

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МОРЩИНИНА Алина Алексеевна

**МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СКЛЕРЫ И СОСУДОВ
ЗРИТЕЛЬНОГО НЕРВА ПРИ ГЛАУКОМЕ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2010

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ДАЛЬ Юрий Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор БАУЭР Светлана Михайловна
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

доктор технических наук, профессор
ГОСПОДАРИКОВ Александр Петрович
(Санкт-Петербургский государственный
горный университет)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Защита состоится “ ___ ” _____ 2010 г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “ ___ ” _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Кустова Е. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Глаукома – одно из опаснейших глазных заболеваний. По самым приблизительным подсчетам не менее 70 миллионов людей во всем мире страдают этим недугом. Несмотря на интенсивные исследования, направленные на разработку методов его лечения, в 15÷20 % случаев глаукома становится причиной слепоты.

Все существующие ныне теории, пытающиеся объяснить причины и механизм возникновения глаукомы, условно относят к двум концепциям – механической и сосудистой. Обе они появились в конце XIX и в первой половине XX века. Сторонники первой (В. В. Волков, D. Minckler, J. Emery, A. Maumenee и др.) в качестве основной причины заболевания выделяют характерную экскавацию диска зрительного нерва (ДЗН), обусловленную разностью внутриглазного (ВГД) и внутричерепного (ВЧД) давления. Вследствие прогиба ДЗН происходит защемление нервных волокон, которое приводит к нарушению зрительных функций. Согласно этой точке зрения, лечение глаукомы должно быть направлено главным образом на снижение ВГД. Приверженцы второй – сосудистой концепции – (А. П. Нестеров, F. Gafner, H. Goldmann, S. Hayreh и др.) сводят механизм атрофии зрительного нерва при глаукоме к нарушению кровообращения в нём. В этом случае ведущую роль в лечении глаукомы отводят восстановлению кровообращения в сосудах диска зрительного нерва (ДЗН).

В настоящее время опубликовано достаточно много исследований, посвященных математическому моделированию склеры глазного яблока при глаукоме. Прежде всего здесь необходимо отметить работы П. Е. Товстика, С. М. Бауэр, В. Я. Павилайнена и их учеников.

С точки зрения механики деформируемого тела склеру естественно считать сферической оболочкой, нагруженной постоянным внутренним давлением, а сосуды зрительного нерва – тонкостенными цилиндрически-

ми трубками, находящимися под действием внешнего и внутреннего давления.

Поскольку обычная глаукома характеризуется повышенным ВГД, большой интерес приобретает вопрос, насколько правомерно использование при анализе деформации склеры и сосудов зрительного нерва линейных решений соответствующих задач теории упругости. Дело в том, что согласно экспериментам Е. Н. Иомдиной, связь между напряжениями σ и деформациями ε образцов из различных отделов склеры носит ярко выраженный нелинейный характер (рис. 1).

