Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Всемирнов Максим Александрович

ГУРВИЦЕВОСТЬ И (2,3)-ПОРОЖДЕННОСТЬ МАТРИЧНЫХ ГРУПП МАЛЫХ РАНГОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2009

Работа выполнена в лаборатории математической логики Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ВИНБЕРГ Эрнест Борисович (Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова)
	доктор физико-математических наук, профессор ВАВИЛОВ Николай Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет)
	доктор физико-математических наук, доцент ВДОВИН Евгений Петрович (Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН)
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится «___»__________20__г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Университетская наб., 7/9.

Защита будет проходить в Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311.

Автореферат разослан «___»___________2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М.Нежинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертационная работа относится к исследованиям по теории $(2,3)$-порожденных и гурвицевых групп. Эта область теории групп зародилась еще в XIX веке в работах Ф. Клейна, Р. Фрике, А. Гурвица и сохранила свою актуальность до настоящего времени. Интерес к $(2,3)$-порожденным группам объясняется их связью с факторгруппами модулярной группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. А именно, согласно классическому результату Ф. Клейна и Р. Фрике, эпиморфные образы модулярной группы, за исключением трех циклических $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, — это в точности $(2,3)$-порожденные группы.

Гурвицевы (или конечные $(2,3,7)$-порожденные) группы образуют весьма важный подкласс $(2,3)$-порожденных групп. В 1893 г. А. Гурвиц доказал, что для группы автоморфизмов компактной римановой поверхности $\mathcal{R}$ рода $g \geq 2$ справедливо неравенство $|Aut(\mathcal{R})| \leq 84(g-1)$ и что гувицевы группы — это в точности те группы автоморфизмов, для которых достигается равенство.

Таким образом, исследования алгебраических свойств гурвицевых и $(2,3)$-порожденных групп могут иметь интересные приложения не только в самой теории групп, но и в различных областях, так или иначе связанных с модулярной группой: в теории чисел, анализе, теории римановых поверхностей.

В ряду групп $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ занимает особое положение. Если структура нормальных подгрупп $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 3$ довольно хорошо изучена (теорема Басса-Милнора-Серра), то аналогичный вопрос для $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ оказывается чрезвычайно сложным. Причина заключается в том, что в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ имеются подгруппы, не являющиеся конгруэнц-подгруппами. В некотором смысле нормальных подгрупп «слишком много», и поэтому надеяться на полную классификацию их и соответствующих факторгрупп практически безнадежно. В связи с этим обычно исследуют ограниченную задачу о том, какие группы из важных классов (например, классических матричных групп, конечных простых групп и т.п.) являются $(2,3)$-порожденными.

Задача о $(2,3)$-порождении знакопеременных групп изучалась еще Дж. Миллером в 1901 году. Случай классических матричных групп над различными коммутативными кольцами (включая конечные поля и евклидовы кольца) рассматривался в работах М. К. Тамбурини, Л. Ди Мартино, Н. А. Вавилова, Дж. Уилсона, Н. Гавиоли, П. Санкини С. Вассалло и др.

Л. Ди Мартино и Н. А. Вавилов выдвинули гипотезу о том, что для произвольного конечнопорожденного коммутативного кольца R всякая элементарная группа Шевалле над R достаточно большого ранга является $(2,3)$-порожденной. Можно уточнить эту гипотезу и ставить вопрос о нахождении наименьшего допустимого значения ранга.

Конструктивный подход, развитый в работах Л. Ди Мартино, Н. А. Вавилова, М. К. Тамбурини, Дж. Уилсона и Н. Гавиоли подтвердил справедливость гипотезы Ди Мартино—Вавилова для конечных классических матричных групп. Частный случай матричных групп малых рангов также рассматривался в работах М. К. Тамбурини, С. Вассалло, К. Чакеряна, П. Манолова, М. Каццолы и Л. Ди Мартино.

