САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МОХАМЕД ВАЛИД САЛХ ОТМАН ГАБР

ВЭЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Демьянович Юрий Казимирович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Малоземов Василий Николаевич** (Санкт-Петербургский государственный университет)
	доктор физико-математических наук, профессор **Ходаковский Валентин Аветикович** (Петербургский государственный университет путей сообщения)
Ведущая организация:	Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится "___" _____________ 2010 г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "   "   2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, профессор Даугавет И.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. К настоящему моменту вэйвлет-преобразования и вэйвлетный анализ используются во многих областях науки и техники для самых различных задач: для распознавания образов, для численного моделирования динамики сложных нелинейных процессов, для анализа аппаратной информации и изображений в медицине, космической технике, астрономии, геофизике, для эффективного сжатия сигналов и передачи информации по каналам с ограниченной пропускной способностью и т.п. Многие исследователи называют вэйвлет-анализ "математическим микроскопом" для точного изучения внутреннего состава и структур неоднородных сигналов и функций. Развитие теории осуществляли многие ученые: И. Мейер, С. Малла, И. Добеши, Г. Стрэнг, Ж. Баттле, П. Ж. Лемарье, Ч. Чуи, А. Коэн, Р. Койфман, С. Б. Стечкин, В. А. Рвачев, И. Я. Новиков, М. А. Скопина, А. П. Петухов, В. Н. Малоземов, В. А. Желудев, В. Ю. Протасов и др.

Вэйвлеты широко применяются при решении задач вычислительной математики и цифровой обработки сигналов. Как правило, в подобных задачах требуется найти коэффициенты разложения функции по некоторому базису с целью извлечения информации о функции, для последующей обработки или анализа. В теории вэйвлетов изучаются различные базисы, последовательности базисов, последовательности вложенных пространств, а также алгоритмы преобразования коэффициентов разложений функций по этим базисам. Вложенность позволяет получить представление исходного пространства в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы его подпространств.

Многие типы известных вэйвлетов обеспечивают быстрое, но весьма неточное сжатие. В данной работе используются сплайн-вэйвлетные системы с гарантированно высокой точностью приближения гладких цифровых потоков. Они приводят к эффективному сжатию и к достаточно точному результату, ибо учитывают "гладкость" обрабатываемого потока цифровой информации. Стимулом к изучению этого направления исследований стали работы С. Г. Михлина и Ю. К. Демьяновича, поскольку исходными здесь являются аппроксимационные соотношения.

К вэйвлетным (всплесковым) разложениям пространств полиномиальных и тригонометрических сплайнов имеется естественный интерес: пространства этих сплайнов легко строятся и обладают асимптотически оптимальными (по N-поперечнику) аппроксимационными свойствами. Известно, однако, что построение ортогональных (в L_2) разложений весьма затруднительно даже на равномерной сетке.

В случае, когда сетка равномерная, для построения вэйвлетных разложений удается применить мощный аппарат гармонического анализа (в $L_2(\mathbb{R})$ и l_2). Однако, при обработке цифровых потоков с резко меняющимися характеристиками (со сменой плавного поведения на скачкообразное и наоборот) целесообразно использовать неравномерную сетку, приспосабливаемую к обрабатываемому потоку. Так для улучшения приближения могут понадобиться различные степени измельчения сетки в разных частях рассматриваемого промежутка, а для сжатия — различные степени укрупнения сетки. Весьма важны случаи, когда исходные данные естественным образом связаны с некоторым многообразием

(примерами могут служить цифровые потоки значений мощности излучения от поверхности тел различной формы: сферической, тороидальной и др.)

Для вэйвлетных разложений на неравномерной сетке можно использовать пространства сплайнов. Известна лифтинговая схема, основанная на интерполяции сплайнами. В настоящей работе исследуется вэйвлетная схема, основанная на аппроксимации сплайнами на неравномерной сетке с гарантированным порядком приближения и простыми формулами декомпозиции и реконструкции.

Цель диссертационной работы. Целью работы является получение новых вэйвлетных разложений пространств полиномиальных и тригонометрических сплайнов лагранжева типа на неравномерных сетках.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры и теории функций вещественного переменного. Для построения биортогональной системы функционалов применены методы функционального анализа.

Достоверность и обоснованность. Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами; результаты согласуются с проведенными численными экспериментами.

