САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Филипова Елена Евгеньевна

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ НА ПОЛУГРУППАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2010

Работа выполнена на кафедре алгебры, геометрии и теории обучения математике Вологодского государственного педагогического университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Мухин Владимир Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Кублановский Станислав Ицхокович (ООО "Северный очаг", г. Санкт-Петербург)
	кандидат физико-математических наук Плотникова Надежда Валентиновна, (Череповецкий государственный университет, г. Череповец)
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург)

Защита состоится «____» _________________ 20__ г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Адрес диссертационного совета: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» ___________________ 20 ___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М. Нежинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предметом алгебры является изучение алгебраических структур, которые определяются заданием одного или нескольких законов композиции на некотором множестве. Одновременно с алгебраической структурой на данном множестве часто рассматривают и другие математические структуры, согласованные с алгебраической структурой. Это ведет к большей конкретности таких объектов и позволяет получать новые факты о структурах, заданных на множестве. Например, при рассмотрении на группе (полугруппе) топологии, согласованной с алгебраическими операциями, возникают новые понятия — топологическая группа (полугруппа). Задание на полугруппе топологии приводит к постановке новых задач и открывает широкие возможности для исследования как свойств полугрупп, так и приложений полугрупп.

Изучение топологических полугрупп началось в 50-х годах XX века с работ А. Д. Уоллеса. Отметим здесь только работу [1]. Одновременно со статьями Уоллеса выходят работы Коха, Нумакури, Тамури, Шварца и др. К настоящему времени опубликован ряд монографий, посвященных топологическим полугруппам, в частности, монографии А. Мухерджеа и Н. Церпеса [2], Дж. Карруса, Дж. Хилдебранта и Р. Коха [3], В.В. Мухина [4].

Как известно, в общем случае из непрерывности n-арной операции $\varphi: X^n \to X$ $(n \geq 2$, X — непустое множество) по каждому аргументу не следует ее непрерывность по совокупности аргументов. Важной является задача установления условий, при которых операция φ является непрерывным отображением по совокупности аргументов. Для групп с топологией такое условие найдено Р. Эллисом [5].

Теорема Эллиса. *Пусть X — группа, наделенная локально компактной топологией τ такой, что групповая операция $(x, y) \mapsto xy$ из $X \times X$ в X непрерывна по каждому аргументу. Тогда эта операция непрерывна по совокупности аргументов, и, кроме того, операция взятия обратного элемента $x \mapsto x^{-1}$ является непрерывным отображением из X в X.*

Интерес к исследованию условий непрерывности полугрупповой операции на полугруппе с топологией связан также с необходимостью изучения мер на топологических полугруппах и построения на таких структурах гармонического анализа [см, например, 4].

Одним из методов, применяемых в решении многих задач теории полугрупп, является вложение полугруппы в группу. Вопросами топологического вложения полугрупп с топологией в топологические группы занимались Л.Б. Шнеперман, Ф. Христоф, Р. Ригельхоф, Н. Церпес и А. Мухерджеа, Лау Ка-Синг, Дж. Лавсон и Зенг Вей-Бин, В.В. Мухин, А.Р. Миротин. Предложенные Ф. Христофом необходимые и достаточные условия топологического вложения произвольной топологической полугруппы, алгебраически вложимой в группу, в топологическую группу трудно проверяемы на практике. Остальные из перечисленных авторов выделяют классы полугрупп, вложимых в топологические группы, задаваемые простыми условиями. Вместе с тем остается актуальным нахождение новых классов полугрупп, топологически вложимых в группы. Из результатов теоремы Эллиса следует, что задача вложения топологической полугруппы в локально компактную топологическую группу является также актуальной и интересной. В частном случае подобные результаты получены Р. Ригельхофом для коммутативных, а Н. Церпесом и А. Мухерджеа для реверсивных полутопологических полугрупп с сокращениями при условии открытости сдвигов.

Своей алгебраической структурой к группам наиболее близки инверсные полугруппы. Это позволяет переносить некоторые групповые результаты на инверсные полугруппы. Инверсные полугруппы с топологией стали рассматриваться сравнительно недавно, поэтому вполне естественно изучение их топологических свойств. Топологические свойства инверсных полугрупп рассматривал О.В. Гутик [6].