М. Либек и А. Шалев предложили принципиально иной вероятностный подход, основанный на детальном изучении максимальных подгрупп конечных простых групп. Аналогичные вероятностные методы применимы и к исключительным конечным простым группам типа Ли. Для исключительных серий (кроме групп Сузуки, которые даже не содержат элемента порядка 3) проблема была положительно решена в работах Г. Малле и Ф. Любека.

К сожалению, вероятностные методы приводят к чистым теоремам существования и не дают никакой информации о самих образующих. Кроме того, эти методы существенно использует информацию о структуре максимальных подгрупп конечных классических простых групп и не могут быть непосредственно перенесены на группы Шевалле над другими кольцами. Поэтому предпочтительнее конструктивные результаты, в которых удается явно построить образующие.

Следует отметить, что в проблемах такого рода (в частности, для задачи конструктивного $(2,3)$-порождения) случай групп малых рангов оказывается существенно более сложным по сравнению с группами больших рангов. Это объясняется тем, что во втором случае имеется большая свобода в выборе образующих. Для групп малых рангов сложность заключается не только в доказательстве того, что те или иные элементы порождают рассматриваемые группы, но и в поиске самих образующих. Эти случаи зачастую требуют привлечения индивидуальных методов. Поэтому уже даже для классических матричных групп над кольцом целых чисел вопрос об их $(2,3)$-порождении был решен не до конца. В случае линейных групп над $\mathbb{Z}$ наилучший из известных результатов содержался в серии работ М. К. Тамбурини и ее соавторов. В частности, известно, что группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 13$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 13$ или $n \geq 15$ являются $(2,3)$-порожденными.

М. Кондер поставил в «Коуровской тетради» вопрос о том, будут ли $(2,3)$-порожденными группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Отрицательный ответ дали независимо Я. Н. Нужин и М. К. Тамбурини и Р. Цукка. В случае групп $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ А. Ю. Лузгарев и И. М. Певзнер свели проблему к анализу конечного числа случаев, однако окончательный ответ получить так и не удалось. Таким образом, до настоящего времени оставался открытым вопрос о $(2,3)$-порождении групп $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 5, \dots, 12$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $n = 5, \dots, 12, 14$.

Задача о гурвицевом (или $(2,3,7)$-) порождении групп также изучалась с конца XIX века. Ф. Клейн показал, что группа $\mathrm{PSL}_2(7)$ порядка 168 является группой автоморфизмов так называемой квартики Клейна, заданной уравнением $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Р. Фрике и А. М. Макбет исследовали группу $\mathrm{PSL}_2(8)$ порядка 504. Однако на протяжении длительного времени примеры гурвицевых групп носили единичный характер. Первую бесконечную серию $\mathrm{PSL}_2(q)$ для подходящих q описал А. М. Макбет в 1969 году.

Дж. Коэн показал, что $\mathrm{PSL}_3(\bar{\mathbb{F}}_p)$ не содержит новых гурвицевых подгрупп. Эти результаты многими рассматривались как свидетельство в пользу предположения (как потом выяснилось, ошибочного) о том, что гурвицевы группы встречаются весьма редко.

Настоящий прорыв произошел после работ М. Кондера и, в особенности, А. Луккини, М. К. Тамбурини и Дж. Уилсона. Используя диаграммный метод Хигмана, М. Кондер доказал, что знакопеременные группы A_n при $n \geq 167$ являются гурвицевыми. Лишь в конце 90-х годов XX века А. Луккини, М. К. Тамбурини и Дж. Уилсон сумели обобщить метод Хигмана-Кондера на случай линейных групп. Разработанная ими техника позволила доказать гурвицевость многих серий конечных классических групп больших рангов. В случае групп $\mathrm{SL}_n(q)$ наилучший на данный момент результат принадлежит автору [18]: для всех $n \geq 252$ группы $\mathrm{SL}_n(q)$ гурвицевы.

