathcal{A}$ — точная категория и $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — вложение Габриэля–Квиллена [T, Appendix A]. Тогда $C^b(\mathcal{A})$ — хорошая комплициальная бивальдхаузенова категория, образованная из $C^b(\mathcal{B})$.

Пусть $\mathcal{C}$ — хорошая комплициальная бивальдхаузенова категория. Одним из наиболее важных для приложений дериваторов является гиперфунктор

$$\mathbb{D}\mathcal{C} : I \in \mathcal{D}irf \longmapsto w^{-1}\mathcal{C}^I,$$

где $w^{-1}\mathcal{C}^I$ — производная категория хорошей комплициальной бивальдхаузеновой категории диаграмм $\mathcal{C}^I$. Если $\mathcal{C} = C^b(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — точная категория, то соответствующий дериватор — это, в точности, $\mathbb{D}^b(\mathcal{A})$.

Определение. *Левый выделенный дериватор $\mathbb{D}$ представим хорошей комплициальной бивальдхаузеновой категорией $\mathcal{C}$, если найдется точная справа эквивалентность $F : \mathbb{D}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{D}$.*

Основной результат раздела 1.10 формулируется следующим образом.

Теорема (1.10.3)**.** *Если $\mathbb{D}$ — дериватор, который представлен хорошей комплициальной бивальдхаузеновой категорией, то отображение*

$$i.S.\mathbb{E} \xrightarrow{(s_*, q_*)} i.S.\mathbb{D} \times i.S.\mathbb{D}$$

является гомотопической эквивалентностью.

Следствие (1.10.3.1)**.** *Пусть $\mathbb{D}$ — дериватор, представленный хорошей бивальдхаузеновой категорией. Тогда*

$$n \longmapsto i.S.^n\mathbb{D}$$

— Ω-спектр за исключением первой компоненты. В частности, K-теория $\mathbb{D}$ может быть эквивалентным образом определена как пространство

$$\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbb{D}| = \varinjlim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbb{D}|.$$

В разделе 1.11 мы определяем производную K-теорию $DK(\mathcal{A})$ точной категории $\mathcal{A}$. Хотя она гомотопически эквивалентна K-теории ее дериватора $\mathbb{D}^b(\mathcal{A})$, тем не менее с пространством $DK(\mathcal{A})$ более удобно работать по многим причинам, нежели с $K(\mathbb{D}^b(\mathcal{A}))$.

Вальдхаузен [W] строит симплициальную точную категорию $S.\mathcal{A} = \{S_n\mathcal{A}\}_{n\geqslant 0}$, у которой операторы граней и вырождений суть точные функторы.

Обозначим через $i.\mathbb{S}.\mathcal{A}$ бисимплициальное множество

$$\Delta^m \times \Delta^n \longmapsto i_m\mathbb{S}_n\mathcal{A} = i_m D^b(S_n\mathcal{A}),$$

где $D^b(S_n\mathcal{A})$ — производная категория ограниченных комплексов точной категории $S_n\mathcal{A}$. (m,n)-симплексы суть струны изоморфизмов в $\mathbb{S}_n\mathcal{A} = D^b(S_n\mathcal{A})$

$$A_0 \xrightarrow{\sim} A_1 \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} A_m.$$

Определение. *Алгебраическая DK-теория точной категории $\mathcal{A}$ определяется как пространство*

$$DK(\mathcal{A}) = \Omega|i.\mathbb{S}.\mathcal{A}|.$$

DK-группы $\mathcal{A}$ — это гомотопические группы $DK(\mathcal{A})$

$$DK_*(\mathcal{A}) = \pi_*(\Omega|i.\mathbb{S}.\mathcal{A}|) = \pi_{*+1}(|i.\mathbb{S}.\mathcal{A}|).$$

Пусть $(ExCats)$ — категория точных категорий и точных функторов. Получаем функтор

$$DK : (ExCats) \to (Spaces).$$

Мы доказываем некоторые основные результаты о DK-теории. Первый результат — это теорема аддитивности.

Теорема (1.11.1)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — точная категория и $\mathcal{E}$ — ее категория расширений. Тогда отображение*

$$DK(s,q) : DK(\mathcal{E}) \to DK(\mathcal{A}) \times DK(\mathcal{A})$$

— гомотопическая эквивалентность. Если $F' \to F \to F''$ — точная последовательность точных функторов $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, то имеется гомотопия отображений

$$DK(F) \simeq DK(F') \vee DK(F'') : DK(\mathcal{A}) \to DK(\mathcal{A}').$$

DK-теория точной категории $\mathcal{A}$ может быть определена эквивалентным образом как пространство

$$\Omega^\infty|i.\mathbb{S}.^\infty\mathcal{A}| = \varinjlim_n \Omega^n|i.\mathbb{S}.^n\mathcal{A}|.$$

Мы также можем рассматривать DK-теорию в терминах Ω-спектра

$$\Omega|i.\mathbb{S}.\mathcal{A}|, \Omega|i.\mathbb{S}.\mathbb{S}.\mathcal{A}|, \ldots, \Omega|i.\mathbb{S}.^n\mathcal{A}|, \ldots$$

Следующий результат — это теорема аппроксимации.

Теорема (1.11.3)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ — точные категории, и пусть $w\mathcal{C}$ и $w\mathcal{C}'$ — соответствующие категории Вальдхаузена для квазиизоморфизмов в $\mathcal{C} = C^b(\mathcal{A})$ и $\mathcal{C}' = C^b(\mathcal{A}')$, соответственно. Допустим также, что $F : w\mathcal{C} \to w\mathcal{C}'$ — точный функтор категорий Вальдхаузена такой, что он индуцирует эквивалентность производных категорий $D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A}')$. Тогда $DK(\mathcal{A})$ гомотопически эквивалентна $DK(\mathcal{A}')$. Если F индуцирован точным функтором $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, то эта гомотопическая эквивалентность задается отображением $DK(f) : DK(\mathcal{A}) \to DK(\mathcal{A}')$.*

Далее мы доказываем теорему о резольвенте для производной K-теории.