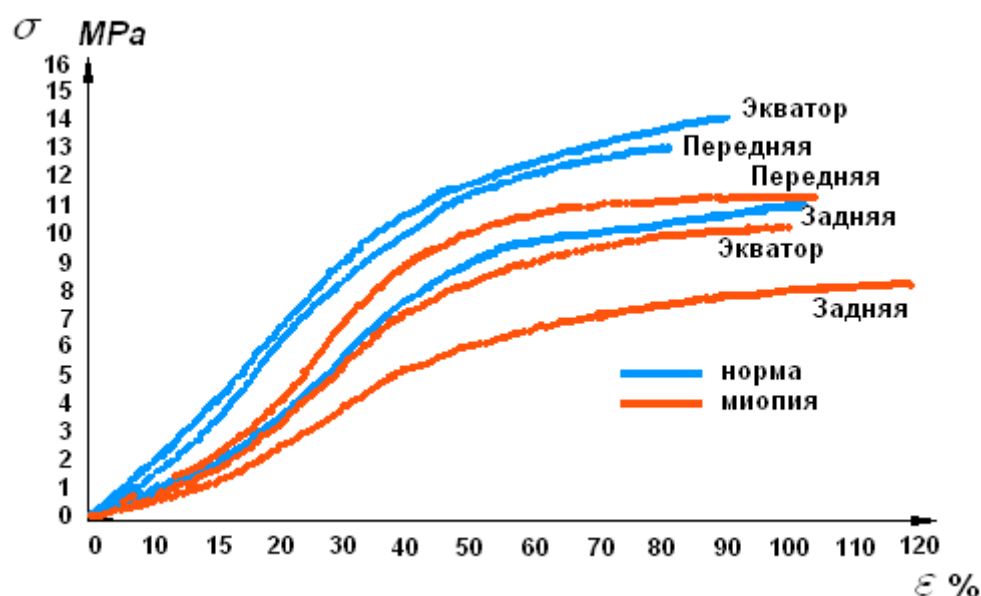


Рис. 1.

Зависимость «напряжение-деформация» различных областей склеры глаз с нормальной и миопической рефракцией.

Как известно, линейное и нелинейное решения одной и той же задачи механики могут существенно различаться между собой. Поэтому особую актуальность приобретают исследования напряженно-деформированного состояния склеры и сосудов зрительного нерва с позиции нелинейной механики деформируемого тела.

В данной работе рассматриваются линейные, геометрически нелинейные, а также физически и геометрически нелинейные модели теории упругости для склеры и сосудов зрительного нерва.

Цель работы состоит в разработке простых нелинейных математических моделей, которые могут непосредственно использоваться в расчетах перемещений и напряжений, возникающих в склере и сосудах зрительного нерва при повышении внутриглазного давления. В ходе выполнения работы были поставлены следующие задачи:

- Рассмотреть упругую сферическую оболочку и тонкостенную упругую цилиндрическую трубку в качестве механических моделей склеры и сосудов зрительного нерва.

- Исследовать влияние геометрической и физической нелинейности принятых моделей на характер распределения напряжений и перемещений в склере и сосудах зрительного нерва.

- Провести специальные экспериментальные исследования с целью качественного анализа их результатов в свете данной диссертационной работы.

Методы исследования. В диссертации применяются решения соответствующих задач, полученных учеными-механиками О. Ламе, В. В. Новожиловым, А. А. Ильюшиным, Л. М. Качановым С. И. Дымниковым, Э. Э. Лавенделом, П. Е. Товстиком, С. М. Бауэр и др., используются результаты исследований офтальмологов: В. В. Волкова, А. П. Нестерова, Ю. С. Астахова, Д. Фламмера и др.

Аналитическими и численными методами найдены геометрически нелинейные решения для склеры (загруженной постоянным внутренним давлением) и сосуда зрительного нерва (находящегося под действием внутреннего и внешнего давления).

Решение физически и геометрически нелинейной задачи для склеры, находящейся под действием постоянного внутреннего давления представлено в терминах истинных деформаций.

Научная новизна. В диссертации получены:

1. Геометрически нелинейное решение центрально симметричной задачи теории упругости для полой толстостенной сферы.
2. Аналитические решения геометрически нелинейных задач для сферической и цилиндрической оболочек (нагруженных внутренним и внешним давлением), в которых учтено изменение толщин оболочек в процессе их деформации.
3. Физически и геометрически нелинейное решение задачи о полой толстостенной сфере и тонкостенной сферической оболочке, нагруженных внутренним давлением.

Достоверность результатов диссертации основана на строгой физической постановке соответствующих задач механики деформируемого тела и корректных математических методах, использованных при их решении. В частных случаях выведенные аналитические зависимости сопоставлялись с аналогичными решениями других авторов.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Аналитические решения геометрически нелинейных задач теории упругости для склеры и сосудов зрительного нерва.
2. Физически и геометрически нелинейное решение для центрально симметричной деформации изотропной склеры (в терминах истинных – логарифмических деформаций).
3. Физически и геометрически нелинейное решение задачи о деформации сосудов зрительного нерва, находящихся под воздействием внутреннего и внешнего давления.
4. Сравнительный анализ линейных, геометрически нелинейных и физически и геометрически нелинейных моделей теории упругости для склеры глазного яблока.

