

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БРАГИН Виталий Олегович

**АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНТРПРИМЕРОВ К  
ПРОБЛЕМАМ АЙЗЕРМАНА И КАЛМАНА**

05.13.18 - Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2010

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители: член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

кандидат физико-математических наук,  
доцент КУЗНЕЦОВ Николай Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор технических наук,  
ведущий научный сотрудник  
АНДРИЕВСКИЙ Борис Ростиславич  
(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем машиноведения РАН)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет

Защита состоится “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2010 г. в \_\_\_ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Даугавет И. К.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации разработаны алгоритмы построения контрпримеров к гипотезам Айзермана и Калмана, основанные на обобщенном методе В.А. Плисса, численных методах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и прикладной теории бифуркаций.

**Актуальность темы.** Проблемы Айзермана и Калмана играют центральную роль в теории автоматического управления. Их исследованию и обсуждению посвящены работы И.Г. Малкина, Н.П. Еругина, Н.Н. Красовского, В.А. Плисса, Г.А. Леонова, Е. Нолдуса, Р.Е. Фиттса, Н.Е. Барабанова, Дж. Либре. Однако, если решение проблемы Айзермана для многих классов динамических систем является достаточно полным, то по проблеме Калмана имеются только отдельные частные результаты. Поэтому разработка и реализация алгоритмов построения контрпримеров к проблеме Калмана является актуальной задачей.

**Цель работы.** Целью данной работы является разработка алгоритмов построения контрпримеров к гипотезам Айзермана и Калмана с использованием аналитических и численных методов исследования колебаний динамических систем, современных вычислительных средств и специализированных математических пакетов.

**Методы исследования.** Методы исследования включают обобщенный метод В.А. Плисса и численные методы построения решений нелинейных динамических систем. Разработанный многошаговый метод поиска периодических колебаний реализован в пакете Matlab.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

- Оценка частоты и амплитуды периодических решений многомерных систем дифференциальных уравнений специального вида обобщенным методом В.А. Плисса.
- Разработка алгоритмов поиска периодических решений для систем удовлетворяющих обобщенным условиям Рауса-Гурвица.

- Выделение классов систем, для которых проблемы Айзермана и Калмана имеют отрицательное решение.

**Достоверность результатов.** Все полученные аналитические результаты математически строго доказаны. Разработанные в диссертации алгоритмы дают для систем, рассмотренных в работах Дж. Либре и Р.Е. Фиттса такие же результаты, как у этих известных авторов.

**Научная новизна.** Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

**Теоретическая и практическая ценность.** Разработанные в диссертации методы позволяют производить эффективный поиск колебаний в нелинейных динамических системах, которые удовлетворяют условиям гипотез Айзермана и Калмана.

**Апробация работы.** Результаты данной работы докладывались на международных конференциях “IFAC Workshop Periodic Control Systems” (Турция, Анталья – 2010), конференция памяти В.Я. Ривкинда (Финляндия, Ювяскюля, 2010) и на семинарах кафедры прикладной кибернетики (2008 – 2010).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 4 печатных работах, в том числе в 2 статьях.

Статьи [1,2] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

В работах [1–4] соавторам принадлежит постановка задачи. В работах [1–4] диссертанту принадлежат разработка и реализация алгоритмов и компьютерное моделирование.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, трех приложений, списка литературы, включающего 99 наименований, изложена на 118 страницах машинописного текста и содержит 80 рисунков.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** рассматривается система вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^*\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{P}$  – постоянная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{q}, \mathbf{r}$  – постоянные  $n$ -мерные векторы,  $*$  – операция транспонирования,  $\psi(\sigma)$  – дифференцируемая скалярная функция и  $\psi(0) = 0$ .

Для системы (1) рассматриваются известные гипотезы.

В 1949 году М.А. Айзерман выдвинул следующую гипотезу для системы (1): *если для всех  $k \in (\mu_1, \mu_2)$  система (1) с  $\psi(\sigma) = k\sigma$  асимптотически устойчива (матрица  $\mathbf{P} + \mathbf{q}k\mathbf{r}^*$  гурвицева), то система (1), удовлетворяющая свойству*

$$\mu_1\sigma < \psi(\sigma) < \mu_2\sigma \quad \sigma \neq 0, \quad (2)$$

*имеет асимптотически устойчивое в целом нулевое решение.*

Позднее в 1957 году Р.Е. Калман видоизменил условие М.А. Айзермана, выдвинув аналогичную гипотезу с более “жестким” условием на нелинейность  $\psi$ : *если выполнено условие*

$$\mu_1 < \psi'(\sigma) < \mu_2, \quad (3)$$

*то система (1) имеет асимптотически устойчивое в целом нулевое решение.*

**Первая глава** посвящена описанию алгоритма поиска периодических решений для систем удовлетворяющих гипотезам Айзермана и Калмана.