Теорема (1.11.6)**.** *Пусть $\mathcal{P}$ — полная точная подкатегория $\mathcal{M}$ замкнутая относительно расширений. Предположим далее, что*

(1) *если $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ точна в $\mathcal{M}$ и $M, M'' \in \mathcal{P}$, то $M' \in \mathcal{P}$;*

(2) *для каждого объекта $M \in \mathcal{M}$ найдется конечная резольвента $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, где $P_i \in \mathcal{P}$.*

Тогда $DK(\mathcal{P}) \to DK(\mathcal{M})$ — гомотопическая эквивалентность. В частности, $DK_i(\mathcal{P}) \simeq DK_i(\mathcal{M})$ для всех i.

Мы завершаем первую главу построением спариваний K-теории Квиллена и производной K-теории.

Глава 2. Гомотопическая теория ассоциативных колец

Глава 2 посвящена гомотопическим методам в теории колец.

В разделе 2.1 приводятся необходимые предварительные сведения. Мы работаем в категории $\mathcal{R}ing$ ассоциативных колец без единицы и кольцевых гомоморфизмов. Следуя терминологии Герстена [Ger], категорию колец $\Re$ называем *допустимой*, если она полная подкатегория $\mathcal{R}ing$ и

(1) если $R \in \Re$, I — (двусторонний) идеал R, то $I, R/I \in \Re$;

(2) если $R \in \Re$, то также и кольцо полиномов $R[x]$ принадлежит $\Re$;

(3) если нам дан универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\rho} & A \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

в $\mathcal{R}ing$, где A, B, C принадлежат $\Re$, то $D \in \Re$.

В этом разделе главным образом обсуждаются свойства полиномиальной гомотопии для гомоморфизмов.

Разделы 2.2–2.3 посвящены построению аналога нестабильной $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии для колец. Перейдем к их описанию.

Пусть $U\Re$ — категория функторов из скелетно малой, допустимой категории колец $\Re$ в категорию симплициальных множеств. На категории $U\Re$ имеется модельная структура, у которой морфизм симплициальных функторов $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — слабая эквивалентность (соответственно корасслоение), если морфизм $\mathcal{X}(A) \to \mathcal{Y}(A)$ — слабая эквивалентность (соответственно корасслоение) симплициальных множеств для всех $A \in \Re$. Имеется контравариантное, вполне унивалентное вложение

$$r : \Re \to U\Re, \quad A \in \Re \mapsto rA = \mathrm{Hom}_{\Re}(A, -).$$

Модельная категория $U\Re_\bullet$ пунктированных симплициальных функторов определяется аналогично.

Пусть $I = \{i = i_A : r(A[t]) \to r(A) \mid A \in \Re\}$, где каждый i_A индуцируется естественным гомоморфизмом $i : A \to A[t]$. После применения локализации Бусфелда к семейству I мы получим модельную категорию $U\Re/I$, которую будем обозначать через $U\Re_I$, а ее гомотопическая категория будет означаться через $\mathrm{Ho}_I(\Re)$. Говорим, что гомоморфизм $A \to B$ — I-слабая эквивалентность, если $rB \to rA$ — изоморфизм в $\mathrm{Ho}_I(\Re)$.

Определение. *Пусть $\Re$ — допустимая категория колец, и пусть $\mathfrak{F}$ — семейство сюръективных гомоморфизмов из $\Re$. Гомоморфизмы из $\mathfrak{F}$ назовем расслоениями, если они отвечают следующим условиям:*

Ax 1) *для каждого R в $\Re$, $R \to 0$ принадлежит $\mathfrak{F}$;*

Ax 2) *$\mathfrak{F}$ замкнуто относительно композиций, и всякий изоморфизм является расслоением;*

Ax 3) *если квадрат*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\rho} & A \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

является универсальным в $\Re$ и $g \in \mathfrak{F}$, то $\rho \in \mathfrak{F}$. Назовем такие квадраты выделенными. Мы требуем также, чтобы *«вырожденный квадрат», у которого только одна вершина 0 в левом верхнем углу, был выделенным;*

Ax 4) *всякий u из $\Re$ может быть представлен как $u = pi$, где p — расслоение и i — I-слабая эквивалентность.*

Короткую точную последовательность в $\Re$

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C,$$

где $f \in \mathfrak{F}$, будем называть $\mathfrak{F}$-расслоенной последовательностью.

$\mathfrak{F}$ называется насыщенным, если гомоморфизм $\partial_x^1 : xA[x] \to A$ — расслоение для всех $A \in \Re$.

Пусть J — класс стрелок, который задается естественными морфизмами $rA \coprod_{rC} rB \to rD$ для каждого выделенного квадрата. После применения локализации Бусфелда к семейству J мы получим модельную категорию $U\Re/J$, которая обозначается через $U\Re_J$. Наконец, после применения локализации Бусфелда к семейству $I \smile J$ мы получим модельную категорию $U\Re/(I \smile J)$, которая обозначается через $U\Re_{I,J}$. Модельная категория $U\Re_{I,J}$ является аналогом мотивной модельной структуры для мотивных пространств в смысле Мореля–Воеводского [MV]. Модельная категория $U\Re_{I,J,\bullet} = U\Re_\bullet/(I \smile J)$ для пунктированных симплициальных функторов определяется аналогично.

Для каждого симплициального функтора $\mathcal{X}$ из $\Re$ в (пунктированные) симплициальные множества мы строим явным образом тривиальное корасслоение в $U\Re_{I,J}$

$$\mathcal{X} \to Ex_{I,J}(\mathcal{X}),$$

функториальное по $\mathcal{X}$, где симплициальный функтор $Ex_{I,J}(\mathcal{X})$ обладает тем свойством, что он переводит стрелки из $I \smile J$ в слабые эквивалентности (пунктированных) симплициальных множеств.