Отметим, что упомянутые результаты также конструктивны, то есть соответствующие гурвицевы образующие описываются явным образом. Как и в случае $(2,3)$-порождения, групы малых рангов требуют изобретения новых методов. Альтернативный неконструктивный подход, основанный на подсчете числа решений некоторых уравнений в группах и в их максимальных подгруппах, предложил Г. Малле. Наиболее эффективным этот метод оказывается для исключительных серий групп типа Ли. Случай групп Ри ${}^2G_2(3^{2m+1})$ также исследовали Г. Джонс, Ч.-Х. Са и К. Чакерян. Полный список гурвицевых спорадических простых групп получен в работах Ч.-Х. Са, Л. Финкельштейна, А. Рудвалиса, М. Ворбойза, А. Волдара, С. Линтона, Р. Уилсона, М. Кондера, П. Клейдмана и Р. Паркера.

В ряде работ устанавливается, что группы из некоторых бесконечных семейств не являются гурвицевыми. Исследования в этом направлении вели Л. Ди Мартино, М. К. Тамбурини, А. Е. Залесский и Р. Винсент.

Одним из интересных подклассов $(2,3,7)$-порожденных групп являются абстрактные группы $(2,3,7;n) = \langle X, Y : X^2 = Y^3 = (XY)^7 = [X,Y]^n \rangle$ и их факторгруппы. Впервые они рассматривались в работах Г. С. М. Коксетера. В этом случае появляется дополнительное ограничение на порядок коммутатора двух образующих, и о таких группах известно крайне мало. Частные случаи $n \leq 9$ рассматривались еще в работах Дж. Лича и Ч. Симса. Д. Нольт, В. Плескен и Б. Сувинье, а также независимо Дж. Хови и Р. Томас и М. Иджвет установили, что группа $(2,3,7;n)$ бесконечна в том и только в том случае, когда $n \geq 9$. М. Кондер показал, что для достаточно больших n знакопеременные группы A_n являются эпиморфными образами группы $(2,3,7;84)$. Однако аналогичные вопросы о том, какие группы Шевалле являются факторгруппами $(2,3,7;n)$, оказываются довольно сложными, и явные примеры носят единичный характер.

В заключение выделим наиболее актуальные и приоритетные направления в указанных задачах. К ним относятся проблемы явного построения $(2,3)$- и гурвицевых образующих различных групп, в частности, групп Шевалле над конечнопорожденными кольцами. Особый интерес представляет случай групп Шевалле малых рангов, для которых общие методы неприменимы.

Цель работы. Основной целью работы является конструктивное исследование вопроса о возможности порождения матричных групп наборами образующих, удовлетворяющих дополнительным соотношениям. К задачам такого типа, в частности, относятся: давно стоящая проблема о порождении линейных групп над кольцом целых чисел парой элементов порядков два и три и проблема о гурвицевом порождении групп типа Ли. В рамках общей задачи требуется разработать технику, применимую к наиболее сложному для анализа случаю групп малых рангов.

Методы исследований. В работе используются методы теории групп, включая метод исследования максимальных подгрупп конечных групп типа Ли. Также используются методы линейной алгебры и теории представлений, в частности, методы, основанные на применении формулы Л. Л. Скотта для описания инвариантов допустимых образующих.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы и полученные результаты могут быть применены для дальнейшего изучения структурных свойств матричных групп над различными классами конечнопорожденных колец и для изучения образующих таких групп. Материалы диссертации могут составить содержание специальных курсов, для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- Доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ для малых значений $n \geq 5$. Тем самым получен полный ответ на вопрос, когда группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ являются $(2,3)$-порожденными.

- Классифицированы с точностью до сопряженности пары $(2,3)$-образующих групп $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$.

- Доказана $(2,3)$-порожденность группы $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ и показано, что имеется лишь конечное число несопряженных пар $(2,3)$-образующих.

- Доказано, что группа $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ является $(3,3,12)$-порожденной.

- Классифицированы все допустимые инварианты подобия неприводимых проективных $(2,3,7)$-троек в $\mathrm{PGL}_7(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$.