Рассматривается система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^*\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что матрица  $\mathbf{P}_0$  имеет два чисто мнимых собственных значения  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 > 0$ ) и остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части, пусть для всех  $k \in (0, \mu_2)$  система (4) с  $\varphi(\sigma) = k\sigma$  асимптотически устойчива. Тогда не умаляя общности систему (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_0 x_2 + b_1 \varphi(x_1 + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_3), \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 + b_2 \varphi(x_1 + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_3), \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{x}_3 + \mathbf{b} \varphi(x_1 + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^{n-2}$ ,  $\mathbf{A}$  — постоянная  $(n-2) \times (n-2)$ -матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — постоянные  $(n-2)$ -мерные векторы,  $b_1$  и  $b_2$  — некоторые числа.

Введем в рассмотрение функцию  $\varphi^0(\sigma)$

$$\varphi^0(\sigma) = \begin{cases} \mu\sigma, & \forall |\sigma| \leq \delta; \\ f(\sigma), & \forall \sigma : \delta < |\sigma| \leq \varepsilon; \\ \text{sign}(\sigma)M\varepsilon^3, & \forall |\sigma| > \varepsilon. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $\mu < \mu_2$ ,  $M$  — некоторые положительные числа,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  — малые положительные параметры, такие что  $0 < \varepsilon - \delta < \delta^2$ ,

$$f(\sigma) = \nu_1((\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon)^2)(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta) + \nu_2((\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta)^2)(\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon) + \nu_3(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta) + \nu_4(\sigma),$$

где

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\mu - \nu_3}{(\varepsilon - \delta)^2}, \\ \nu_2 &= \frac{-\nu_3}{(\varepsilon - \delta)^2}, \\ \nu_3 &= \frac{M\varepsilon^3 - \mu\delta}{\varepsilon - \delta}, \\ \nu_4(\sigma) &= \text{sign}(\sigma)\mu\delta. \end{aligned}$$

Отметим здесь, что функция  $f(\sigma)$  выбрана таким образом, что  $\varphi^0(\sigma)$  является дифференцируемой. График функции  $\varphi^0(\sigma)$  изображен на рисунке Рис. 1.

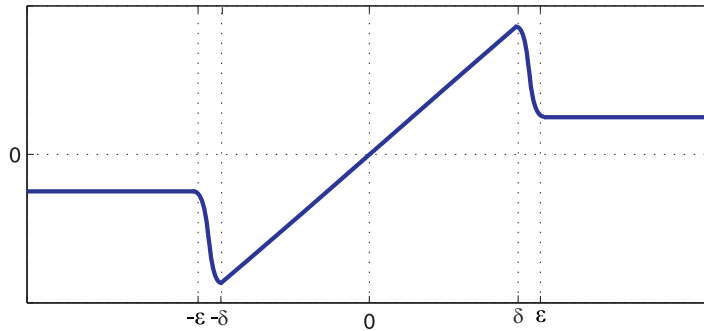


Рис. 1. График функции  $\varphi^0(\sigma)$

Далее доказана следующая теорема

**Теорема 1.** *Если выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} b_1 &< 0, \\ 0 &< \mu b_2 \omega_0 (\mathbf{c}^* \mathbf{b} + b_1) + b_1 \omega_0^2, \end{aligned}$$

то для достаточно малого  $\varepsilon$  система (5) с нелинейностью (6) имеет периодическое решение, удовлетворяющее соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\sin(\omega_0 t) x_2(0) + O(\varepsilon), & \mathbf{x}_3(t) &= \mathbf{O}(\varepsilon), \\ x_2(t) &= \cos(\omega_0 t) x_2(0) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} x_1(0) &= O(\varepsilon^2), & \mathbf{x}_3(t) &= \mathbf{O}(\varepsilon^2), \\ x_2(0) &= -\sqrt{\frac{\mu(\mu b_2 \omega_0 (\mathbf{c}^* \mathbf{b} + b_1) + b_1 \omega_0^2)}{-3\omega_0^2 M b_1}} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом можно показать, что траектории с близкими начальными данными мало отличаются от указанного периодического решения.