Наряду с полугруппами в работе изучаются также n-полугруппы с топологией. Впервые понятие n-группы появилось в статье Дернте В., опубликованной в 1928 году. В 40-х годах основополагающими работами по n-группам, безусловно, являются работы Е. Поста, С.А. Чунихина. С середины 50-х годов значительно увеличивается число публикаций, посвященных алгебраическим n-арным системам. n-Группами занимались В.А. Артамонов, С.А. Русаков, К. Глазек, Л.М. Глускин, А.М. Гальмак, В. Дудек.

В начале 70-х годов в работах Г. Чупоны [7], С. Кромбеза и Г. Сикса [8] было сформулировано понятие топологической n-группы. С.А. Русаковым [9] введено новое определение топологической n-группы таким образом, что оно является аналогом определения топологической бинарной группы (непрерывность налагается только на n-арную и унарную операции), причем при $n = 2$ оно совпадает с определением топологической группы. В 1992 году вышла монография С.А. Русакова [10], в которой топологическим n-группам отведен небольшой параграф. В монографии доказана эквивалентность определений топологической n-группы Чупоны и Русакова, а также показана непрерывность трансляций в топологических n-группах. Основная часть монографии отведена построению силовской теории n-групп. В настоящее время изучением n-групп и n-полугрупп с топологией занимаются В.В. Мухин, В.А. Дудек. Среди основных работ этих авторов по топологическим n-полугруппам отметим здесь [11].

Цель работы. Целью работы является исследование взаимосвязи алгебраической и топологической структур на полугруппах и n-полугруппах, установление условий, при которых полугрупповая операция на полугруппе, n-полугруппе становится непрерывной по совокупности аргументов.

Основные результаты работы:

1) установлены топологические свойства отображений $(x, y) \mapsto (x, xy)$ и $(x, y) \mapsto (xy, y)$, заданных на декартовом произведении $X \times X$ и принимающих значения из $X \times X$, где X — полугруппа (группа) с топологией, установлена связь этих операций с непрерывностью полугрупповой операции;

2) найдены условия на семейство отклонений на полугруппе, при которых полугрупповая операция непрерывна по совокупности аргументов в топологии на полугруппе, порождаемой этим семейством отклонений;

3) обобщена теорема Эллиса на случай правых (левых) групп, наделенных локально компактной топологией;

4) показана возможность продолжения топологии с порождающего подмножества группы до топологии на группе, согласованной с групповой операцией;

5) получены условия отделимости топологии на инверсной полугруппе;

6) найдены условия, при которых инверсная полугруппа с топологией является объединением топологических групп и топологической инверсной полугруппой;

7) доказаны необходимые и достаточные условия, при которых n-группа с топологией становится топологической n-группой.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

Методы исследования. В работе используются методы алгебры, общей топологии, топологической алгебры.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении топологических групп и полугрупп, n-групп и n-полугрупп, в изучении топологических групп и полугрупп, n-групп и n-полугрупп, в теоретических исследованиях в области топологической алгебры, теории функций, функциональном анализе, а также при разработке спецкурсов по алгебре для студентов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре имени Д.К. Фаддеева в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А. Стеклова (2009); на 37-й региональной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2006); на IV и VI Межвузовских конференциях молодых ученых (Череповец, 2003, 2005); на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Череповецкого государственного университета (2003-2007); на сессии аспирантов и молодых ученых (Вологда, 2007).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 статей, в том числе, 2 статьи в журналах из списка, рекомендованного ВАК РФ. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата.