Результаты, выносимые на защиту

1. Разработаны способы продолжения системы функционалов, биортогональной системе полиномиальных сплайнов; кроме того, найдены продолжения системы функционалов, биортогональной системе тригонометрических сплайнов.

2. Предложены новые простые варианты проектирования объемлющего пространства на пространства полиномиальных и тригонометрических сплайнов.

3. Построены вэйвлетные (всплесковые) разложения полиномиальных и тригонометрических сплайнов пространств лагранжева типа на последовательности неравномерных измельчающихся сеток.

4. Даны формулы декомпозиции и реконструкции числовых потоков, генерируемых исходной функцией класса $C(\alpha, \beta)$.

5. Исследованы свойства аппроксимации и устойчивости предлагаемых алгоритмов. Проведена их численная апробация на модельных примерах.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая полезность. Данная работа носит теоретический характер, однако полученные результаты могут быть применены для создания эффективных алгоритмов решения многих прикладных задач, связанных с обработкой больших потоков числовой информации, в частности, к обработке изображений, к задачам интерполяции и аппроксимации, к численному решению ряда задач математической физики.

Апробация работы. Полученные результаты обсуждались и докладывались на XL международной научной конференции "Процессы управления и устойчивость С.-Петербург, 6-9 апреля 2009 г., на XLI международной научной конференции "Процессы управления и устойчивость С.-Петербург, 5-8 апреля 2010 г., и на семинаре кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета СПбГУ в 2009 году.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 6 работах, в том числе 2 статьи в журналах, входящих в список изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией на момент публикации (см. раздел "Список опубликованных работ по теме диссертации" в конце автореферата).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 171 странице, содержит 12 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 53 названия.

Содержание работы. Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы и излагаются основные полученные результаты.

В **первой главе** приведен краткий обзор биортогональных систем со свойством локальности и вэйвлетных разложений линейных пространств, рассматриваются вэйвлетные разложения пространств сплайнов лагранжева типа первой, второй и третьей степени. Для координатных сплайнов строятся системы функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональные системам координатных сплайнов $\{\omega_j(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

На конечном или бесконечном интервале (α,β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X\stackrel{\text{def}}{=}\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}},\ x_j<x_{j+1}$, для которой $\alpha=\lim\limits_{j\to-\infty}x_j,\ \beta=\lim\limits_{j\to+\infty}x_j$. Линейное пространство функций, r раз непрерывно дифференцируемых в точках открытого интервала (α,β), обозначим $C^r(\alpha,\beta)$. Рассмотрим полиномиальный сплайн первой степени $\omega_{j,1,X}(x)$, определяемый однозначно (с точностью до некоторой ненулевой константы) условиями $\omega_{j,1,X}(x)\in C^0(\alpha,\beta)$, supp $\omega_{j,1,X}(x)=[x_j,x_{j+2}]$. В пространстве $C(\alpha,\beta)$ рассмотрим линейные функционалы $\lambda_i, i\ \in\mathbb{Z}$, определяемые формулой $\langle\lambda_i,f\rangle=f(x_{i+1}),\ f\in C(\alpha,\beta)$. Система функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j,1,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Для фиксированного $k\in\mathbb{Z}$ положим

$$y_{k+1}\stackrel{\text{def}}{=}\xi,\quad y_j\stackrel{\text{def}}{=}x_j,\ j<k+1,\quad y_j\stackrel{\text{def}}{=}x_{j-1},\ j>k+1,\quad Y\stackrel{\text{def}}{=}\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}.\tag{1}$$

Для сетки Y, полученной из сетки X добавлением одного узла, строятся сплайны $\omega_{j,1,Y}(x)$ и устанавливаются калибровочные соотношения (обобщающие кратно-масштабное уравнение), которые выражают сплайны $\omega_{j,1,X}(x)$ в виде линейной комбинации сплайнов $\omega_{j,1,Y}(x)$:

$$\omega_{i,1,X}(x)=\sum_j\mathfrak{p}_{i,j}\omega_{j,1,Y}(x);\tag{2}$$

где числа $\mathfrak{p}_{i,j}$ отыскиваются по формулам:

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ при } i \le k-2, \qquad \mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \text{ при } i \ge k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \ne k-1, k, \qquad \mathfrak{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \ne k, k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = 1, \quad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \frac{y_{k+2} - \xi}{y_{k+2} - y_k}, \quad \mathfrak{p}_{k,k} = \frac{\xi - y_k}{y_{k+2} - y_k}, \quad \mathfrak{p}_{k,k+1} = 1.$$