Для построения алгоритма поиска периодического решения вводится конечная последовательность дифференцируемых функций

$$\begin{aligned} \varphi^j(\sigma) &= \begin{cases} \mu\sigma, & \forall |\sigma| \leq \delta_j; \\ f^j(\sigma), & \forall \sigma : \delta_j < |\sigma| \leq \varepsilon_j; \\ \text{sign}(\sigma) M \varepsilon_j^3, & \forall |\sigma| > \varepsilon_j \end{cases} \\ \varepsilon_j &= \frac{j}{m} \sqrt{\frac{\mu}{M}}, \quad \delta_j = \varepsilon_j - \frac{\varepsilon_1^2}{4} \end{aligned} \quad (9)$$

где  $j = 0, 1, \dots, m$ ;

$$\begin{aligned} f^j(\sigma) &= \nu_{1j}((\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon_j)^2)(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_j) + \nu_{2j}((\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_j)^2)(\sigma - \\ & - \text{sign}(\sigma)\varepsilon_j) + \nu_{3j}(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_j) + \nu_{4j}(\sigma), \end{aligned}$$

$$\nu_{1j} = \frac{\mu - \nu_{3j}}{(\varepsilon_j - \delta_j)^2},$$

$$\nu_{2j} = \frac{-\nu_{3j}}{(\varepsilon_j - \delta_j)^2},$$

$$\nu_{3j} = \frac{M\varepsilon_j^3 - \mu\delta_j}{\varepsilon_j - \delta_j},$$

$$\nu_{4j}(\sigma) = \text{sign}(\sigma)\mu\delta_j.$$

Будем выбирать  $m$  так, чтобы графики функций  $\varphi^j$  и  $\varphi^{j+1}$  мало отличались друг от друга. Функция  $\varphi^0$  имеет вид (6).

Теорема 1 позволяет определить близкое к гармоническому периодическое решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t)$  системы

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\varphi^j(\mathbf{r}^*\mathbf{x}) \quad (10)$$

с  $j = 0$ . Все точки этого периодического решения либо расположены в области притяжения устойчивого решения  $\mathbf{x}^1(t)$  системы (10) с  $j = 1$ , либо при переходе от системы (10) с  $j = 0$  к системе (10) с  $j = 1$  наблюдается бифуркация потери устойчивости и исчезновения периодического решения. В первом случае можно численно определить  $\mathbf{x}^1(t)$ , выпуская траекторию системы (10) с  $j = 1$  из начальной точки  $\mathbf{x}^0(0)$ .

Стартуя из точки  $\mathbf{x}^0(0)$ , вычислительная процедура после переходного процесса выходит на периодическое решение и вычисляет его. Для этого промежуток  $[0, T]$ , на котором происходит вычисление, должен быть достаточно большим.

После вычисления  $\mathbf{x}^1(t)$  можно перейти к следующей системе (10) с  $j = 2$  и организовать аналогичную процедуру вычисления периодического решения  $\mathbf{x}^2(t)$ , выпуская из начальной точки  $\mathbf{x}^2(0) = \mathbf{x}^1(T)$  траекторию, которая при возрастании  $t$  приближается к периодической траектории  $\mathbf{x}^2(t)$  (либо здесь наблюдается бифуркация потери устойчивости и исчезновения периодического решения).

Продолжая эту процедуру далее и последовательно вычисляя периодические решения  $\mathbf{x}^j(t)$ , используя траектории системы (10) с начальными данными  $\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{x}^{j-1}(T)$ , либо приходим к вычислению периодического решения системы (10) с  $j = m$ , либо на некотором шаге наблюдаем бифуркацию исчезновения периодического решения и останавливаем алгоритм.

Предположим, что нами вычислено периодическое решение  $\mathbf{x}^m(t)$  системы (10) с функцией  $\varphi^m(\sigma)$  которая является неубывающей и дифференцируемой. Далее рассматриваются два возможных варианта построения контрпримеров к гипотезе Калмана.



В первом случае можно организовать аналогичную вычислительную процедуру для последовательности систем с дифференцируемыми нелинейностями

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q} \psi^i(\mathbf{r}^* \mathbf{x}), \quad (11)$$

где  $i = 0, \dots, h$ ,  $\psi^0(\sigma) = \varphi^m(\sigma)$  и

$$\psi^i(\sigma) = \begin{cases} \mu\sigma, & \forall |\sigma| \leq \delta_m; \\ g^i(\sigma), & \forall \sigma : \delta_m < |\sigma| \leq \varepsilon_m; \\ i(\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon_m)N + \text{sign}(\sigma)\mu\varepsilon_m, & \forall |\sigma| > \varepsilon_m. \end{cases} \quad (12)$$