В статье [1] теорема о продолжении топологии с системы образующих группы до топологии на группе принадлежит соискателю. В качестве следствия 1 получен результат В.В. Мухина. Следствия 1 и 2 доказаны соискателем. Соавтору принадлежит общее руководство статьей и постановка задач. Статья [1] опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. В статье [7] теорема 1 принадлежит соавтору (опубликована ранее соавтором), теорема 2 (обобщение теоремы Эллиса на случай правых групп) и теорема 3 (о непрерывности n-арной операции на полугруппе с локально компактной топологией) — соискателю. В статье [8] теоремы 1 и 2 принадлежат соискателю, соавтору — постановка задач. В статье [10] теорема 1 (о равносильности непрерывности полугрупповой операции и операций $\eta(x, y) = (x, xy)$ и $\delta(x, y) = (xy, y)$ в полугруппах с топологией), теорема 3 (о непрерывности групповой операции в терминах отображений η и δ) и теорема 4 (необходимые и достаточные условия топологического вложения полугруппы с топологией в топологическую группу) принадлежат соискателю. Теорема 2 (об открытости сдвигов в полугруппе с топологией) принадлежит соавтору. В статье [12] теоремы 1 и 2 принадлежат соискателю. Теорема 3 принадлежит соавтору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы. Библиография включает 70 наименований. Общий объем диссертации 80 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование выбора темы, ее актуальность, а также основные понятия и обозначения. В **главе I** сделан исторический обзор, посвященный топологическим бинарным и n-арным группам и полугруппам.

Глава II разбита на 5 параграфов.

В **§ 2.1** описаны топологические свойства отображений $\eta(x, y) = (x, xy)$ и $\delta(x, y) = (xy, y)$ в полугруппах и группах с топологией, заданных на декартовом произведении $X \times X$ и принимающих значения из $X \times X$, где X — полугруппа (группа) с топологией, и устанавливается связь непрерывности этих отображений с непрерывностью полугрупповой операции на X.

Полугруппа, наделенная топологией, называется *топологической полугруппой*, если полугрупповая операция является непрерывным отображением.

В теореме 2.1.1 показана равносильность непрерывности умножения, операций $\eta(x, y) = (x, xy)$ и $\delta(x, y) = (xy, y)$ в полугруппах с топологией.

Группа, наделенная топологией, называется *топологической группой*, если групповая операция и операция взятия обратного элемента являются непрерывными отображениями.

Теорема 2.1.4. *Пусть G — группа, τ — топология на G. Тогда (G, τ) будет топологической группой в том и только в том случае, если η [δ] — непрерывное отображение и $\eta(G \times U)$ [$\delta(U \times G)$] открыто в $G \times G$ для любого $U \in \tau$.*

В **§ 2.2** найдены условия на семейство отклонений на полугруппе, при которых полугрупповая операция будет непрерывным отображением по совокупности аргументов в топологии на полугруппе, порождаемой этим семейством отклонений. Теорема 2.2.2 обобщает результат из [12].

Отклонением на множестве X называется отображение f произведения $X \times X$ в интервал $[0, +\infty]$ расширенной числовой прямой, удовлетворяющее условиям:

1. $f(x, x) = 0$ для любого $x \in X$.
2. $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in X$.
3. $f(x, y) \le f(x, z) + f(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$.

Пусть (f_α) $(\alpha \in A)$ — семейство отклонений на множестве X. На X существует единственная топология τ, для которой всевозможные конечные пересечения множеств вида $\{x \in X \mid f_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$, где $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$, образуют базу открытых окрестностей в произвольной точке $y \in X$. Эта топология называется *топологией, порождаемой семейством отклонений* (f_α) $(\alpha \in A)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть топология* τ *на полугруппе X порождена семейством* $\{f\}$ *отклонений на X, удовлетворяющим следующему условию*:

(**) *для любого* $f \in \{f\}$ *и любого* $a \in X$ *существуют* $\tilde{f} \in \{f\}$ *и окрестность* $V(a, f)$ *точки a такие, что* $f(bx, by) \le \tilde{\tilde{f}}(x, y)$ *для любых* $b \in V(a, f)$ *и любых* $x, y \in X$.

Тогда следующие условия равносильны:

(i) *для любых* $a, x \in X$, *любого отклонения* $f \in \{f\}$ *и любого числа* $\alpha > 0$ *существуют отклонения* $f_1, ..., f_n \in \{f\}$ *и число* $\beta > 0$ *такие, что* $f(sa, xa) < \alpha$ *для всех* $s \in X$, *удовлетворяющих условию* $f_i(s, x) < \beta$ *одновременно для всех* $i = 1, ..., n$;

(ii) *полугрупповая операция* $(x, y) \mapsto xy$ *непрерывна*;

(iii) *для любого* $a \in X$ *правый сдвиг* $x \mapsto xa$ *непрерывен.*

В **§ 2.3** теорема 2.3.3 (2.3.5) является обобщением теоремы Эллиса на случай правых (левых) групп, наделенных локально компактной топологией.