Практическая ценность. Методы построения нелинейных решений для сферической и цилиндрической оболочек представляют интерес для нелинейной механики деформируемого тела. В полученных результатах

учитывается изменение толщины рассматриваемых оболочек в процессе их нагружения. В частных случаях выведенные соотношения переходят в решения соответствующих нелинейных центрально симметричных задач теории упругости для шаровой (круговой) поры в бесконечном континууме (бесконечной плоскости). В выполненных исследованиях предлагаются новые нелинейные модели теории упругости для склеры и сосудов зрительного нерва.

Построенные решения нелинейных уравнений одномерных задач используются в учебном процессе на факультете прикладной математики – процессов управления (в курсе лекций «Компьютерное моделирование пространственно-временных процессов»)

Апробация работы. Отдельные результаты работы докладывались на семинарах кафедры вычислительных методов механики деформированного тела (2007 – 2009 гг.), на Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (2007 г., 2009 г., Санкт-Петербург), на XVI Республиканской научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов по физике конденсированного состояния (23 – 25 апреля 2008 г., г. Гродно, Республика Беларусь), на Международных конференциях «Актуальные проблемы прочности» (1–5 июля 2008 г., Нижний Новгород, 14 – 18 июня 2010 г., Киев), на городском семинаре «Компьютерные методы в механике сплошной среды» (декабрь 2008 г., Санкт-Петербург), на Санкт-Петербургских чтениях по проблемам прочности (13 – 15 апреля 2010 г.). Диссертация в целом докладывалась на семинарах кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела СПбГУ, кафедры высшей математики Горного университета, кафедры сопротивления материалов СПбГТУ (Политехнический университет).

Публикации. По теме диссертации опубликовано восемь работ, две из них [1, 2] в журналах, рекомендованных ВАК. В статье [1], опубликованной в соавторстве, автору принадлежит вывод основных формул и проведение численных расчетов. Соавтору Ю. М. Далю принадлежит общая

постановка задачи.

Поддержка. Исследования диссертанта на различных этапах работы поддерживались грантами РФФИ № 06-01-00171-а, РФФИ № 08-01-00394-а, РФФИ № 10-01-00093-а, НИР факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ «Нелинейная механика твердого деформируемого тела».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложений, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 101 стр., общее количество рисунков и графиков – 33, таблиц – 7, библиография содержит 70 наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой темы, кратко описывается структура диссертации, указываются методы исследования и основные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе описываются основные медицинские аспекты развития глаукоматозного поражения. *Первый параграф* посвящен описанию анатомии глазного яблока. В §2 изложен поэтапно процесс зрения, основные отличительные черты атрофии диска зрительного нерва при глаукоме и, как следствие, нарушения зрительных функций органа зрения. В §3 представлены причины изменения внутриглазного давления, методы и приборы измерения ВГД. Заключительный §4 содержит описание существующих концепций глаукомы.

Во второй главе рассматриваются линейные и нелинейные модели теории упругости для склеры. *Первый параграф* посвящен анализу центрально симметричной задачи линейной теории упругости для изотропной сферы конечной толщины и тонкостенной сферической оболочки, нагруженных постоянным внутренним давлением $p = const$ (рис. 2). Материал сферы (оболочки) считается несжимаемым.