где

$$g^i(\sigma) = \nu_{1i}((\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon_m)^2)(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_m) + \nu_{2i}((\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_m)^2)(\sigma - \text{sign}(\sigma)\varepsilon_m) + \nu_{3i}(\sigma - \text{sign}(\sigma)\delta_m) + \nu_{4i}(\sigma),$$

$$\nu_{1i} = \frac{\mu - \nu_{3i}}{(\varepsilon_m - \delta_m)^2},$$

$$\nu_{2i} = \frac{iN - \nu_{3i}}{(\varepsilon_m - \delta_m)^2},$$

$$\nu_{3i} = \frac{M\varepsilon_m^3 - \mu\delta_m}{\varepsilon_m - \delta_m},$$

$$\nu_{4i}(\sigma) = \text{sign}(\sigma)\mu\delta_m.$$

Здесь  $N$  – некоторый положительный параметр, такой что  $hN < \mu_2$ . Стоит отметить здесь, что  $(\psi^i(\sigma))' > 0$  при  $i = 1, \dots, h$ .

Нахождение периодических решений  $\mathbf{x}^i(t)$  системы (11) дает при каждом  $i = 1, \dots, h$  некоторый контрпример к гипотезе Калмана.

Во втором случае можно организовать аналогичную процедуру для последовательности систем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q} \theta^i(\mathbf{r}^* \mathbf{x}), \quad (13)$$

где  $i = 0, 1, \dots, s$ ,  $\theta^0(\sigma) = \varphi^m(\sigma)$  и

$$\theta^i(\sigma) = \varphi^m(\sigma) + (g(\sigma) - \varphi^m(\sigma))\gamma^i \quad (14)$$

Здесь  $\gamma^0 = 0$ ,  $\gamma^1 = 1/s$ ,  $\gamma^2 = 2/s$ , ...,  $\gamma^s = 1$ ;  $g(\sigma)$  – функция удовлетворяющая условию (3). В результате при  $\gamma^s = 1$  получаем систему с нелинейностью  $g(\sigma)$ .

**Вторая глава** на основе разработанных алгоритмов производится построение контрпримеров к проблемам Айзермана и Калмана для конкретных систем.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - 10\varphi(x_1 - 10.1x_3 - 0.1x_4) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 10.1\varphi(x_1 - 10.1x_3 - 0.1x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - x_4 + \varphi(x_1 - 10.1x_3 - 0.1x_4)\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь  $\varphi$ —скалярная дифференцируемая нелинейность, при  $\varphi(\sigma) = k\sigma$  асимптотическая устойчивость линейной системы (15) имеет место для  $k \in (0, 9.9)$ , и для нелинейности  $\varphi(\sigma) = \varphi^0(\sigma)$  с достаточно малым  $\varepsilon$  по вышеизложенной теореме существует периодическое решение.

Используя вышеизложенный алгоритм можно последовательно строить периодические решения. Возьмем  $\mu = M = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\delta_1 = 0.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\delta_2 = 0.15$ , ...,  $\varepsilon_{10} = 1$ ,  $\delta_{10} = 0.95$  и будем для  $j = 1, \dots, 10$  последовательно строить решения системы (15), полагая нелинейность  $\varphi(\sigma)$  равной  $\varphi^j(\sigma)$  согласно (9). Здесь для всех  $\varepsilon_j$ ,  $\delta_j$ ,  $j = 1, \dots, 10$  будут существовать периодические решения.

Начальные данные периодического решения на первом шаге при  $j = 0$  согласно теореме имеют вид:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= O(\varepsilon), \quad x_3(0) = O(\varepsilon), \quad x_4(0) = O(\varepsilon), \\ x_2(0) &= -1.7513 + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Поэтому при  $j = 1$  выпускаем траекторию  $\mathbf{x}^1(t)$  из точки  $x_1(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1.7513$ . Рассмотрим траекторию  $\mathbf{x}^1(t)$  на большом временном промежутке. Конечная точка траектории  $\mathbf{x}^1(T)$  берется как начальные данные для вычисления периодического решения при  $j = 2$ .

График нелинейности  $\varphi^1(\sigma)$ , проекция траектории решения на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы  $\mathbf{r}^*\mathbf{x}(t) = x_1(t) - 10.1x_3(t) - 0.1x_4(t)$  при  $j = 1$  изображены на Рис. 2.