Полугруппа X называется *правой группой*, если она проста справа ($aX = X$ для каждого a из X) и с левыми сокращениями (для любых $x, y \in X$ из $ax = ay$ следует $x = y$).

Теорема 2.3.3. *Пусть правая группа* (X, τ) *наделена локально компактной топологией* τ *такой, что сдвиги* $x \mapsto ax$ *и* $x \mapsto xa$ *для каждого* $a \in X$ *непрерывны и, кроме того, сдвиги* $x \mapsto xa$ *открыты для каждого* $a \in X$. *Тогда*

(i) (X, τ) *является объединением открыто-замкнутых топологических групп*;

(ii) *отображение* $x \mapsto xf$ $(x \in Xe$, e *и* f *— идемпотенты X*) *является топологическим изоморфизмом топологической группы Xe на топологическую группу Xf*;

(iii) (X, τ) *топологически изоморфна прямому произведению группы* Xg $(g \in E)$ *и подполугруппы идемпотентов E, наделенных индуцированной топологией из X*;

(iv) (X, τ) *является топологической полугруппой.*

Параграф **2.4** посвящен вопросам топологического вложения полугрупп с топологией в топологические группы.

Инъективный гомоморфизм p из X в G называется *алгебраическим вложением* полугруппы X в группу G. Алгебраическое вложение p полугруппы X с топологией τ_X в группу G с топологией τ_G называется *топологическим вложением* X в G, если оно является гомеоморфизмом X на подпространство $p(X)$ топологического пространства G.

Отметим, что В.В. Мухиным в [13] показана возможность топологического вложения локально компактной полутопологической полугруппы с открытыми сдвигами в локально компактную топологическую группу при условии алгебраического вложения полугруппы в группу. Этот результат является обобщением результатов Р. Ригельхофа и Н. Церпеса и А. Мухерджеа. В **§ 2.4** теорема 2.4.4 является основной и обобщает указанный результат из [13] на случай порождающего подмножества группы с заданной на нем топологией. В этой теореме найдены естественные условия для топологии порождающего множества, при которых она однозначно продолжается до топологии на всей группе и согласуется с групповой операцией.

Теорема 2.4.4. *Пусть W — подмножество группы G и система образующих G. Пусть τ — топология на W такая, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_m$; $s_1, \ldots, s_k$; $t_1, \ldots, t_l$ множества W и любого $V \in \tau$ множества $W \cap s^{-1}xVy$, $W \cap xVyt^{-1}$ являются открытыми подмножествами W, где $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$, $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, $y = y_1 \cdot \ldots \cdot y_m$, $t = t_1 \cdot \ldots \cdot t_l$. (При этом, если $n = 0$, то элементов $x_1, \ldots, x_n$ указанный набор не содержит. Аналогичное соглашение действует относительно $m = 0$, $k = 0$, $l = 0$).*

Тогда на группе G существует единственная топология τ_G такая, что каждый внутренний сдвиг в G является непрерывным отображением, $W \in \tau_G$ и сужение топологии τ_G на W совпадает с τ. Кроме того:

(i) *если для некоторого $n \in \mathbf{N}$ $(n \geq 2)$ произведение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in W$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in W$, то топология τ_G отделима тогда и только тогда, когда топология τ отделима;*

(ii) *умножение в (G, τ_G) непрерывно по совокупности аргументов, если для некоторой последовательности точек $x_1^0, \ldots, x_n^0 \in W$ $(n \geq 2)$ их произведение $x_1^0 \cdot \ldots \cdot x_n^0$ принадлежит W и функция $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ из W^n в W непрерывна по совокупности аргументов в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$;*

(iii) *если топология τ локально компактна, а топология τ_G отделима, то (G, τ_G) является локально компактной топологической группой.*

В качестве следствия теоремы 2.4.4 получаем теорему, доказанную В.В. Мухиным в [13].