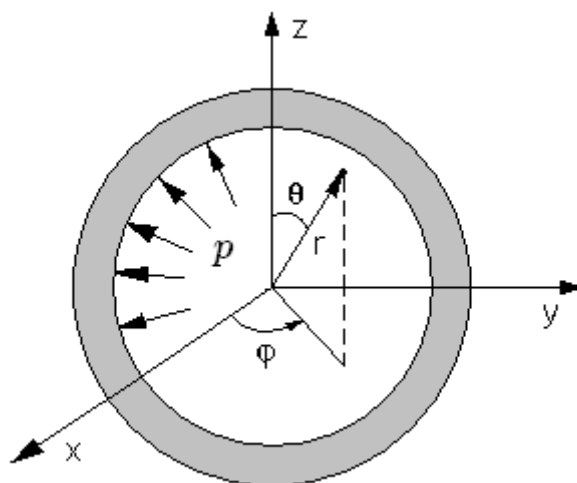


Рис. 2.

Сфера, нагруженная внутренним давлением.

В случае тонкостенной сферической оболочки получены следующие выражения для радиального перемещения $u(r)$ и напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta}$:

$$u(r) = \frac{p(R_*^0)^4}{4E\Delta_0} \frac{1}{r^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_*^0}{3\Delta_0} - \frac{p}{2} - \frac{p(R_*^0)^4}{3\Delta_0} \frac{1}{r^3}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_*^0}{3\Delta_0} - \frac{p}{2} + \frac{p(R_*^0)^4}{6\Delta_0} \frac{1}{r^3}. \quad (3)$$

Здесь R_*^0 и Δ_0 – радиус срединной поверхности и толщина сферической оболочки.

Во *втором параграфе* на основе соотношений (1) – (3) найдено решение геометрически нелинейной задачи для несжимаемой изотропной тонкостенной сферической оболочки:

$$\Delta_* = \Delta_0 \exp\left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right), \quad \tilde{R}_* = R_*^0 \exp\left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right). \quad (4)$$

Здесь Δ_* и \tilde{R}_* – деформированные толщина и радиус срединной поверхности сферической оболочки.

На рис. 3. приведены графики линейного и геометрически нелинейного решений в безразмерных координатах $\hat{s} = \frac{\hat{R}_*}{R_*^0}$, $\tilde{s} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$, $q = \frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}$.

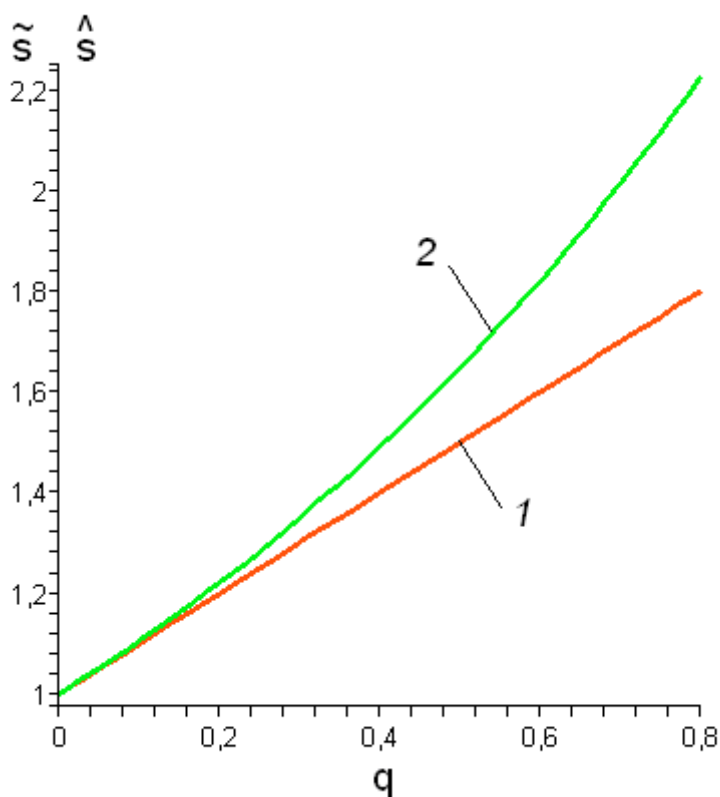


Рис. 3.