Соотношения вида (2) называются *калибровочными соотношениями.*

Рассмотрим пространство $\mathfrak{B}_X$, являющееся линейной оболочкой функций $\omega_{j,1,X}(x)$,

$$\mathfrak{B}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{\ u \mid u = \sum_j c_j \omega_{j,1,X}(x) \ \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\ \}.$$

Пространство $\mathfrak{B}_X$ называется *пространством сплайнов на сетке* X, а $\omega_{j,1,X}(x)$ — *образующими* этого пространства.

Ввиду калибровочных соотношений справедливо включение $\mathfrak{B}_X \subset \mathfrak{B}_Y$. Рассматривается оператор $\mathscr{P}$ проектирования пространства $\mathfrak{B}_Y$ на подпространство $\mathfrak{B}_X$, задаваемый формулой

$$\mathscr{P} v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle \lambda_j, v \rangle\ \omega_{j,1,X}(x) \qquad \forall v \in \mathfrak{B}_Y,$$

и оператор $\mathscr{Q} = I - \mathscr{P}$, где I — тождественный оператор. Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathscr{W} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{Q}\mathfrak{B}_Y$, а получаемое прямое разложение

$$\mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \dot{+} \mathscr{W}$$

— *сплайн-вэйвлетное разложение* пространства $\mathfrak{B}_Y$.

Пусть известны коэффициенты c_i в разложениях проекций элемента $v \in \mathfrak{B}_Y$ на пространства $\mathfrak{B}_X$ и $\mathscr{W}$. Для чисел a_i и b_k получаем *формулы декомпозиции*

$$a_i = c_i \quad \text{при} \quad i \le k-1, \qquad a_i = c_{i+1} \quad \text{при} \quad i \ge k,$$

$$b_k = c_k - \frac{y_{k+2} - \xi}{y_{k+2} - y_k} c_{k-1} - \frac{\xi - y_k}{y_{k+2} - y_k} c_{k+1}, \qquad b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \ne k.$$

Если же известны коэффициенты в разложении элемента по базису, то

$$c_j = a_j \quad \text{ при } j \le k-1, \qquad c_j = a_{j-1} \quad \text{ при } j \ge k+1,$$

$$c_k = \frac{y_{k+2} - \xi}{y_{k+2} - y_k} a_{k-1} + \frac{\xi - y_k}{y_{k+2} - y_k} a_k + b_k;$$

эти формулы называются *формулами реконструкции.*

Далее на сетках X и Y рассматриваются полиномиальные квадратичные сплайны $\omega_{j,2,X}(x)$ и $\omega_{j,2,Y}(x)$, однозначно (с точностью до ненулевых постоянных множителей) определяемые условиями $\omega_{j,2,X}(x),\ \omega_{j,2,Y}(x) \in C^1(\alpha, \beta)$, $\operatorname{supp} \omega_{j,2,X}(x) = [x_j, x_{j+3}]$, $\operatorname{supp} \omega_{j,2,Y}(x) = [y_j, y_{j+3}]$; между $\omega_{j,2,X}(x)$ и $\omega_{j,2,Y}(x)$

имеются калибровочные соотношения, аналогичные рассмотренным выше. Вводятся также системы функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональные системам функций $\{\omega_{j,2,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\omega_{j,2,Y}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно; для функционала λ_i справедливо соотношение

$$\langle\lambda_i, f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} 2f\left(\frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x_{i+1}) - \frac{1}{2}f(x_{i+2}), \tag{3}$$

а функционал ν_i определяется формулой, полученной из (3) заменой x_i на y_i. Строится вэйвлетное разложение $\mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \dot{+} \mathscr{W}$ пространства $\mathfrak{B}_Y$ и выводятся формулы реконструкции и декомпозиции. Далее доказываются теоремы об аппроксимации функции с помощью линейной комбинации образующих сплайнов, коэффициентами которой служат значения аппроксимационных функционалов на упомянутой функции. Обозначим $\mathcal{S}_m(x)$ пространство пространство многочленов степени $\le m$ и введем обозначения: $\|f\|_{[a,b]} = \sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$, $\mathrm{dist}_{[a,b]}(f,\mathfrak{B}_X) = \inf\limits_{u\in\mathfrak{B}_X}\|f-u\|_{[a,b]}$.