В **§ 2.5** рассматриваются свойства инверсных полугрупп с топологией.

Инверсная полугруппа, наделенная топологией, называется *топологической инверсной полугруппой*, если полугрупповая операция и операция взятия инверсного элемента являются непрерывными отображениями.

Теорема 2.5.2. *Пусть X — инверсная полугруппа, τ — топология на X. Тогда (X,τ) будет топологической инверсной полугруппой тогда и только тогда, когда отображения $\varphi:(x,y)\mapsto x^{-1}y$ и $\psi:(x,y)\mapsto xy^{-1}$ непрерывны.*

Отметим, что в инверсных полугруппах элемент, инверсный к элементу x, обозначается x^{-1}.

Далее исследуется отделимость топологии на инверсных полугруппах. Известно, что в топологической группе замкнутость множества идемпотентов (т.е. множества, состоящего из одной единицы e) эквивалентна отделимости топологии. В работе показано, что в топологической инверсной полугруппе замкнутость множества идемпотентов не влечет за собой отделимости топологии.

Пусть E — множество идемпотентов инверсной полугруппы X. Для каждого $e\in E$ обозначим через H_e максимальную подгруппу X, содержащую e. Идемпотент e инверсной полугруппы (X,τ) называется *изолированным*, если существует окрестность e, не содержащая других идемпотентов.

В теоремах 2.5.8 и 2.5.10 исследуются свойства топологических инверсных полугрупп, в которых идемпотент замкнут или является изолированным элементом в множестве всех идемпотентов.

Теорема 2.5.8. *Если в топологической инверсной полугруппе (X,τ) одноточечное множество $\{e\}$ замкнуто, то подгруппа H_e $(e\in E)$ замкнута в (X,τ) и отделима в индуцированной на H_e топологии.*

Теорема 2.5.10. *Пусть (X,τ) — топологическая инверсная полугруппа, e — изолированный идемпотент в E. Тогда H_e является открытой подгруппой (X,τ).*

Следствие 2.5.13. *Если топологическая инверсная полугруппа (X,τ) является объединением групп, а множество идемпотентов E полугруппы X является дискретным подпространством (X,τ) и каждый идемпотент замкнут, то топология τ отделима.*

Следствие 2.5.14. *Пусть топологическая инверсная полугруппа (X,τ) связна. Если существует идемпотент $e\in E$ такой, что множество $\{e\}$*

замкнуто и e — изолированная точка множества E, то (X, τ) — топологическая группа.

Следующие две теоремы устанавливают условия, при которых инверсная полугруппа с топологией будет объединением топологических групп и топологической инверсной полугруппой.

Теорема 2.5.16. *Пусть X — инверсная полугруппа с локально компактной топологией τ, являющаяся топологической полугруппой. Пусть левые и правые единицы для каждого элемента $x \in X$ равны. Если каждая максимальная подгруппа H_e $(e \in E)$ есть открытое подмножество X, то (X, τ) есть объединение топологических групп и топологическая инверсная полугруппа.*

Теорема 2.5.17. *Пусть X — инверсная полугруппа с топологией τ такой, что отображение $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ непрерывно. Пусть X есть объединение групп. Если каждая максимальная подгруппа H_e $(e \in E)$ есть открытое подмножество X, то (X, τ) есть объединение топологических групп и топологическая инверсная полугруппа.*

В **главе III** рассматриваются n-группы и n-полугруппы с топологией.

В теореме 3.1.2 параграфа **3.1** найдены условия, при которых n-группа с топологией становится топологической n-группой. Эту теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 2.1.4 на случай n-групп.