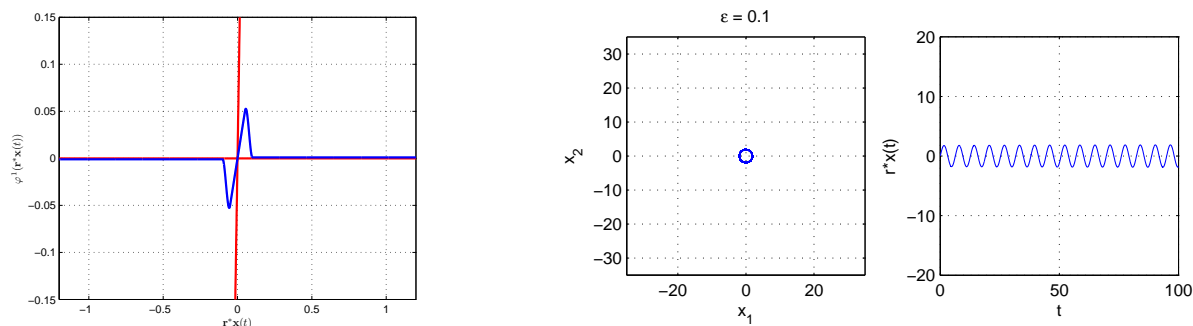


Рис. 2. График нелинейности  $\varphi^1(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\delta_1 = 0.0975$ .

Здесь видно, что после переходного процесса происходит выход на периодическое решение.

Продолжая эту процедуру при  $j = 2, \dots, 10$  последовательно приближаем периодическое решение системы (15) при  $\varepsilon_{10} = 1$ ,  $\delta_{10} = 0.95$ . На Рис. 3, 4 и 5 изображены периодические решения для  $j = 4$ ,  $j = 8$  и  $j = 10$  соответственно.

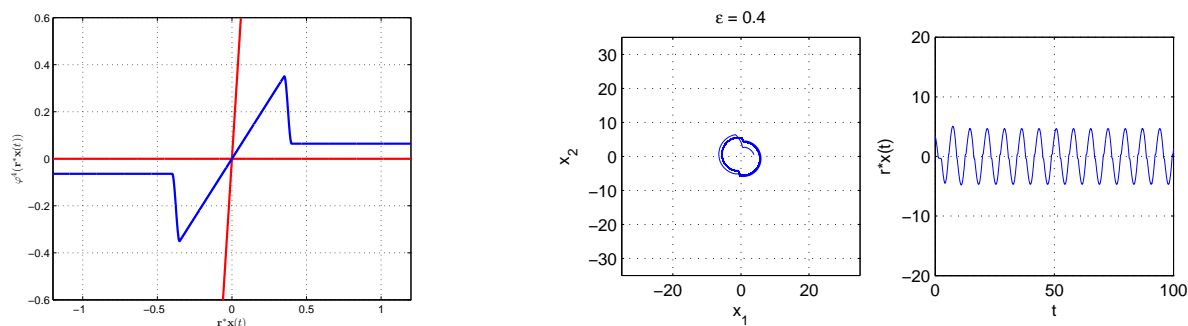


Рис. 3. График нелинейности  $\varphi^4(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\varepsilon_4 = 0.4$ ,  $\delta_4 = 0.3975$ .

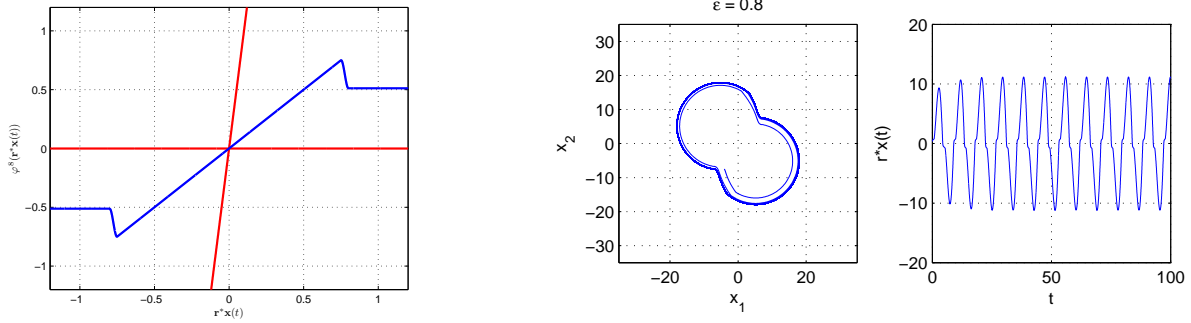


Рис. 4. График нелинейности  $\varphi^8(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\varepsilon_8 = 0.8$ ,  $\delta_8 = 0.7975$ .