Теорема 1. *Для $f\in C^3[\alpha,\beta]$ верна оценка*

$$\mathrm{dist}_{[\alpha,\beta]}(f,\mathcal{S}_2(x)) \le \frac{1}{2^3 3!}(\beta-\alpha)^3\|D^3 f\|_{[\alpha,\beta]}.$$

Теорема 2. *При $x\in[\alpha,\beta]$ верна оценка*

$$\mathrm{dist}_{[\alpha,\beta]}(f,\mathfrak{B}_X) \le \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\|D^3 f\|_{[\alpha,\beta]}.$$

Далее в первой главе для сплайнов третьей степени $\omega_{j,3,X}(x)$, для которых $\mathrm{supp}\ \omega_{j,3,X}(x) = [x_j, x_{j+4}]$, устанавливаются аналогичные калибровочные соотношения и строятся системы функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональных системе $\{\omega_{j,3,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, и использующих лишь значения генерирующей функции.

Теорема 3. *Система функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, определяемых формулой*

$$\langle\lambda_i, f\rangle = \frac{1+2\eta_{i+2}}{9\eta_{i+2}(1+\eta_{i+2})}f(x_{i+1}) - \frac{8(1+2\eta_{i+2})}{9\eta_{i+2}(1+\eta_{i+2})}f\left(\frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}\right) +$$

$$+\frac{7+16\eta_{i+2}+7\eta_{i+2}^2}{9\eta_{i+2}}f(x_{i+2}) - \frac{8\eta_{i+2}(2+\eta_{i+2})}{9(1+\eta_{i+2})}f\left(\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{2}\right) +$$

$$+\frac{\eta_{i+2}(2+\eta_{i+2})}{9(1+\eta_{i+2})}f\left(x_{i+3}\right), \quad \eta_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1}-x_i},$$

биортогональна по отношению к системе функций $\{\omega_{j,3,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Аналогичным образом для сплайнов третьей степени выводятся вэйвлетные разложения, формулы реконструкции и декомпозиции, а также доказываются теоремы об аппроксимации .

Вторая глава посвящена построению сплайн-вэйвлетного разложения пространств тригонометрических сплайнов второго и третьего порядков, основанного на применении биортогональных систем функционалов без использования производных генерирующий функции; кроме того, получены оценки устойчивости.

На сетках X рассматриваются тригонометрические B-сплайны второго порядка $\mathfrak{T}_{j,2,X}(x)$, о пределяемые условиями $\mathfrak{T}_{j,2,X}(x) \in C^1(\alpha,\beta)$, $\operatorname{supp}\mathfrak{T}_{j,2,X}(x) = [x_j, x_{j+2}]$. Пусть $s(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $c(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; рассмотрим линейное пространство $\Pi_X = \{u | u = \sum_j c_j \mathfrak{T}_{j,2,X}(x)\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$.

Для сетки Y, полученной из сетки X добавлением одного узла $\theta \in (x_k, x_{k+1})$, строятся сплайны $\mathfrak{T}_{j,2,Y}(x)$, $\operatorname{supp}\mathfrak{T}_{j,2,Y}(x) = [y_j, y_{j+2}]$, устанавливаются калибровочные соотношения, выражающие сплайны $\mathfrak{T}_{i,2,X}(x)$ в виде линейной комбинации сплайнов $\mathfrak{T}_{j,2,Y}(x)$, а именно $\mathfrak{T}_{i,2,X}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_{i,j}\mathfrak{T}_{j,2,Y}(x)$.

Теорема 4. *Для сплайнов второго порядка коэффициенты $\mathfrak{p}_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, отыскиваются по формулам:*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ при } i \le k-2, \quad \mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \text{ при } i \ge k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \ne k-1, k, \quad \mathfrak{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \ne k, k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = 1, \quad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \frac{s(y_{k+2}-\theta)}{s(y_{k+2}-y_k)}, \quad \mathfrak{p}_{k,k} = \frac{s(\theta - y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}, \quad \mathfrak{p}_{k,k+1} = 1.$$

Для сплайнов третьего порядка устанавливаются аналогичные калибровочные соотношения. Калибровочные соотношения для сплайнов третьего порядка представлены в теореме 5.