Топологической n-группой называется n-группа $\langle X, (\ )\rangle$, наделенная топологией τ, если n-арная операция $(\ )$ $(n \geq 2)$ непрерывна по совокупности аргументов и решение x хотя бы одного из уравнений $\left(xa_1^{n-1}\right) = a$ или $\left(a_1^{n-1}x\right) = a$ непрерывно зависит от $aa_1^{n-1} \in X^n$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\langle X, (\ )\rangle$ — n-группа $(n \geq 2)$, τ — топология на X. Пусть операция $(\ )$ является непрерывным отображением из X^n в X. Для того, чтобы $\langle X, (\ ), \tau\rangle$ была топологической n–группой необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ множество $\left\{\left(x, \left(xa_1^{n-2}y\right)\right) \,\middle|\, x \in X, y \in U\right\}$ было открытым подмножеством $X \times X$ для любого $U \in \tau$.*

В **§ 3.2** показано существование максимального разбиения n-полугруппы на ее левые идеалы [лемма 3.2.1]. В теореме 3.3.2 доказано, что если n-полугруппа $\langle X, (\ ), \tau\rangle$ разбита на семейство попарно непересекающихся левых идеалов, для каждого $a \in X$ множество $[\underbrace{X \ldots X}_{n-1} a]$ открыто и для некоторых $b_1, \ldots, b_{n-1}$ из X отображение $x \mapsto (b_1 \ldots b_{n-1} x)$ из X в X непрерывно, то каждый левый идеал является открыто-замкнутым подмножеством $\langle X, (\ ), \tau\rangle$.

В **§ 3.3** теорема 3.3.1 является следствием теоремы 2.4.4 для n-полугрупп с топологией, алгебраически вложимых в бинарные группы.

Теорема 3.3.1. *Пусть n-полугруппа* (X, f, τ) *алгебраически вкладывается в бинарную группу, и каждый сдвиг* $x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1})$ *является непрерывным и открытым отображением полугруппы X в себя, где* $a_1, \ldots, a_{n-1} \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда* (X, f, τ) *топологически вкладывается в полутопологическую бинарную группу в качестве открытой n-подполугруппы. Групповая операция будет непрерывной по совокупности аргументов тогда и только тогда, когда n-арная операция f непрерывна по совокупности аргументов. Если, кроме того, топология* τ *локально компактна, то* (X, f, τ) *топологически вкладывается в локально компактную топологическую группу в качестве открытой n-подполугруппы.*

В **§ 3.4** доказывается следующая теорема:

Теорема 3.4.1. *Пусть топологическая n-полугруппа* $\langle X, (\ ), \tau\rangle$ *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(i) $\langle X, (\ )\rangle$ *содержит единичный элемент e*;

(ii) *к* $\langle X, (\ )\rangle$ *можно присоединить единичный элемент e и, если n нечетно, то* $\langle X, (\ )\rangle$ *не содержит нейтральной последовательности.*

Тогда $\langle X, (\ ), \tau\rangle$ *является производной от бинарной полугруппы* $\langle X, \cdot, \tau\rangle$, *которая является топологической бинарной полугруппой.*