- Классифицированы с точностью до сопряженности все подгруппы в $\mathrm{PGL}_7(\mathbb{F})$, порожденные неприводимыми $(2,3,7)$-тройками, удовлетворяющими условию жесткости. Как следствие, найдены новые серии гурвицевых групп $\mathrm{PSL}_7(q)$ и $\mathrm{PSU}_7(q^2)$ для подходящих q.

- Получено достаточное условие, гарантирующее, что тройка образующих, удовлетворяющая условию жесткости, содержится в унитарной группе.

- Найдена параметризация всех неприводимых $(2,3,7)$-троек в $\mathrm{PGL}_7(\mathbb{F})$, не удовлетворяющих условию жесткости.

- Впервые построены явные гурвицевы образующие для групп $G_2(p)$ для простых $p \geq 5$. Доказано, что для таких p группа $G_2(p)$ является эпиморфным образом группы $(2,3,7;2p) = \langle X, Y : X^2 = Y^3 = (XY)^7 = [X,Y]^{2p} = 1\rangle$.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 г.); на международной конференции «Группы и топологические группы» (Милан, Италия, 10–11 июня 2005 г.); на франко-китайском симпозиуме по теории представлений (Гуанчжоу, Китай, 3–10 ноября 2006 г.); на общеинститутском математическом семинаре ПОМИ РАН под руководством проф., д.ф.-м.н. А. М. Вершика; на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева под руководством проф., д.ф.-м.н. А. В. Яковлева, на Московско-Петербургском семинаре по маломерной математике под руководством к.ф.-м.н. С. В. Дужина, на алгебраическом семинаре университета г. Милана (Италия) под руководством проф. Л. Ди Мартино; на математическом семинаре Католического университета г. Брешии (Италия) под руководством проф. М. К. Тамбурини; на алгебраическом семинаре университета г. Кембриджа (Великобритания) под руководством проф. Я. Саксла.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе 8 работ в изданиях, входящих в список ВАК (издания [10], [11] входили в список ВАК на момент публикации; издания [12]–[17] входят в текущий список ВАК; зарубежные издания [13]–[17] входят в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded). В совместной работе [4] автору принадлежит доказательство совпадения групп $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{Z}[\epsilon], B)$ и $T(2, 3, k)$ при $k = 7$, 9, 11 (теорема 1.2), и доказательство того, что при четных $k \geq 8$ и нечетных $k \geq 13$ группа $T(2, 3, k)$ будет собственной подгруппой в $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{Z}[\epsilon], B)$ (теорема 1.5). В совместной работе [16] автору принадлежит результат о каноническом выборе линейных прообразов проективной $(2, 3, 7)$-тройки (лемма 2), а также анализ $(2, 3, 7)$-троек и подгрупп в $\mathrm{PSL}_7(\mathbb{F})$ (раздел 3.3 и лемма 7 и теорема 8 в разделе 6). В совместной работе [17] автору принадлежит результат о параметризации $(2, 3, 7)$-троек (теорема 1 и леммы 1-9). Остальные результаты в работах [13], [16], [17] принадлежат соавторам. Все результаты, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 230 страницах и состоит из общей характеристики работы, 6 глав, разбитых на 19 параграфов, 1 приложения и списка использованной литературы. Библиография включает 111 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во вводной части диссертации приведена общая краткая характеристика работы, включающая актуальность темы исследования, краткий обзор основных результатов и структуры работы.

Глава 1. Введение.

Эта глава не содержит собственных результатов автора и включена в диссертацию для возможности автономного чтения диссертации и единообразия терминов и обозначений. В §1.1 приведены основные определения.

Определение 1.1. Группа называется (m, n)-*порожденной*, если она порождается двумя элементами, скажем x, y, такими, что порядок x равен m, а порядок y равен n. Пару соответствующих образующих (x, y) будем называть (m, n)-*образующими* или (m, n)-*парой*.