Теорема 5. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{T}_{i,3,X}(x) = \sum_j \mathfrak{p}_{i,j}\mathfrak{T}_{j,3,Y}(x),$$

где при $i, j \in \mathbb{Z}$ коэффициенты $\mathfrak{p}_{i,j}$ определяются равенствами

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ при } i \le k-3, \quad \mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \text{ при } i \ge k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = 1,\ \mathfrak{p}_{k-2,k-1} = \frac{s(y_{k+2}-\theta)}{s(y_{k+2}-y_{k-1})},\ \mathfrak{p}_{k-2,j} = 0 \text{ при } j \ne k-2, k-1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \frac{s(\theta - y_{k-1})}{s(y_{k+2}-y_{k-1})},\ \mathfrak{p}_{k-1,k} = \frac{s(y_{k+3}-\theta)}{s(y_{k+3}-y_k)},\ \mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \ne k-1, k,$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \frac{s(\theta - y_k)}{s(y_{k+3}-y_k)},\ \mathfrak{p}_{k,k+1} = 1,\ \mathfrak{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \ne k, k+1.$$

Далее $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ вводится система линейных функционалов над $C(\alpha,\beta)$ согласно формулам $\langle\lambda_j, u\rangle = u(x_{j+1})$, $\langle\lambda_i, \mathfrak{T}_{j,2,X}(x)\rangle = \delta_{i,j}$. На $C(\alpha,\beta)$ рассматривается вопрос о системе функционалов, биортогональной системе функций тригонометрических сплайнов третьего порядка $\{\mathfrak{T}_{j,3,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Эти результаты сформулированы в следующей теореме:

Теорема 6. *Система функционалов $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, определяемая формулой*

$$\langle\lambda_j, f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} 2c^2\left(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\right) f\left(\frac{x_{j+1}+x_{j+1}}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x_{j+1}) - \frac{1}{2}f(x_{j+2}) \quad \forall f \in C(\alpha,\beta),$$

биортогональна по отношению к системе функций $\{\mathfrak{T}_{j,3,X}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Также строятся сплайн-вэйвлетные разложения и выводятся формулы реконструкции и декомпозиции.

Теорема 7. *Для тригонометрического сплайн-вэйвлетного разложения второго порядка формулы декомпозиции имеют вид*

$$a_i = c_i \quad \text{при} \quad i \le k-1, \quad a_i = c_{i+1} \quad \text{при} \quad i \ge k,$$

$$b_k = c_k - \frac{s(y_{k+2}-\theta)}{s(y_{k+2}-y_k)}c_{k-1} - \frac{s(\theta-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}c_{k+1}, \quad b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \ne k,$$

Теорема 8. *Для тригонометрического сплайн-вэйвлетного разложения второго порядка формулы реконструкции имеют вид*

$$c_j = a_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \qquad c_j = a_{j-1} \quad \text{при } j \ge k+1,$$

$$c_k = \frac{s(y_{k+2}-\theta)}{s(y_{k+2}-y_k)}a_{k-1} + \frac{s(\theta-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}a_k + b_k.$$

Далее во второй главе строятся тригонометрические сплайн-вэйвлетные разложения третьего порядка; в этом случае также получены формулы реконструкции и декомпозиции.

Далее для сплайнов третьего порядка доказывается теоремы об устойчивости.

Теорема 9. *Для любой сетки верно неравенство*

$$\max_{j\in\mathbb{Z}} |d_j| \le \pi \max_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| + |b_{k-1}| + |b_k|,$$

а если сетка локально квазиравномерна, т.е. удовлетворяет неравенству $\dfrac{1}{\mathscr{K}_0} \le \dfrac{x_{j+1}-x_j}{x_j-x_{j-1}} \le \mathscr{K}_0$ *при некотором* $\mathscr{K}_0 > 1$*, справедлива оценка*

$$\max_{j\in\mathbb{Z}} |a_j| \le \varsigma(\mathscr{K}_0) \max_{i\in\mathbb{Z}} |d_i|.$$

Явное представление $\varsigma(\mathscr{K}_0)$ в зависимости от $\mathscr{K}_0$ дано в диссертации.