Определение. *Пусть $\Re$ — допустимая категория колец и пусть $\mathfrak{F}$ — семейство расслоений. Теория гомологий H_* на $\Re$ относительно $\mathfrak{F}$ состоит из следующих данных:*

(1) *имеется семейство $\{H_n, n \geqslant 0\}$ функторов $H_n : \Re \to Sets_\bullet$, где $Sets_\bullet$ — категория пунктированных множеств и $H_n(A)$ — группа для $n \geqslant 1$;*

(2) *для каждой $\mathfrak{F}$-расслоенной последовательности*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

где $g \in \mathfrak{F}$, морфизмы

$$H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial_{n+1}(g)} H_n(A), \quad n \geqslant 0,$$

удовлетворяют аксиомам:

Ax 1) $H_n(u) = H_n(v)$ *для всяких полиномиально гомотопных морфизмов* u, v *и всякого* $n \geqslant 0$,

Ax 2) *морфизм* $\partial_{n+1}(g)$ *из (2) является естественным в том смысле, что если нам дана коммутативная диаграмма в* $\Re$, *у которой строки суть* $\mathfrak{F}$*-расслоенные последовательности*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C', \end{array}$$

где $g, g' \in \mathfrak{F}$, *то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(C) & \xrightarrow{\partial_{n+1}(g)} & H_n(A) \\ {\scriptstyle H_{n+1}(c)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(a)} \\ H_{n+1}(C') & \xrightarrow{\partial_{n+1}(g')} & H_n(A') \end{array}$$

является коммутативной для всякого $n \geqslant 0$;

Ax 3) *если* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *—* $\mathfrak{F}$*-расслоенная последовательность, где* $g \in \mathfrak{F}$, *то имеется длинная точная последовательность выделенных множеств*

$$\cdots \to H_{n+1}(A) \xrightarrow{H_{n+1}(f)} H_{n+1}(B) \xrightarrow{H_{n+1}(g)} H_{n+1}(C)$$
$$\xrightarrow{\partial_{n+1}(g)} H_n(A) \to \cdots \to H_0(B) \to H_0(C)$$

в том смысле, что в каждой компоненте ядро, определенное как прообраз выделенной точки, равно образу.

Следующая теорема говорит о том, как построить каноническим образом теорию гомологий по произвольному симплициальному функтору.

Теорема (2.3.16). *С каждым выделенным симплициальным функтором* $\mathcal{X}$ *на* $\Re$ *и каждым семейством расслоений* $\mathfrak{F}$ *естестественным образом ассоциируется теория гомологий. Она определена как*

$$H_n(A) := \pi_n(Ex_{I,J}(\mathcal{X})(A)), \quad n \geqslant 0,$$

для всякого $A \in \Re$. *Кроме того, если* $\mathfrak{F}$ *является насыщенным, то* $H_n(A) = H_0(\Omega^n A)$, *где* $\Omega A = (x^2 - x)A[x]$. *Мы также говорим, что эта теория гомологий* представлена функтором $\mathcal{X}$.

В разделе 2.4 мы вводим и изучаем левую производную категорию $D^-(\Re, \mathfrak{F})$, ассоциированную с произвольным семейством расслоений $\mathfrak{F}$ на $\Re$. Она получается из гомотопической категории $\Re$ путем обращения квазиизоморфизмов, определенных ниже. Для этого мы сперва должны определить структуру на $\mathfrak{R}$ относительно расслоений и квазиизоморфизмов, которая несколько слабее структуры модельной категории. Следуя Брауну [B], эта структура называется *категорией фибрантных объектов*. Она имеет много общих свойств с модельными категориями. Если $\mathfrak{F}$ насыщенно, что всегда выполнено на практике, то из теоремы (2.4.7), которую мы сформулируем ниже, следует, что $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$ является триангулированной слева. Категория левых треугольников отвечает свойствам, которые аналогичны аксиомам для триангулированной категории. Структура левой триангуляции как таковая является средством для построения различных теорий гомологий на кольцах.

Определение. (1) *Пусть $\mathfrak{R}$ — допустимая категория колец, и пусть $\mathfrak{F}$ — семейство расслоений. Гомоморфизм $A \to B$ в $\mathfrak{R}$ называется $\mathfrak{F}$-квазиизоморфизмом или просто квазиизоморфизмом, если $rB \to rA$ — слабая эквивалентность в $U\mathfrak{R}_{I,J}$.*

(2) *Левая производная категория $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$ категории $\mathfrak{R}$ относительно $\mathfrak{F}$ — это категория, полученная из $\mathfrak{R}$ путем обращения квазиизоморфизмов.*

Зафиксируем насыщенное семейство расслоений $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{R}$. Эндофунктор $\Omega : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, $A \longmapsto \Omega A = (x^2 - x)A[x]$ сохраняет квазиизоморфизмы, откуда Ω может быть рассмотрен как эндофунктор $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$.

Пусть $g : A \to B$ — расслоение со слоем F. Рассмотрим коммутативную диаграмму, в которой правый нижний квадрат являетя универсальным,

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega B \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "j"'] & \Omega B \arrow[d, tail] \\
F \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & P(g) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g_1"] & xB[x] \arrow[d, "\partial_x^1"] \\
F \arrow[r, tail, "\iota"] & A \arrow[r, two heads, "g"] & B.
\end{tikzcd}$$

Тогда $xB[x]$ изоморфно нулю в $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$, и i — квазиизоморфизм. Значит имеется последовательность в $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$

$$\Omega B \xrightarrow{i^{-1} \circ j} F \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{g} B.$$

Мы будем называть такие последовательности *стандартными левыми треугольниками*. Всякая диаграмма в $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$, изоморфная такой последовательности, называется *левым треугольником*.