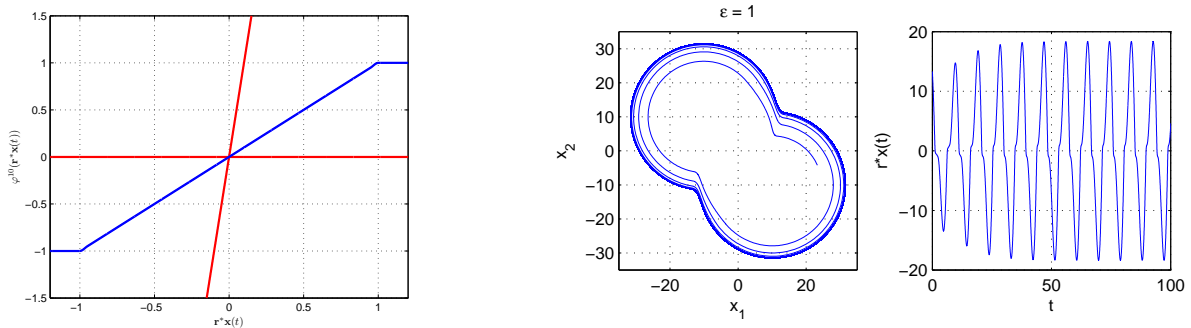


Рис. 5. График нелинейности  $\varphi^{10}(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\varepsilon_{10} = 1$ ,  $\delta_{10} = 0.9975$ .

Заметим, что при  $\varepsilon_{10} = 1$  нелинейность  $\varphi_{10}(\sigma)$  является неубывающей.

Отметим здесь, что если вместо последовательного увеличения  $\varepsilon_j$  вычислять решение с начальными данными согласно (8) при  $\varepsilon = 1$ , то решение "сорвется" к нулю.

Продолжим далее последовательное построение периодических решений для системы (15), заменив нелинейность  $\varphi(\sigma)$  на строго возрастающую функцию  $\psi^i(\sigma)$  (11), где  $\mu = 1, \varepsilon_m = 1, N = 0.01$ , при  $i=1, \dots, 5$ . Начальные данные при  $i = 1$  берутся согласно алгоритму в виде  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{10}(T)$ .

Полученные периодические решения изображены на Рис. 6 и 7 при  $i = 1$  и  $i = 5$  соответственно.

Заметим, что при вычисление решения при  $i = 6$  происходит исчезновение периодического решения Рис. 8.

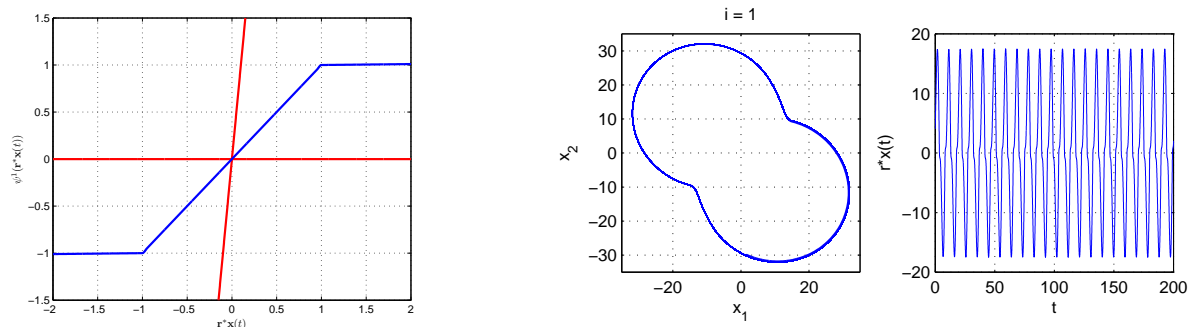


Рис. 6. График нелинейности  $\psi^1(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $i = 1$

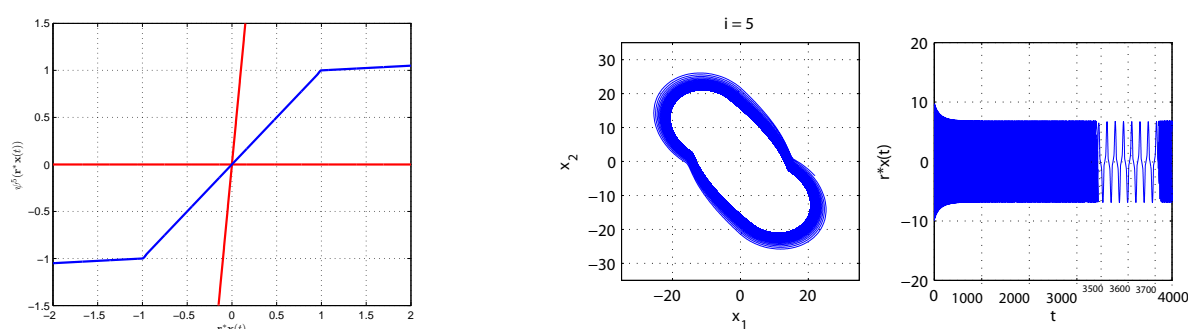


Рис. 7. График нелинейности  $\psi^5(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $i = 5$