Определение 1.2. Группа называется (m, n, k)-*порожденной*, если она порождается двумя элементами, скажем x, y, такими, что порядок x равен m, порядок y равен n, а порядок xy равен k. Пару образующих (x, y) будем называть (m, n, k)-*парой*. Иногда удобнее формально добавлять и произведение $z = xy$ и рассматривать тройку (x, y, z). Такие тройки будем называть (m, n, k)-*тройками*.

Определение 1.3. Конечная $(2, 3, 7)$-порожденная группа называется *гурвицевой*.

В случае подгрупп линейных групп также определим следующие понятия.

Определение 1.4. Пусть x, y, $z = xy \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ таковы, что их проективные образы являются (m, n, k)-тройкой в $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})$. В этом случае будем говорить, что (x, y, z) — *проективная* (m, n, k)-*тройка*.

Определение 1.5. Пусть x, y, $z = xy \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Если $\langle x, y\rangle$ является абсолютно неприводимой подгруппой в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, то будем говорить, что тройка

(x, y, z) *неприводима.*

Определение 1.7. Пусть $a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, причем $a_1 a_2 = a_3$. Тройка (a_1, a_2, a_3) называется *линейно жесткой* если для любой другой тройки $(b_1, b_2, b_3) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))^3$, такой, что

(i) $b_1 b_2 = b_3$,

(ii) для каждого $i = 1, 2, 3$ матрицы b_i и a_i сопряжены,

существует элемент $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, осуществляющий одновременное сопряжение: $g b_i g^{-1} = a_i$, $i = 1, 2, 3$.

Также §1.1 содержит список основных обозначений, используемых в работе. В §1.2 излагается исторический обзор исследований по теории гурвицевых и $(2, 3)$-порожденных групп. В §1.3 приведены результаты Л. Ди Мартино, М. К. Тамбурини и А. Е. Залесского [3] о различных формах формулы Л. Л. Скотта и теорема К. Страмбака и Г. Фолклейна [8] о линейной жесткости.

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим группу $H = \langle x, y \rangle$ и представление $f : H \to \mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{F}$. Для $A \subseteq H$ определим размерность d_V^A

$$d_V^A = \dim\{v \in V \mid f(a)v = v \ \text{ для всех } a \in A\}.$$

Определим $\hat{d}_V^A$ аналогичным образом для двойственного представления. Неравенство Скотта [7] утверждает, что

$$d_V^x + d_V^y + d_V^{xy} \leq \dim V + d_V^H + \hat{d}_V^H.$$

Следующий частный случай [3] оказывается весьма эффективным для нахождения допустимых инвариантов подобия матричных образующих. Пусть $M = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ — алгебра квадратных матриц размера n, а $H = \langle x, y \rangle \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$

действует на M сопряжением. В частности, d_M^h есть размерность централизатора h в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Если группа H абсолютно неприводима, то (см. [3])

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} \le n^2 + 2. \tag{1}$$

Кроме того, теорема К. Страмбака и Г. Фолклейна [8] утверждает, что если группа $\langle x, y\rangle$ абсолютно неприводима и в формуле (1) имеет место равенство, то тройка (x, y, xy) является линейно жесткой. В частности, в данном случае имеется не более одного класса сопряженности троек с такими инвариантами подобия.

Вторая, третья и четвертая главы посвящены задаче о $(2,3)$-порождении линейных групп над кольцом целых чисел. Случаи групп $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ вынесены в отдельные главы, поскольку для них удается не только установить $(2,3)$-порожденность, но и доказать конечность числа классов сопряженности порождающих пар, а для групп $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ даже полностью классифицировать пары $(2,3)$-образующих с точностью до сопряжения.