Для всякого кольца A имеется автоморфизм $\sigma = \sigma_A : \Omega A \to \Omega A$, который переводит полином $a(x)$ в $a(1-x)$. Если α — морфизм в $D^{-}(\mathfrak{R}, \mathfrak{F})$, то через $-\Omega\alpha$ обозначим морфизм $\Omega\alpha \circ \sigma = \sigma \circ \Omega\alpha$.

Основной результат раздела 2.4 формулируется следующим образом.

Теорема (2.4.7). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенное семейство расслоений в $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ категорию левых треугольников с обычным семейством морфизмов из $\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ в $\Omega C' \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{g'} B' \xrightarrow{h'} C'$. Тогда $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ — левая триангуляция $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, то есть она замкнута относительно изоморфизмов и отвечает следующим аксиомам:*

(LT1) *для всякого кольца $A \in \mathfrak{R}$ левый треугольник $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{0} 0$ принадлежит $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ и для всякого морфизма $h : B \to C$ имеется левый треугольник в $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ вида $\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$;*

(LT2) *для всякого левого треугольника $\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ в $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ последовательность $\Omega B \xrightarrow{-\Omega h} \Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ также принадлежит $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$;*

(LT3) *для всяких двух треугольников $\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$, $\Omega C' \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{g'} B' \xrightarrow{h'} C'$ в $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ и всяких двух морфизмов $\beta : B \to B'$, $\gamma : C \to C'$ из $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, где $\gamma h = h'\beta$, существует морфизм $\alpha : A \to A'$ в $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ такой, что тройка (α,β,γ) задает морфизм из первого треугольника во второй;*

(LT4) *любые два морфизма $B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{k} D$ в $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ могут быть вложены в коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega E \arrow[d, "f\circ\Omega\ell"] & & \\
\Omega C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Omega k"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_B"'] & C \arrow[d, "k"] \\
\Omega D \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_{\Omega D}"] & F \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "kh"] \arrow[d, "h"'] & D \arrow[d, "1_D"] \\
\Omega D \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\ell"] & C \arrow[r, "k"] & D,
\end{tikzcd}$$

в которой строки и вторая колонка слева — левые треугольники в $\mathfrak{Ltr}(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$.

Аксиома (LT4) — это версия аксиомы октаэдра Вердье для левых треугольников в $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$.

Раздел 2.5 описывает процесс стабилизации функтора петель Ω, результатом которого служит построение триангулированной категории $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$. Она получается из левой триангулированной структуры на

$D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$. Мы используем также стабилизацию для определения $\mathbb{Z}$-градуированной бивариантной теории гомологий $k_*(A,B)$ на $\mathfrak{R}$. То есть она является контравариантной по первому аргументу и ковариантной по второму аргументу, а также $\mathfrak{F}$-расслоенные последовательности порождают длинные точные последовательности абелевых групп.

Объекты $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ суть пары (A,m), где $A\in D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ и $m\in\mathbb{Z}$. Если $m,n\in\mathbb{Z}$, то мы рассматриваем направленное множество $I_{m,n}=\{k\in\mathbb{Z}\mid m,n\leqslant k\}$. Множество морфизмов из (A,m) в $(B,n)\in D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ определяется так:

$$D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})[(A,m),(B,n)]:=\varinjlim_{k\in I_{m,n}} D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})(\Omega^{k-m}(A),\Omega^{k-n}(B)).$$

Морфизмы в $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ перемножаются очевидным образом. Определим *автоморфизм петель* на $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ по правилу: $\Omega(A,m)=(A,m-1)$. Имеется естественный функтор $S: D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})\to D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, определенный как $A\longmapsto(A,0)$.

Мы определяем триангуляцию $\mathcal{T}r(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ пары $(D(\mathfrak{R},\mathfrak{F}),\Omega)$ следующим образом. Последовательность

$$\Omega(A,l)\to(C,n)\to(B,m)\to(A,l)$$

принадлежит $\mathcal{T}r(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, если имеется четное число k и левый треугольник представителей $\Omega(\Omega^{k-l}(A))\to\Omega^{k-n}(C)\to\Omega^{k-m}(B)\to\Omega^{k-l}(A)$ в $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$. Ясно, что функтор S переводит левые треугольники в $D^-(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ в треугольники в $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$.

Основной результат этого раздела формулируется следующим образом.

Теорема (2.5.5)**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенное семейство расслоений в $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathcal{T}r(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ является триангуляцией $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ в классическом смысле Вердье.*

Мы используем триангулированную категорию $D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ для определения $\mathbb{Z}$-градуированной бивариантной теории гомологий, зависящей от $(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$, следующим образом:

$$k_n(A,B)=k_n^{\mathfrak{R},\mathfrak{F}}(A,B):=D(\mathfrak{R},\mathfrak{F})((A,0),(B,n)),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Следствие (2.5.5.1)**.** *Для каждой $\mathfrak{F}$-расслоенной последовательности $A\to B\to C$ и каждого $D\in\mathfrak{R}$ имеются длинные точные последовательности абелевых групп*

$$\cdots\to k_{n+1}(D,C)\to k_n(D,A)\to k_n(D,B)\to k_n(D,C)\to\cdots$$

и

$$\cdots\to k_{n+1}(A,D)\to k_n(C,D)\to k_n(B,D)\to k_n(A,D)\to\cdots$$

Раздел 2.6 посвящен приложению наших методов к проблеме построения «алгебраической K-теории Каспарова».

Рассмотрим ассоциативные алгебры над унитарным кольцом H (не обязательно коммутативным) и рассмотрим категорию Alg_H таких алгебр. Забывая, если необходимо, структуру, мы можем вложить Alg_H в категории H-бимодулей, абелевых групп и множеств соответственно. Зафиксируем одну из этих категорий, назвав ее $\mathcal{U}$, и пусть $F : \mathrm{Alg}_H \to \mathcal{U}$ — забывающий функтор. Пусть $\mathcal{E}$ — класс всех точных последовательностей H-алгебр

$$(E) : 0 \to A \to B \to C \to 0 \tag{2}$$

таких, что $F(B) \to F(C)$ — расщепляющаяся сюръекция.