Напомним, что n-полугруппа $\langle X, (\ )\rangle$ называется *производной от бинарной полугруппы* $\langle X, \cdot\rangle$, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ справедливо равенство $(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Говорят, что к $\langle X, (\ )\rangle$ можно *присоединить единичный элемент* $e \notin X$, если на множестве $X_1 = X \cup e$ существует ассоциативная n-арная операция [ ] такая, что e — единичный элемент $\langle X_1, [\ ]\rangle$ и для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ справедливо равенство $[x_1^n] = (x_1^n)$.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wallace, A.D. The structure of topological semigroups / A.D. Wallace // Bull. Amer. Math. Soc, 1955. – Vol. 61. – P. 95-112.
2. Mukherjea, A. Measure on topological semigroups / A. Mukherjea, N.A. Tserpes // Lecture notes in mathematics, 1976. – V. 547. – 197 p.
3. Carruth, J.H. The theory of topological semigroups / J.H. Carruth, J.A. Hildebrant, R.J. Koch. – New York. Basel.: Marcel Dekker, Inc., 1983. – V. 1. – 241 p.
4. Мухин, В.В. Меры на топологических полугруппах / В.В. Мухин // Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. – 2004. – 265 с.
5. Ellis, R. Locally compact transformation groups / R. Ellis // Duke Math. Journal, 1957. – V. 14. – P. 119-125.
6. Гутик, О.В. Вложение топологических инверсных полугрупп и структура их связок с ограничениями на сдвиги: Дис. … канд. физико-мат. наук. – Киев, 1996, – 94 с.
7. Čupona, G. On topological *n*-groups / G. Čupona // Bull. Soc. Math. Phys. R. S. Macédoin 22, 1971. – Кн. 22. – P. 5-10.
8. Crombez, C. On topological *n*-groups / C. Crombez, G. Six // Abhandludlungen Math. Semin. Univ. Hamburg, 1974. – Bd. 41. – P. 115-124.
9. Русаков, С.А. К аксиоматике топологических n-арных групп / А.С. Русаков // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн., 1984. – С. 149-159.
10. Русаков, С.А. Алгебраические *n*-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
11. Dudek, W.A. On topological *n*-ary semigroups / W.A. Dudek, V.V. Mukhin // Quasigroups and Related Systems 3 (1996). Institute mathematics Academy of Science Moldova, Higher College of Engineering in Legnica Poland. Legnica, 1999. – P. 73-88.
12. Мухин, В.В. О топологиях на полугруппах и группах, определяемых семейством отклонений и норм / В.В. Мухин, Бужуф. Х. // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 74-77.
13. Мухин, В.В. О вложении полутопологических полугрупп в полутопологические группы в качестве открытой подполугруппы / В.В. Мухин // Вопросы алгебры: сб. – Гомель: Изд-во ГГУ, 1999. – Вып. 14. – С. 122-126.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Филипова, Е.Е. О продолжении топологии с системы образующих группы до топологии на группе / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 6. – С. 37-41.
2. Филипова, Е.Е. Инверсные полугруппы с топологией / Е.Е. Филипова // Вестник Ижевского государственного технического университета, – 2008. – № 4 (40). – С. 214-215.

Другие публикации

3. Филипова, Е.Е. Некоторые свойства *n*-групп / Е.Е. Филипова // Современная математика и математическое образование в вузах и школах России: опыт, тенденции, проблемы. Межвузовский сборник научно-методических работ. – Вологда: ВГПУ, 2006. – С. 38-40.
4. Филипова, Е.Е. Некоторые свойства бинарных и *n*-арных полугрупп с топологией / Е.Е. Филипова // Материалы ежегодных смотров-сессий аспирантов и молодых ученых по отраслям наук: Естественные и физико-математические науки. – Вологда, 2007. – С. 139-147.
5. Филипова, Е.Е. Некоторые свойства инверсных полугрупп с топологией / Е.Е. Филипова // Сборник трудов участников VI Межвузовской конференции молодых ученых. – Череповец: ЧГУ, 2005. – С. 169-171.
6. Филипова, Е.Е. О непрерывности операций в алгебраических системах, наделенных топологией / Е.Е. Филипова // Сборник трудов участников IV Межвузовской конференции молодых ученых. Череповец: ЧГУ, 2003. – С. 224-226.
7. Филипова, Е.Е. О применении теоремы Эллиса к полугруппам с топологией / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 3-й Межд. науч.-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2005. – С. 96-98.
8. Филипова, Е.Е. О продолжении топологий с некоторых подмножеств групп до топологии на группе, согласованной с групповой операцией / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ, СУБД и систем искусственного интеллекта: Материалы 2-й Межд. науч.-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2003. – С. 178-181.

9. Филипова, Е.Е. О разбиении n-полугрупп с топологией на семейство открыто-замкнутых левых идеалов / Е.Е. Филипова // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта: Материалы 4-й межд. научно-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2007. – С. 236-238.
10. Филипова, Е.Е. О топологических свойствах отображений $(x, y) \mapsto (x, xy)$ и $(x, y) \mapsto (xy, y)$ в полугруппах с топологией / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Научный журнал. Вестник Череповецкого государственного университета: ЧГУ, 2004. – № 2. – С. 131-133.
11. Филипова, Е.Е. Полугруппы с локально компактной топологией / Е.Е. Филипова // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й Региональной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 94-99.
12. Филипова, Е.Е. Топологические n-полугруппы, являющиеся производными от бинарных полугрупп / В.В. Мухин, Е.Е. Филипова // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта: Материалы 5-й Межд. науч.-техн. конф. Вологда: ВоГТУ, 2009. – С. 192-195.