Графики $\frac{\hat{R}_*}{R_*^0}$ и $\frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$ в случае линейной и геометрически нелинейной задачи (кривые 1 и 2 соответственно).

Как показали проведенные исследования радиального перемещения и компонент напряжения, геометрически нелинейное решение обнаруживает отличие от линейного при нагрузках превышающих 80 мм рт. ст.

Сравнение полученных результатов с известным решением [С. М. Бауэр и др.], выведенным в случае представления склеры в виде трансверсально-изотропной оболочки, выявило их совпадение вплоть до второго знака после запятой.

В *третьем параграфе* в качестве модели склеры рассматривается изотропная несжимаемая сфера конечной толщины. Здесь решение получено численно.

В *четвертом параграфе* приводится решение физически и геометрически нелинейной задачи для поллой сферы конечной толщины и тонкостенной сферической оболочки. Считается, что напряжения и деформации в склере связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_i = F(\varepsilon_i), \quad \sigma_{rr} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr})^2}, \\ \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\sigma_i = F(\varepsilon_i) = f(r)$ – нелинейный закон упругого деформирования.

Истинные деформации склеры определялись следующими формулами:

$$\varepsilon_{rr} = \ln\left(1 + \frac{du}{dr}\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \ln\left(1 + \frac{u}{r}\right). \quad (6)$$

В диссертации выведено уравнение для радиальных перемещений точек склеры:

$$u = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3} - r, \quad (7)$$

где α – произвольная постоянная интегрирования.

В соответствии с краевыми условиями $\sigma_{rr}(R_1) = -p$, $\sigma_{rr}(R_2) = 0$ и выбранным видом обобщенной кривой: $\sigma_i = A\varepsilon_i^{\frac{1}{n}}$ ($A = const$, $n = const$, $n \geq 1$), в диссертации показано, что

$$\alpha^3 = \frac{3\Delta^3}{16} \left(\frac{p}{2A \ln \frac{R_2}{R_1}} \right)^n - \text{ для сферы конечной толщины.}$$

$$\alpha^3 = \frac{3\Delta^3}{16} \left(\frac{p}{2A \frac{\Delta}{R_1}} \right)^n \quad \text{— для тонкостенной сферической оболочки.}$$

Принимая для склеры $R_1 = 11,75 \text{ мм}$, $R_2 = 12,25 \text{ мм}$, $\Delta = 0,5 \text{ мм}$, $r = 12 \text{ мм}$ и $\sigma_i = 7\varepsilon_i^{\frac{1}{2}}$, приведем график зависимости $u = f(p)$ — рис. 4.