Определение. *Пусть $(\mathcal{T}, \Omega)$ — триангулированная категория. Теорией гомологий со свойством вырезания на Alg_H со значениями в $\mathcal{T}$ называем функтор $X : \mathrm{Alg}_H \to \mathcal{T}$ вместе с семейством отображений $\{\partial_E \mid E \in \mathcal{E}, \partial_E^X = \partial_E \in \mathcal{T}(\Omega X(C), X(A))\}$, для которых выполнены аксиомы:*
а) для всякого $E \in \mathcal{E}$ последовательность

$$\Omega X(C) \xrightarrow{\partial_E} X(A) \xrightarrow{X(f)} X(B) \xrightarrow{X(g)} X(C)$$

— выделенный треугольник в $\mathcal{T}$;
б) если

$$\begin{tikzcd} (E): & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ (E'): & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

— отображение расширений, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Omega X(C) \arrow[r, "\partial_E"] \arrow[d, "\Omega X(\gamma)"'] & X(A) \arrow[d, "X(\alpha)"] \\ \Omega X(C') \arrow[r, "\partial_{E'}"'] & X(A) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть $\iota_\infty : A \to M_\infty A$ — естественное включение из A в кольцо всех конечных матриц $M_\infty A = \bigcup_n M_n A$ над A. Гомотопически инвариантная теория гомологий со свойством вырезания $X : \mathrm{Alg}_H \to \mathcal{T}$ называется M_∞-стабильной, если для всякого $A \in \mathrm{Alg}_H$ стрелка $X(\iota_\infty)$ — изоморфизм.

Кортинас–Том [CT] строят гомотопически инвариантную, M_∞-стабильную теорию гомологий со свойством вырезания $j : \mathrm{Alg}_H \to kk$, которая является универсальной в том смысле, что она единственным образом отображается на всякую другую такую же теорию.

Пусть $\mathfrak{W}_{CT}$ — класс гомоморфизмов f в Alg_H таких, что $X(f)$ — изоморфизм для всякой гомотопически инвариантной, M_∞-стабильной теории гомологий со свойством вырезания $X : \mathrm{Alg}_H \to \mathcal{T}$. Непосредственно проверяется, что тройка $(\mathrm{Alg}_H, \mathfrak{W}_{CT}, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ состоит из таких гомоморфизмов алгебр $\alpha : A \to B$, что $F(\alpha)$ — расщепляющаяся сюръекция, отвечает аксиомам для категории фибрантных объектов.

Пусть $D^-(\mathrm{Alg}_H, \mathfrak{W}_{CT})$ — категория, полученная из Alg_H путем обращения стрелок из $\mathfrak{W}_{CT}$. Аналогично теореме 2.5.5 стабилизация функтора петель Ω, описанная ранее, приводит к триангулированной категории $D(\mathrm{Alg}_H, \mathfrak{W}_{CT})$.

Основной результат этого раздела формулируется следующим образом.

Теорема (2.6.3)**.** *Имеется естественная триангулированная эквивалентность триагулированных категорий kk и $D(\mathrm{Alg}_H, \mathfrak{W}_{CT})$.*

Вторую главу диссертации завершает раздел 2.7, в котором приводятся использованные в главе 2 сведения из теории локализации Бусфелда для модельных категорий.

Глава 3. Классификация конечных локализаций квазикогерентных пучков и восстановление схем

Глава 3 посвящена проблеме классификации локализаций в категориях модулей и квазикогерентных пучков над схемой, а также проблеме восстановления схем. Перейдем теперь к ее описанию.

В разделе 3.1 приводятся общие сведения из теории локализаций в категориях Гротендика. Основной пример категории Гротендика доставляет категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ квазикогерентных пучков над схемой X.

В этом разделе также вводится топологическое пространство $\mathsf{Sp}\,\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — категория Гротендика, которое мы называем *инъективным спектром.* $\mathsf{Sp}\,\mathcal{C}$ состоит из множества классов изоморфности неразложимых инъективных объектов из $\mathcal{C}$. Это пространство играет важную роль в нашем анализе. Если X — схема, то инъективный спектр $\mathsf{Sp}(\mathrm{Qcoh}(X))$ категории Гротендика $\mathrm{Qcoh}(X)$ будет обозначаться через $\mathsf{Sp}(X)$.

В разделе 3.2 изучаются конечные локализации категорий Гротендика, которые представляют основной интерес для результатов третьей главы.

В разделе 3.3 доказывается теорема классификации для локализующих подкатегорий конечного типа в категории модулей $\mathrm{Mod}\,R$ над коммутативным кольцом R. Чтобы ее сформулировать, приведем некоторые определения.

Семейство идеалов $\mathfrak{F}$ кольца R называется *фильтром Габриэля*, если выполнены следующие условия:

$T1.$ $R \in \mathfrak{F}$;
$T2.$ если $I \in \mathfrak{F}$ и $x \in R$, то $(I : x) = \{r \in R \mid rx \in I\} \in \mathfrak{F}$;
$T3.$ если I и J — такие идеалы R, что $I \in \mathfrak{F}$ и $(J : x) \in \mathfrak{F}$ для всех $x \in I$, то $J \in \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ называется *фильтром Габриэля конечного типа*, если для всякого $I \in \mathfrak{F}$ найдется конечно порожденный идеал $J \in \mathfrak{F}$ такой, что $I \supseteq J$.

В нашем анализе большую роль играют спектральные и близкие к ним пространства. Напомним, что топологическое пространство является *спектральным*, если оно квазикомпактное T_0-пространство, квазикомпактные открытые подмножества замкнуты относительно конечных пересечений и образуют базис открытых подмножеств и каждое непустое неприводимое замкнутое подмножество обладает общей точкой. Если X — спектральное топологическое пространство, то исходное множество может быть наделено новой, «двойственной» топологией (мы обозначим ее через X^*), в которой открытыми множествами объявляются множества вида $Y = \bigcup_{i \in \Omega} Y_i$, где Y_i имеет квазикомпактное открытое дополнение $X \setminus Y_i$ для всех $i \in \Omega$. Тогда X^* является спектральным и $(X^*)^* = X$. Для примера, топологическое пространство квазикомпактной, квазиотделимой схемы X (а именно такие схемы нас более всего интересуют) является спектральным.