Глава 2. $(2,3)$**-порождение групп** $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ **и** $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$**.**

Во второй главе рассматриваются группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$. Результаты получены автором в [12],[19]. Следующая лемма показывает, что для нечетного n достаточно получить ответ для одной из групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ или $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Лемма 2.1 *Пусть n нечетно, $x, y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $x^2 = y^3 = I$. Равенство $\langle x, y\rangle = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\langle -x, y\rangle = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.*

Основным результатом второй главы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ являются $(2,3)$-порожденными. Кроме того, всякая пара $(2,3)$-образующих группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ сопряжена в $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ с одной из шести пар матриц X, Y, а всякая пара $(2,3)$-образующих группы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ сопряжена в $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ с одной из шести пар матриц $-X$, Y, где*

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а (a_1, a_2, a_3, a_4) — *это один из следующих наборов:*

$$(1, -1, -2, -2), \quad (0, -1, -2, -2), \tag{3}$$

$$(-1, 1, -2, -2), \quad (0, 1, -2, -2), \tag{4}$$

$$(1, -1, 1, -3), \quad (0, -1, 0, -1). \tag{5}$$

Согласно результату А. Ю. Лузгарева и И. М. Певзнера [2], всякая пара $(2, 3)$-образующих $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ (если таковая имеется) сопряжена с парой вида (2), где a_1, a_2, a_3, a_4 — один из наборов, перечисленных в (3)–(5) или

$$(1, -1, -2, 4), \quad (0, -1, 2, -8), \tag{6}$$

$$(-1, 1, -2, 4), \quad (0, 1, 4, -8). \tag{7}$$

На самом деле достаточно исследовать только 5 случаев из 10. А именно, две пары X, Y и X, Y^2 порождают или не порождают $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ одновременно. Если пара матриц X, Y соответствует первому набору в какой либо из строк (3)–(7), то второй набор из той же строки соответствует паре матриц, сопряженных с X, Y^2.

В §2.1 показывается, что в случаях (6)–(7) группа $\langle X, Y \rangle$ является собственной подгруппой в $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. Доказательство основано на следующей модификации хорошо известной идеи (так называемой «ping-pong леммы» [1]).

Лемма 2.2. *Пусть $x, y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $n > 3$, $x^2 = y^3 = I$. Предположим, что нашлись множество $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ и вектор $u \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{W}$, такие, что*

(i) $xy\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$, $xy^2\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$;

(ii) $xyu \in \mathcal{W}$, $xy^2u \in \mathcal{W}$.

Тогда $\langle x, y\rangle \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. В частности, $\langle x, y\rangle \neq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $\langle x, y\rangle \neq \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

В случае (6)–(7) можно построить требуемое множество $\mathcal{W}$ в виде объединения «притягивающего конуса» $\mathcal{W}_0$ и $-\mathcal{W}_0$. Принципиальное отличие случаев (6)–(7) от (3)–(5) заключается в том, что для (6)–(7) наибольшие по абсолютной величине собственные числа матриц XY^2 и $-XY$ вещественные и положительны. Поэтому удается построить «притягивающий конус» $\mathcal{W}_0$, содержащий $\langle XY^2, -XY\rangle$-орбиты, натянутые на соответствующие собственные векторы.

В оставшихся случаях (3)–(5) матрицы X и Y порождают $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Доказательство приведено в §2.2-§2.4. Опишем стратегию, которая используется при доказательстве положительной части теоремы 2.1 и аналогичных утверждений. Хорошо известно, что группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями. Поэтому достаточно показать, что группа $\langle X, Y\rangle$ содержит все элементарные трансвекции $t_{ij}(1)$. В автореферате опущены громоздкие технические детали. Вместо этого поясним на простейшем примере, как можно искать новые трансвекции (не обязательно элементарные), если некоторые уже найдены. Предположим, что уже установлено, что группа $\langle X, Y\rangle$ содержит матрицу вида $I + e_i \cdot v^T$, где $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, а v — вектор-столбец, удовлетворяющий условию $v^T e_i = 0$. Если в группе $\langle X, Y\rangle$ удается найти матрицу $h \neq I$, такую, что $he_i = e_i$, то получаем новую трансвекцию $h(I + e_i \cdot v^T)h^{-1} = I + e_i \cdot v^T h^{-1}$. Отметим, что при фиксированном i трансвекции указанного вида коммутируют. Поэтому, построив достаточно большой набор таких матриц, можно породить и элементарные трансвекции в виде комбинаций уже имеющихся. Аналогичные соображения применимы и в более общей ситуации, например, не только к трансвекциям, но и к матрицам блочно-треугольной структуры и т.п.