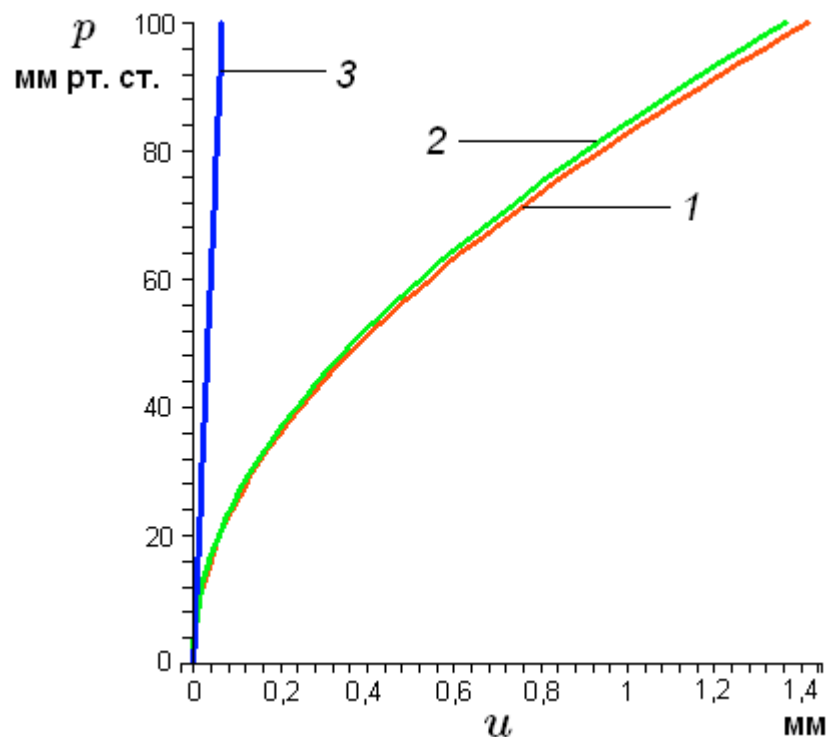


Рис. 4.

Радиальные перемещения склеры u в зависимости от величины внутриглазного давления p . Кривая 1 соответствует нелинейной модели склеры в виде сферы конечной толщины. Кривая 2 — нелинейной модели склеры в виде тонкостенной оболочки. Кривая 3 — линейное решение.

Из приведенного графика следует, что в диапазоне $15 \text{ мм рт. ст.} \leq p \leq 60 \text{ мм рт. ст.}$ линейное решение качественно отличается от геометрически и физически нелинейных решений 1 и 2.

В третьей главе исследуются линейные и нелинейные модели теории упругости для сосудов зрительного нерва. В *первом параграфе* дается решение классической задачи теории упругости для изотропного кругового цилиндра, материал которого считается несжимаемым.

Поскольку толщина сосуда зрительного нерва много меньше его внутреннего и внешнего радиусов, в качестве модели СЗН можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку. Тогда, как показано в диссертации,

$$u(r) = -\frac{3(p_2 - p_1)(R_*^0)^3}{4Erh_0},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_2 - p_1)(R_*^0)^3}{2h_0r^2} - \frac{R_*^0(p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0(p_2 - p_1)}{8R_*^0},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{(p_2 - p_1)(R_*^0)^3}{2h_0r^2} - \frac{R_*^0(p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0(p_2 - p_1)}{8R_*^0},$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{R_*^0(p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0(p_2 - p_1)}{8R_*^0}.$$

Здесь R_*^0 , h_0 – начальные значения радиуса срединной поверхности и толщины цилиндрической трубки; p_1 и p_2 – соответственно внутреннее и внешнее давление; E – модуль Юнга материала.

Во *втором параграфе* приводится решение геометрически нелинейной задачи теории упругости для цилиндрической трубки:

$$\tilde{R}_* = R_*^0 \exp\left(-\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0}\right), \quad \tilde{h} = h_0 \exp\left(\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0}\right).$$

Решению физически и геометрически нелинейной задачи теории упругости для полого кругового цилиндра посвящен *третий параграф*. Здесь связь между напряжениями и деформациями дается формулами типа (5), записанными в цилиндрических координатах.

Истинные деформации определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_{rr} = \ln\left(1 + \frac{du}{dr}\right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \ln\left(1 + \frac{u}{r}\right).$$

В работе показано, что координата произвольной точки сосуда зрительного нерва после деформации r_* удовлетворяет следующей зависимости $r_* = \sqrt{r^2 + 2\alpha^2}$. Отсюда $u = \sqrt{r^2 + 2\alpha^2} - r$, где постоянная α при соответствующих граничных условиях $\sigma_{rr}(R_1) = -p_1$, $\sigma_{rr}(R_2) = -p_2$ в случае, когда $\sigma_i = A\varepsilon_i^{\frac{1}{n}}$ ($A = const, n = const$), определяется следующим образом:

$$\alpha^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)}{2A \ln \frac{R_2}{R_1}} \right)^n \text{ — для СЗН конечной толщины,}$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)}{2A \frac{\Delta}{R_1}} \right)^n \text{ — для тонкостенного сосуда зрительного нерва.}$$

В четвертой главе помещены экспериментальные исследования по определению механических свойств резиновых оболочек, моделирующих склеру и роговицу глазного яблока.