Теорема (3.3.2)**.** *Если R — коммутативное кольцо, то имеются взаимно однозначные соответствия между:*

(1) *множеством всех открытых подмножеств $V \subseteq (\mathsf{Spec}\, R)^*$,*
(2) *множеством всех фильтров Габриэля конечного типа $\mathfrak{F}$,*
(3) *множеством всех локализующих подкатегорий конечного типа $\mathcal{S}$ категории $\mathrm{Mod}\, R$.*

Эти соответствия определены следующим образом:

$$V \mapsto \begin{cases} \mathfrak{F}_V &= \{I \subset R \mid V(I) \subseteq V\} \\ \mathcal{S}_V &= \{M \in \mathrm{Mod}\, R \mid \mathsf{supp}_R(M) \subseteq V\} \end{cases}$$

$$\mathfrak{F} \mapsto \begin{cases} V_{\mathfrak{F}} &= \bigcup_{I \in \mathfrak{F}} V(I) \\ \mathcal{S}_{\mathfrak{F}} &= \{M \in \mathrm{Mod}\, R \mid \mathsf{ann}_R(x) \in \mathfrak{F} \text{ для всех } x \in M\} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \mapsto \begin{cases} \mathfrak{F}_{\mathcal{S}} &= \{I \subset R \mid R/I \in \mathcal{S}\} \\ V_{\mathcal{S}} &= \bigcup_{M \in \mathcal{S}} \mathsf{supp}_R(M), \end{cases}$$

где $V(I) = \{P \in \mathsf{Spec}\, R \mid I \subseteq P\}$ и $\mathsf{supp}_R(M) = \{P \in \mathsf{Spec}\, R \mid M_P \neq 0\}$.

Эта терема используется при доказательстве теоремы классификации для квазикогерентных пучков.

В разделе 3.4 вводится и изучается топологическое пространство $\mathsf{Sp}_{fl,\otimes}(X)$. Говорим, что подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathrm{Qcoh}(X)$ — *тензорная подкатегория*, если $\mathcal{F} \otimes_X \mathcal{G} \in \mathcal{A}$ для каждого объекта $\mathcal{F}$ в $\mathcal{S}$ и каждого $\mathcal{G} \in \mathrm{Qcoh}(X)$. Как множество $\mathsf{Sp}_{fl,\otimes}(X)$ совпадает с $\mathsf{Sp}(X)$, а его открытые подмножества описываются тензорными локализующими подкатегориями конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$.

Раздел 3.5 посвящен главным образом теореме классификации. Она формулируется следующим образом.

Теорема (3.5.5)**.** *Пусть X — квазикомпактная, квазиотделимая схема. Тогда отображения*

$$Y \xmapsto{\varphi_X} \mathcal{S}(Y) = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}(X) \mid \mathsf{supp}_X(\mathcal{F}) \subseteq Y\}$$

и

$$\mathcal{S} \xmapsto{\psi_X} Y(\mathcal{S}) = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{S}} \mathsf{supp}_X(\mathcal{F})$$

индуцируют биекцию между:

(1) *множеством всех подмножеств вида $Y = \bigcup_{i \in \Omega} Y_i$, где дополнение $X \setminus Y_i$ квазикомпактно и открыто для всех $i \in \Omega$; то есть множеством всех открытых подмножеств X^*,*

(2) *множеством всех тензорных локализующих подкатегорий конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$.*

Пусть $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$ — производная категория совершенных комплексов, то есть гомотопическая категория комплексов пучков $\mathcal{O}_X$-модулей, которые локально квазиизоморфны ограниченным комплексам свободных $\mathcal{O}_X$-модулей конечного типа. Говорим, что толстая триангулированная подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$ — *тензорная подкатегория*, если для каждого объекта E в $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$ и каждого $A \in \mathcal{A}$ производное тензорное произведение $E \otimes_X^L A$ также принадлежит $\mathcal{A}$.

Пусть E — комплекс пучков $\mathcal{O}_X$-модулей. *Когомологический носитель* E — это подпространство $\mathsf{supph}_X(E) \subseteq X$ тех точек $x \in X$, в которых комплекс $\mathcal{O}_{X,x}$-модулей E_x не является ацикличным. Тогда $\mathsf{supph}_X(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathsf{supp}_X(H_n(E))$ — объединение носителей (в обычном смысле) когомологий для E.

Следующий результат утверждает, что имеется взаимно однозначное соответствие между тензорными конечными локализациями квазикогерентных пучков и тензорными толстыми подкатегориями совершенных комплексов.

Теорема (3.5.7)**.** *Пусть X — квазикомпактная, квазиотделимая схема. Тогда отображения*

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{S} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}(X) \mid \mathsf{supp}_X(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}, E\in\mathcal{T}} \mathsf{supp}_X(H_n(E))\}$$

и

$$\mathcal{S} \mapsto \{E \in \mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X) \mid H_n(E) \in \mathcal{S} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}\}$$

индуцируют биекцию между:

(1) *множеством всех тензорных толстых подкатегорий в $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$,*
(2) *множеством всех тензорных локализующих подкатегорий конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$.*

В разделе 3.6 вводится и изучается топология Зариского на $\mathsf{Sp}(X)$. Эта топология является двойственной к топологии на $\mathsf{Sp}_{fl,\otimes}(X)$. В этом разделе также изучаются взаимосвязи топологий Зариского на квазкомпактной, квазиотделимой схеме X и на $\mathsf{Sp}(X)$.