В **третьей главе** рассматривается неортогональные вэйвлетные разложения пространств полиномиальных сплайнов m-й степени на сетке X с использованием операций проектирования лагранжева типа. Эти разложения построены с помощью одного варианта продолжения на $C(\alpha,\beta)$ системы функционалов, биортогональной координатным сплайнам минимального дефекта. При $\forall k \in \mathbb{Z},\ x \in (x_k, x_{k+1})$, вводятся функции $\omega_{s,m}(x)$ с носителем $[x_s, x_{s+m}]$, удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям:

$$\binom{m}{i}^{-1} \sum_{s=k-m}^{k} \sigma_i(x_{s+1},\dots,x_{s+m})\omega_{s,m}(x) = x^i \qquad i = 0,\dots,m; \tag{4}$$

здесь $\sigma_i(z_1,\dots,z_m)$ — элементарные симметрические многочлены степени i от m переменных $\sigma_i(z_1,\dots,z_m) = \sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_i\le m} z_{j_1}z_{j_2}\cdots z_{j_i}$. При каждом фиксированном $x \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (4) можно рассматривать как систему

$m+1$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $m+1$ неизвестных $\{\omega_{s,m}(x)\}_{\{k-m,\dots,k\}}$. Меняя x в промежутке (x_k, x_{k+1}), заметим, что линейная оболочка получающихся при этом правых частей системы (4) совпадает с пространством $\mathbb{R}^{m+1}$ (определитель Вандермонда $m+1$-го порядка для различных узлов, выбранных на интервале $(a,b) \in (x_k, x_{k+1})$, отличен от нуля). Отсюда следует, что матрица СЛАУ (4) неособенная, а сплайны $\{\omega_{s,m}(x)\}_{s\in\{k-m,\dots,k\}}$ образуют линейно независимую систему на любом промежутке $(a,b) \in (x_k, x_{k+1})$.

Далее предлагается способ построения системы функционалов, биортогональной системе $\{\omega_{i,m}(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, с использованием аппроксимационных соотношений и оператора лагранжевой интерполяции (степени m).

Лемма 1. *Если $x \in (x_k, x_{k+1})$, то для любых чисел $z_1, \dots, z_m$ справедлива формула*

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{l=1}^{m}(x - z_l) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \sigma_{m-i}(z_1, \dots, z_m) \binom{m}{i}^{-1} \times$$

$$\times \sum_{s=k-m}^{k} \sigma_i(x_{s+1}, \dots, x_{s+m}) \omega_{s,m}(x).$$

Рассмотрим обозначение: результат выбрасывания n_i из последовательности $n_0, n_1, \dots, n_l$ будем записывать в виде $n_0, n_1, \dots'^{\,i} \dots, n_l$. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. На отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ рассмотрим сетку $\{h_{k,i}\}_{i=0,\dots,m}$: $x_k \le h_{k,0} < h_{k,1} < \dots < h_{k,m} \le x_{k+1}$.

Теорема 10. *Система функционалов $\{\lambda_{s,k}\}$, определяемая формулой*

$$\langle \lambda_{s,k}, g \rangle = \sum_{r=0}^{m} \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{\prod_{l=0, l\neq r}^{m}(h_{k,r} - h_{k,l})} g(h_{k,r}) \times$$

$$\times \sigma_{m-i}(h_{k,0}, \dots'^{\,r} \dots, h_{k,m}) \binom{m}{i}^{-1} \sigma_i(x_{s+1}, \dots, x_{s+m}), \tag{5}$$

$\forall g \in C(\alpha, \beta)$, биортогональна по отношению к системе функций $\{\omega_{i,m}(x)\}$.

Для фиксированного $r \in \{-m, \dots, 0\}$ обозначим Λ_r систему функционалов $\Lambda_r = \{\lambda_{r+k,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Соотношения (5) дают $m+1$ вариант продолжения системы функционалов, биортогональной системе $\{\omega_{i,m}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, с пространства сплайнов $\mathfrak{B}_X$ на пространство функций $C(\alpha, \beta)$ (а именно, варианты Λ_r, $r = -m, -m+1, \dots, 0$). В дальнейшем будем рассматривать лишь случай $r = 0$. Для краткости введем обозначение $\lambda_k = \lambda_{k,k}$.

Аналогично предыдущему строятся функции $\overline{\omega}_{s,m}(x)$ на сетке Y и рассматривается система функционалов $\{\overline{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональная системе функций $\{\overline{\omega}_{j,m}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, такая, что носитель функционала $\overline{\lambda}_i$ содержится в отрезке $[y_i, y_{i+1}]$: $\langle \overline{\lambda}_i, \overline{\omega}_{j,m}(x) \rangle = \delta_{i,j}, \quad \operatorname{supp} \overline{\lambda}_i \subset [y_i, y_{i+1}]$.