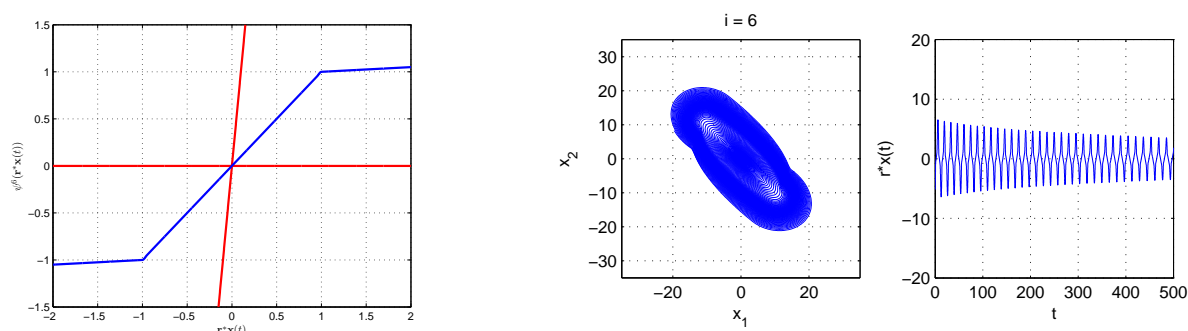


Рис. 8. График нелинейности  $\psi^6(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $i = 6$

Теперь вместо введения функций  $\psi^i$  будем строить периодических решений для системы (15), заменив нелинейность  $\varphi(\sigma)$  на функцию  $\theta^i(\sigma) = \varphi^{10}(\sigma) + (\tanh(\sigma) - \varphi^{10}(\sigma))\gamma^i$ , где  $i = 1, \dots, 10$ ,  $\gamma^1 = 0.1$ ,  $\gamma^2 = 0.2, \dots, \gamma^{10} = 1$ .

Стартуя при  $i = 1$  из точки  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{10}(T)$  находим периодическое

решение. Результат работы данного алгоритма изображен на Рис. 9-12.

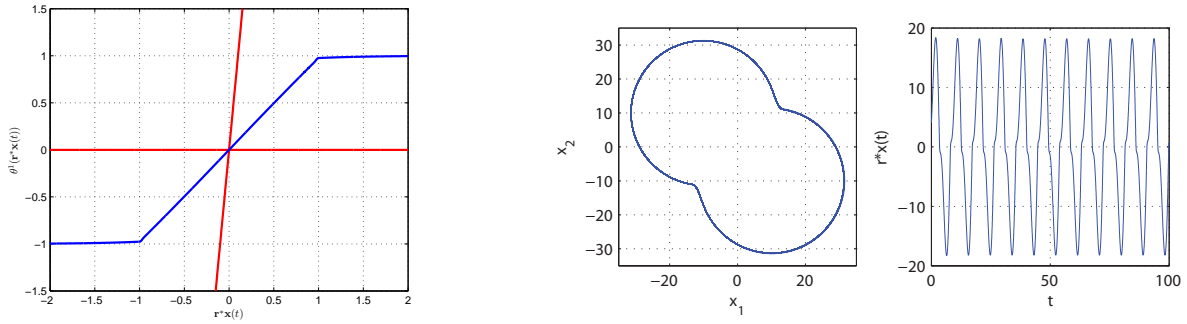


Рис. 9. График нелинейности  $\theta^1(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\gamma_1 = 0.1$

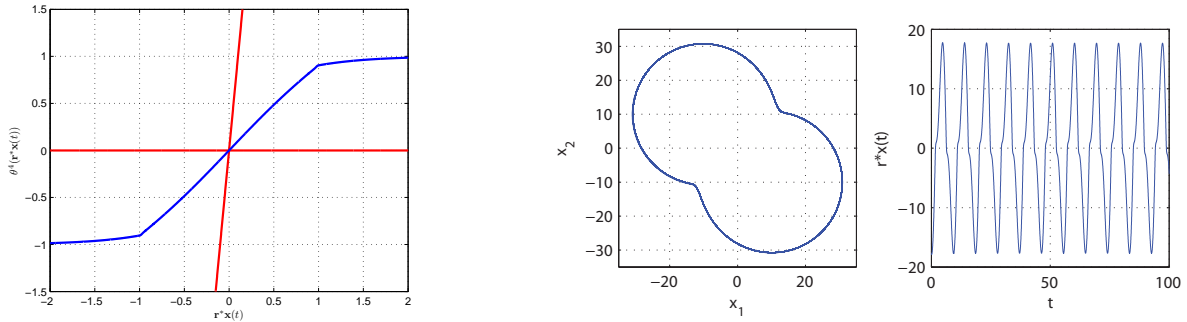


Рис. 10. График нелинейности  $\theta^4(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\gamma_4 = 0.4$