В разделе 3.7 обсуждаются идеальные решетки в смысле Буана–Краузе–Зольберга [BKS] и их простые спектры. Основной пример идеальной решетки доставляет решетка открытых множеств $L_{\mathrm{open}}(X)$ спектрального пространства X.

Предложение (3.7.2)**.** *Пусть $L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X)$ — решетка тензорных локализующих подкатегорий конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$, где X — квазикомпактная, квазиотделимая схема. Тогда $L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X)$ — идеальная решетка.*

Обозначим через $\mathsf{Spec}\, L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X)$ простой спектр идеальной решетки, ассоциированной с $L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X)$.

Следствие (3.7.2.1)**.** *Пусть X — квазикомпактная, квазиотделимая схема. Тогда точки $\mathsf{Spec}\, L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X)$ суть $\frown$-неприводимые тензорные локализующие подкатегории конечного типа в $\mathrm{Qcoh}(X)$, и отображение*

$$f : X^* \to \mathsf{Spec}\, L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X), \quad P \mapsto \mathcal{S}_P = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}(X) \mid \mathcal{F}_P = 0\}$$

— гомеоморфизм пространств.

Раздел 3.8 посвящен проблеме восстановления схем.

Пусть X — квазикомпактная, квазиотделимая схема, и пусть $\mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X)) := (\mathsf{Spec}\, L_{\mathrm{f.loc},\otimes}(X))^*$. Мы определим структурный пучок на $\mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X))$ следующим образом. Пусть $U \subseteq \mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X))$ — открытое подмножество. Положим

$$\mathcal{S}_U := \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}_P = 0 \text{ для всех } P \in f^{-1}(U)\},$$

где f — отображение из следствия 3.7.2.1. Тогда $\mathcal{S}_U$ — тензорная локализующая подкатегория. Получаем предпучок колец на $\mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X))$:

$$U \mapsto \mathrm{End}_{\mathrm{Qcoh}(X)/\mathcal{S}_U}(\mathcal{O}_X),$$

где $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок на X. Если $V \subseteq U$ — открытые подмножества, то ограничение

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Qcoh}(X)/\mathcal{S}_U}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Qcoh}(X)/\mathcal{S}_V}(\mathcal{O}_X)$$

индуцировано локализующим функтором $\mathrm{Qcoh}(X)/\mathcal{S}_U \to \mathrm{Qcoh}(X)/\mathcal{S}_V$. Пучок, ассоциированный с этим предпучком, назовем *структурным пучком* для $\mathrm{Qcoh}(X)$ и обозначим через $\mathcal{O}_{\mathrm{Qcoh}(X)}$.

Следующий результат утверждает, что абелева категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ содержит всю необходимую информацию для восстановления схемы $(X, \mathcal{O}_X)$.

Теорема (3.8.1)**.** *Пусть X — квазикомпактная, квазиотделимая схема. Тогда отображение, описанное в следствии 3.7.2.1, индуцирует изоморфизм окольцованных пространств*

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X)), \mathcal{O}_{\mathrm{Qcoh}(X)}).$$

Теорема 3.8.1 является приложением теоремы классификации 3.5.5. Средства, которые используются для ее доказательства, существенно отличаются от средств, которыми оперирует Розенберг [R] для доказательства аналогичной теоремы для компактных схем.

Завершает главу 3 раздел 3.9. В нем мы определяем когерентные схемы. Они лежат между нетеровыми и квазикомпактными квазиотделимыми схемами и обобщают коммутативные когерентные кольца. Мы доказываем для них теоремы классификации и восстановления.

Определение. *Схема X называется локально когерентной, если она может быть покрыта аффинными подмножествами $\mathsf{Spec}\, R_i$, где каждое R_i — когерентное кольцо. X называется когерентной, если она является локально когерентной, квазикомпактной и квазиотделимой.*

Предложение (3.9.2)**.** *Если X — квазикомпактная, квазиотделимая схема, то X — когерентная схема тогда и только тогда, когда* $\mathrm{coh}(X)$ *— абелева категория, или, эквивалентно,* $\mathrm{Qcoh}(X)$ *— локально когерентная категория Гротендика.*

Теорема (3.9.3)**.** *Пусть X — когерентная схема. Тогда отображения*

$$V \mapsto \mathcal{S} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X) \mid \mathsf{supp}_X(\mathcal{F}) \subseteq V\}$$

и

$$\mathcal{S} \mapsto V = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{S}} \mathsf{supp}_X(\mathcal{F})$$

индуцируют биекцию между:

(1) *множеством всех подмножеств вида* $V = \bigcup_{i\in\Omega} V_i$, *где дополнение* $X \setminus V_i$ *квазикомпактно и открыто для всех* $i \in \Omega$,

(2) *множеством всех тензорных подкатегорий Серра в* $\mathrm{coh}(X)$.

Теорема (3.9.4)**.** *Пусть* X *— когерентная схема. Тогда отображения*

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{S} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X) \mid \mathsf{supp}_X(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}, E\in\mathcal{T}} \mathsf{supp}_X(H_n(E))\}$$

и

$$\mathcal{S} \mapsto \{E \in \mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X) \mid H_n(E) \in \mathcal{S} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}\}$$

индуцируют биекцию между:

(1) *множеством всех тензорных толстых подкатегорий в* $\mathcal{D}_{\mathrm{per}}(X)$,

(2) *множеством всех тензорных подкатегорий Серра в* $\mathrm{coh}(X)$.

Пусть X — когерентная схема. Тогда окольцованное пространство $(\mathsf{Spec}(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{O}_{\mathrm{coh}(X)})$ определяется аналогично $(\mathsf{Spec}(\mathrm{Qcoh}(X)), \mathcal{O}_{\mathrm{Qcoh}(X)})$.