Пусть $\mathfrak{p}_{i,j} = \left\langle \overline{\lambda}_i, \omega_{j,m}(x) \right\rangle$, $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{i,j})^T$, $\mathfrak{q}_{i,j} = \langle \lambda_i, \overline{\omega}_{j,m}(x) \rangle$, $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}_{i,j})$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы следующие две теоремы.

Теорема 11. *При $x \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_{i,m}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p}_{i,j} \overline{\omega}_{j,m}(x),$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{при } i < k - m, \\ \zeta_i \delta_{i,j} + (1 - \zeta_{i+1}) \delta_{i+1,j} & \text{при } k - m \le i \le k, \\ \delta_{i+1,j} & \text{при } i > k, \end{cases}$$

где $\zeta_i = \frac{\xi - y_i}{y_{i+m+1} - y_i}$.

Теорема 12. *Справедливы формулы*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \ \text{ при } j \le k - m - 1, \quad \mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \ \text{ при } j \ge k + 2 \quad , \forall i \in \mathbb{Z};$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j} \ \forall \ i \le k - m, \ \mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \ \forall \ i \ge k + 1 \quad j = k - m, \ldots, k + 1;$$

$$\mathfrak{q}_{i,k+1} = 0 \quad \text{при } i = k - m + 1, \ldots, k - 1.$$

Кроме того, если $h_{k,m-1} < \xi < x_{k+1}$, *то*

$$\mathfrak{q}_{k,k+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \overline{\omega}_{k+1,m}(y_{k+2})}{\binom{m}{n} \prod_{j=0}^{m-1} (h_{k,m} - h_{k,j})} \sigma_{m-n}(h_{k,0}, \ldots, h_{k,m-1}) \sigma_n(y_{k+2}, \ldots, y_{k+m+1}),$$

а если $h_{k,s} < \xi \le h_{k,s+1}$, $s = 0, \ldots m - 2$, *то*

$$\mathfrak{q}_{k,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=s+1}^{m} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \overline{\omega}_{k+1,m}(h_{k,i})}{\binom{m}{n} \prod_{j=0, j \ne i}^{m} (h_{k,i} - h_{k,j})} \sigma_{m-n}(h_{k,0}, \ldots \overset{\prime\, i}{} \ldots, h_{k,m}) \times & \\ \times \sigma_n(y_{k+2}, \ldots, y_{k+m+1}) & \forall \ j = k + 1, \\ \frac{1 - \mathfrak{q}_{k,k+1}}{\zeta_k} & \forall \ j = k, \\ \frac{(\zeta_{j+1} - 1) \mathfrak{q}_{k,j+1}}{\zeta_j} & \forall \ j = k - 1, \ldots, k - m; \end{cases}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \forall \ i < j, \\ \frac{1}{\zeta_i} & i = j, \\ \displaystyle\frac{1}{\zeta_j} \prod_{r=j+1}^{i} \frac{\zeta_r - 1}{\zeta_r} & \forall \ i > j, \end{cases}$$

при $i = k - m + 1, \ldots, k - 1$, $j = k - m, \ldots, k$.

Далее устанавливается, что матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}$. На основании упомянутых результатов получается вэйвлетное разложение пространства

$$\mathfrak{B}_Y = \{v | v = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j \overline{\omega}_{j,m}(x), \ d_j \in \mathbb{R}^1\}$$

в прямую сумму пространства

$$\mathfrak{B}_X = \{u | u = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \omega_{i,m}(x), \ a_i \in \mathbb{R}^1\}$$

и m-мерного вэйвлетного пространства $\mathscr{W} = \Big\{ \sum_{r=k-m+1}^{k} b_r \overline{\omega}_{r,m}(x), b_r \in \mathbb{R}^1 \Big\}$.

Теорема 13. *Для сплайн-вэйвлетного разложения формулы декомпозиции имеют вид*

$$a_i = d_i \quad \forall i \le k-m, \qquad a_i = d_{i+1} \quad \forall i \ge k+1,$$

$$a_i = \sum_{j=k-m}^{k-1} \mathfrak{q}_{i,j} d_j \quad \forall k-m+1 \le i \le k-1, \quad a_k = \sum_{j=k-m}^{k+1} \mathfrak{q}_{k,j} d_j$$

$$b_j = \begin{cases} d_j - \mathfrak{p}_{j-1,j} a_{j-1} - \mathfrak{p}_{j,j} a_j & j = k-m+1, \dots, k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где коэффициенты $\mathfrak{p}_{i,j}$ *и* $\mathfrak{q}_{i,j}$ *даны в теоремах* 11 *и* 12.