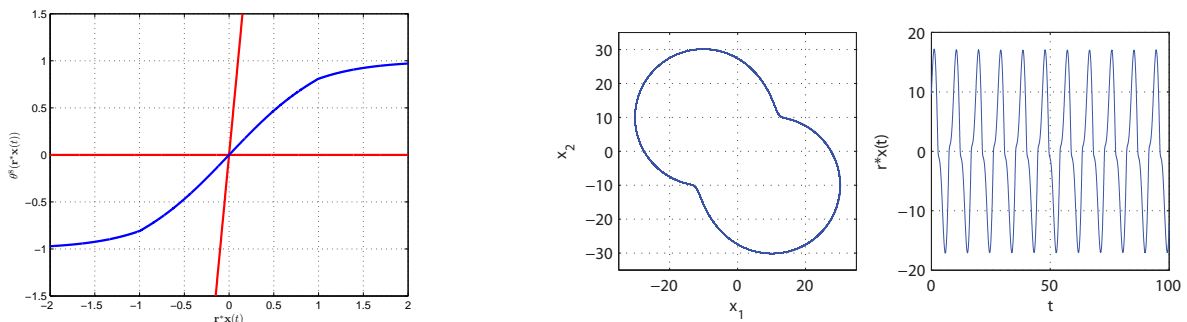


Рис. 11. График нелинейности  $\theta^8(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\gamma_8 = 0.8$

Таким образом здесь получено периодическое решение для системы с нелинейностью  $\theta^{10}(\sigma) = \tanh(\sigma)$ .

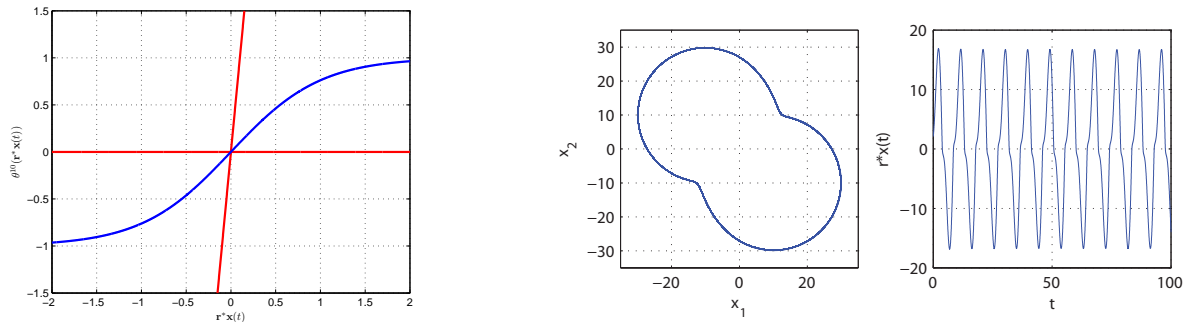


Рис. 12. График нелинейности  $\theta^{10}(\sigma)$ , проекция траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$  и выход системы при  $\gamma_{10} = 1$

**Приложения.** В Приложении 1 представлен компьютерный код построения периодических решений для систем Фиттса, Барабанова и Либре.

В Приложении 2 представлен компьютерный код алгоритма поиска периодических решений для двух динамических систем.

В Приложении 3 представлен компьютерный код алгоритма поиска периодических решений для систем Барабанова и Либре.

### Публикации по теме диссертации.

#### Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Леонов Г.А., Брагин В.О., Кузнецов Н.В., Алгоритм построения контрпримеров к проблеме Калмана // Доклады Академии наук, 2010, сер. Математика, Том 433, Вып. 2, С. 1–4

2. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Брагин В.О., О проблемах Айзермана и Калмана // Вестник С.-Петербург. ун-та, 2010, Сер. 1, Вып. 3, С. 31-47.

#### Другие публикации:

3. Bragin V.O., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Algorithm for construction of counterexamples to Aizerman's and Kalman's conjectures // Abstracts of the International Conference "PSYCO2010", 2010, Antalya, Turkey, p. 7.

4. Bragin V.O., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Vagaitsev V.I., Analytical-Numerical Methods for the Localization of Hidden Oscillations: Aizerman and Kalman Problems, Hidden Attractor in Chua Circuits // Abstracts of the International Workshop "Mathematical and Numerical Modelling in Science and Technology", 2010, Jyväskylä, Finland.