Теорема (3.9.5)**.** *Пусть* X *— когерентная схема. Тогда существует естественный изоморфизм окольцованных пространств*

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{Spec}(\mathrm{coh}(X)), \mathcal{O}_{\mathrm{coh}(X)}).$$

Основные работы автора по теме диссертации

Публикации по списку ВАК

[1] Гаркуша Г. А., *FP-инъективные и слабо квазифробениусовы кольца*, Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 110-129.

[2] Гаркуша Г. А., *Заметка о почти регулярных групповых кольцах*, Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 128-132.

[3] Гаркуша Г. А., *Категории Гротендика*, Алгебра и анализ **13**(2) (2001), 1-68.

[4] Гаркуша Г. А., *Системы диаграммных категорий и K-теория. I*, Алгебра и анализ **18**(6) (2006), 131-186.

[5] Гаркуша Г. А., *Классификация конечных локализаций квазикогерентных пучков*, Алгебра и анализ **21**(3) (2009), 93-128.

[6] Гаркуша Г. А., Генералов А. И., *Двойственность для категорий конечно представимых модулей*, Алгебра и анализ **11**(6) (1999), 139-152.

[7] Garkusha G., *Systems of diagram categories and K-theory. II*, Math. Z. **249**(3) (2005), 641-682.

[8] Garkusha G., *Homotopy theory of associative rings*, Advances Math. **213**(2) (2007), 553-599.

[9] Garkusha G., *Relative homological algebra for the proper class w_f*, Comm. Algebra **32**(10) (2004), 4043-4072.

[10] Garkusha G., Prest M., *Injective objects in triangulated categories*, J. Algebra Appl. **3**(4) (2004), 367-389.

[11] Garkusha G., Prest M., *Triangulated categories and the Ziegler spectrum*, Algebras Repr. Theory **8** (2005), 499-523.

[12] Garkusha G., Prest M., *Classifying Serre subcategories of finitely presented modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**(3) (2008), 761-770.

[13] Garkusha G., Prest M., *Reconstructing projective schemes from Serre subcategories*, J. Algebra **319**(3) (2008), 1132-1153.

[14] Garkusha G., Prest M., *Torsion classes of finite type and spectra*, in K-theory and Noncomm. Geometry, European Math. Soc. Publ. House, 2008, pp. 393-412.

Прочие публикации

[15] Гаркуша Г. А., Генералов А. И., *Категории Гротендика как факторкатегории* $(R-\mathrm{mod}, \mathrm{Ab})$, Фунд. и прикл. мат. **7**(4) (2001), 983-992.

Литература

[B] Brown K. S., *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1973), 419-458.

[BKS] Buan A. B., Krause H., Solberg Ø., *Support varieties – an ideal approach*, Homology, Homotopy Appl. **9** (2007), 45-74.

[CT] Cortiñas G., Thom A., *Bivariant algebraic K-theory*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 71-123.

[Cu] Cuntz J., *Bivariant K-theory and the Weyl algebra*, K-theory **35** (2005), 93-137.

[CuT] Cuntz J., Thom A., *Algebraic K-theory and locally convex algebras*, Math. Ann. **334** (2006), 339-371.

[DS] Dugger D., Shipley B., *K-theory and derived equivalences*, Duke Math. J. **124**(3) (2004), 587-617.

[DK1] Dwyer W., Kan D., *Simplicial localization of categories*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), 267-284.

[DK2] Dwyer W., Kan D., *Calculating simplicial localizations*, J. Pure Appl. Algebra **18** (1980), 17–35.

[DK3] Dwyer W., Kan D., *Function complexes in homotopical algebra*, Topology **19** (1980), 427–440.

[F] Franke J., *Uniqueness theorems for certain triangulated categories with an Adams spectral sequence*, K-theory Preprint Archives 139 (1996).

[FSV] Friedlander E., Suslin A. A., Voevodsky V., *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[G62] Gabriel P., *Des catégories abeliénnes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448.

[Ger] Gersten S. M., *On Mayer-Vietoris functors and algebraic K-theory*, J. Algebra **18** (1971), 51-88.

[G] Grothendieck A., *Les Dérivateurs*, manuscript, 1983-1990.

[H] Heller A., *Homotopy theories*, Mem. Amer. Math. Soc. **71** (1988), No. 383.

[H87] Hopkins M. J., *Global methods in homotopy theory*, Homotopy theory (Durham, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 117, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, pp. 73-96.

[Hov] Hovey M., *Classifying subcategories of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **353**(8) (2001), 3181-3191.

[M] Maltsiniotis G., *La K-théorie d'un dérivateur triangulé*, Contemp. Math. **431** (2007), 341-368.

[MV] Morel F., Voevodsky V., *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES **90** (1999), 45-143.

[N] Neeman A., *The chromatic tower for $D(R)$*, Topology **31**(3) (1992), 519-532.

[Q67] Quillen D., *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Q73] Quillen D., *Higher algebraic K-theory. I*, In Algebraic K-theory I, Lecture Notes in Mathematics, No. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85-147.

[R] Rosenberg A. L., *The spectrum of abelian categories and reconstruction of schemes*, Rings, Hopf algebras, and Brauer groups, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 197, Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 257-274.

[Sch] Schlichting M., *A note on K-theory and triangulated categories*, Inv. Math. **150** (2002), 111-116.

[T] Thomason R.W., Trobaugh T., *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift III, Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck, Progress in Mathematics 88, Birkhäuser, 1990, pp. 247-435.

[T97] Thomason R. W., *The classification of triangulated subcategories*, Compos. Math. **105**(1) (1997), 1-27.

[TV] Toën B., Vezzosi G., *Remark on K-theory and S-categories*, Topology **43**(4) (2004), 765-791.

[V] Voevodsky V., $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), number Extra Vol. I, 1998, pp. 579–604.

[W] Waldhausen F., *Algebraic K-theory of spaces, In Algebraic and geometric topology*, Proc. Conf., New Brunswick/USA 1983, Lecture Notes in Mathematics, No. 1126, Springer-Verlag, 1985, pp. 318-419.

[Z] Ziegler M., *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic **26** (1984), 149-213.