Теорема 14. *Для сплайн-вэйвлетного разложения формулы реконструкции имеют вид*

$$d_i = a_i \quad \forall i \le k-m, \qquad d_i = a_{i-1} \quad \forall i \ge k+1,$$

$$d_i = b_i + \mathfrak{p}_{i-1,i} a_{i-1} + \mathfrak{p}_{i,i} a_i, \quad \forall i = k-m+1, \dots, k.$$

Для функции из пространства $C^{m+1}(\alpha, \beta)$ строится аппроксимация в виде линейной комбинации базисных сплайнов, коэффициентами которой являются значения аппроксимационных функционалов. Выводятся оценки для аппроксимационных функционалов, полиномов и сплайнов.

Лемма 2. *Для функционала* λ_j *справедлива оценка*

$$|\langle \lambda_j, f \rangle| \le \epsilon_m \|f\|_{[x_j, x_{j+1}]}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

где $\epsilon_m = \dfrac{2^m \left(m(m+1) \right)^m}{m!}$.

Теорема 15. *Для* $f \in C^{m+1}[\alpha, \beta]$ *верна оценка*

$$\operatorname{dist}_{[\alpha,\beta]}(f, \mathcal{S}_m(x)) \le \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} l^{m+1} \|D^{m+1} f\|_{[\alpha,\beta]},$$

где $l = \beta - \alpha$.

Теорема 16. *Верна оценка*

$$\operatorname{dist}_{[\alpha,\beta]}(f, \mathfrak{B}_X) \le \frac{1+\epsilon_m}{2^{m+1}(m+1)!} l^{m+1} \|D^{m+1} f\|_{[\alpha,\beta]}.$$

Четвертая глава посвящена моделированию полиномиальных и тригонометрических сплайнов. Получены формулы для вычисления базисных сплайнов. Проиллюстрирована вложенность пространств при одном варианте измельчения сетки и конкретизированы калибровочные соотношения в данной ситуации. Далее моделируется аппроксимируемая функция в виде линейной комбинации образующих сплайнов (полиномиальных и тригонометрических), коэффициентами которой служат значения аппроксимационных функционалов на упомянутой функции. Даны результаты приближения в случае сплайновой модели аппроксимации.

В **заключении** перечислены основные результаты исследований.

Приложение содержит тексты программ для построения приближения непрерывно дифференцируемыми сплайнами.

Список цитируемой литературы

[1] *Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны и всплески // Вестн. С.–Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 8–22.

[2] *Чуи Ч. К.* Введение в вэйвлеты. // Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.

[3] *Завьялов Ю. С., Квасов В. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций // М.: Наука, 1980.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] *Демьянович Ю. К., Габр М. В. С.* Новый вариант вэйвлетного разложения пространств сплайнов // Вестн. С.– Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 4. С. 58–68.

[2] *Демьянович Ю.К., Габр М. В. С.* Один вариант вэйвлетных разложений пространств полиномиальных сплайнов // Проблемы математического анализа. Т.45, 2010. С.53–68.

Другие публикации

[3] *Демьянович Ю. К., Габр М. В. С.* Всплесковое разложение пространств тригонометрических сплайнов // Методы вычислений выпуск 23, 2009. С. 30–52.

[4] *Демьянович Ю. К., Габр М. В. С.* О новом варианте вэйвлетного разложения пространств сплайнов третьей степени // Методы вычислений 23, 2009. С. 53–70.

[5] *Габр М. В. С. О.* Об одном варианте вэйвлетных разложений // Процессы управления и устойчивость: Тр. 40-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 6-9 апреля 2009г. / Под ред. Н. В. Смирнова, Тамасяна Г. Ш. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. С. 118-123.

[6] *Габр М. В. С. О.* Вэйвлетное разложение пространств полиномиальных сплайнов на неравномерной сетке // Процессы управления и устойчивость: Тр. 41-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб.,5-8 апреля 2010г. / Под ред. Н. В. Смирнова, Тамасяна Г. Ш. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. С.124-130.