Приложение I посвящено построению математических моделей введения газовой смеси в стекловидное тело. В §1 излагается геометрически нелинейное решение соответствующей задачи теории упругости. *Второй параграф* содержит физически и геометрически нелинейное решение поставленной задачи.

В приложении II приводится решение геометрически нелинейной центрально симметричной задачи для полой толстостенной сферы при различных значениях её толщины.

Основные результаты и выводы

В диссертации исследовано напряженно-деформированное состояние склеры и сосудов зрительного нерва (СЗН) при глаукоме. Получены линейные, геометрически нелинейные и физически и геометрически нелинейные решения соответствующих задач линейной и нелинейной теории

упругости. Выведены соотношения для определения радиального перемещения $u(r)$ и напряжений в склере и сосудах зрительного нерва. Проведенный анализ позволил сделать следующие выводы:

1. Рост внутриглазного давления приводит к сужению сосудов зрительного нерва, что вызывает нарушение кровотока и их закупорку. Наступающая в этой ситуации атрофия СЗН приводит к характерной экскавации диска зрительного нерва.
2. Сопоставление линейных и нелинейных решений соответствующих моделей позволяет говорить о целесообразности применения соотношений линейной теории упругости для определения напряженно-деформированного состояния склеры и сосудов зрительного нерва в диапазоне $15 \text{ мм рт. ст.} \leq \text{ВГД} \leq 70 \text{ мм рт. ст.}$
3. Решение геометрически нелинейных задач для склеры и сосудов зрительного нерва обнаруживает отличие от линейных решений при ВГД, превышающих 80 мм рт. ст.
4. Решения, полученные для склеры (по моделям тонкостенной сферической оболочки и сферы конечной толщины), практически не отличаются между собой (при значениях параметров глазного яблока $R_* \approx 11,2$, $0,5 \text{ мм} \leq \Delta \leq 0,7 \text{ мм}$).
5. С ростом давления до 70 мм рт. ст. толщина склеры уменьшается незначительно (порядка 5%), что хорошо соотносится с данными медицинских исследований.
6. Величина перемещений склеры, определенная по физически и геометрически нелинейной модели (рис. 4), существенно отличается от аналогичных значений, вычисленных по линейной модели.
7. Полученные математические решения соответствующих нелинейных задач могут быть распространены на области больших деформаций сферических и цилиндрических оболочек.

Публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Даль Ю. М., Морщанина А. А. Линейные и нелинейные математические модели склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме // Вестник СПбГУ, сер. 10, 2008. Вып. 3. С. 47–55.
2. Морщанина А. А. Нелинейная осесимметричная задача теории упругости для поллой сферы // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2009. Вып. 4. С. 84 – 88.

Другие публикации:

3. Морщанина А. А. Нелинейная осесимметричная задача теории упругости для сферической оболочки. // Сборник докладов научной конференции студентов и аспирантов Гродненского государственного университета. Гродно, 2008. С. 78 – 79.
4. Морщанина А. А. О больших осесимметричных деформациях сферических изотропных оболочек. // Материалы конференции «Актуальные проблемы прочности», Нижний Новгород, 2008, ч.2. С. 371 – 374.
5. Морщанина А. А. К вопросу о математическом моделировании глаукомы // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2008–2009. С. 76–97.
6. Морщанина А. А. Нелинейная осесимметричная деформация сферической оболочки и полого кругового цилиндра // Тезисы докладов V международной конференции по механике «Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 2009. С. 178.
7. Морщанина А. А. Большие осесимметричные деформации сферических оболочек (геометрическая сторона вопроса) // Материалы конференции «Петербургские чтения по проблемам прочности», Санкт-Петербург, 2010 (апрель). С. 312 – 314.
8. Морщанина А. А. О деформациях и напряжениях толстостенной нелинейно упругой сферы (теория и приложения) // Материалы конференции «Актуальные проблемы прочности», Киев, 2010 (июнь). С. 225.