Основная сложность предложенного метода состоит в поиске матриц h, при помощи которых осуществляется сопряжение. Этот поиск был автоматизирован. А именно, перебирались достаточно короткие слова в образующих X и Y, и среди них искались подходящие матрицы h. Как только необходимые элементы построены, проверка полученных соотношений носит чисто формальный характер и может быть проведена непосредственно человеком без использования компьютера.

Глава 3. $(2,3)$-порождение группы $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$.

В §3.1 устанавливается редукционная теорема, сводящая вопрос о $(2,3)$-порождении $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ к исследованию конечного числа случаев. Результаты §3.1 опубликованы автором в [10].

Теорема 3.1. *Пусть $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ и $\tilde{X}^2 = \tilde{Y}^3 = I_6$. Тогда пара $\tilde{X}, \tilde{Y}$ должна быть сопряжена в $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ с одной из пар $\pm X, Y$ вида*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & I_2 & B \\ I_2 & 0 & -B \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & A \\ 0 & 0 & -I_2 \\ 0 & I_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где I_2 — единичная матрица размера 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

а $(b_1, b_2, b_3, b_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$ — один из следующих наборов:

$$(0,0,0,1,3,1,1,-3), \quad (1,-1,-1,-4,-3,1,1,3), \tag{9}$$

$$(1,0,0,2,-3,1,1,3), \qquad (-6,-1,-1,1,3,1,1,-3), \tag{10}$$

$$(0,0,0,1,3,1,-1,-3), \qquad (1,-1,1,-4,-3,1,-1,3), \tag{11}$$

$$(1,0,0,2,-3,1,-1,3), \qquad (-6,-1,1,1,3,1,-1,-3), \tag{12}$$

$$(0,2,-2,-3,3,1,-1,1), \qquad (1,-3,3,-4,1,1,-1,3), \tag{13}$$

$$(1,4,-4,-6,5,1,-1,3), \qquad (2,-5,5,-7,3,1,-1,5), \tag{14}$$

$$(-2,1,-1,-2,3,1,-1,2), \qquad (-1,-2,2,-2,2,1,-1,3), \tag{15}$$

$$(-4,2,-2,-1,3,1,-1,4), \qquad (-4,-3,3,0,4,1,-1,3). \tag{16}$$

Доказательство построено следующим образом. В лемме 3.2 доказывается, что всякая пара $(2,3)$-образующих группы $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ сопряжена с парой вида (8) для некоторых целочисленных матриц A и B. В частности, мы анализизируем допустимые инварианты подобия, используя формулу Скотта (1). Используя тот факт, что для всякого простого числа p матрицы X и Y, рассматриваемые по модулю p, порождают абсолютно неприводимую группу $\mathrm{SL}_6(p)$, в леммах 3.3-3.7 устанавливаем дополнительные ограничения, которым должны удовлетворять целочисленные параметры $b_1, \dots b_4, a_1, \dots, a_4$. В частности, $\det(AB - BA) = \pm 1$ и $(s_0, s_1, s_2) \in \{(1,1,0), (1,0,1), (-1,1,1), (-1,-1,0), (-1,0,-1), (1,-1,-1)\}$, где

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_1a_4 - a_2a_3 - 3a_1 - 3a_4 + 9,\\
s_1 &= a_1a_4 - a_2a_3 + a_1b_4 + b_1a_4 - a_2b_3 - a_3b_2 + 2a_1 + 2a_4 + 3b_1 + 3b_4 + 3,\\
s_2 &= -a_1b_4 - b_1a_4 + a_3b_2 + a_2b_3 - 3b_1b_4 + 3b_2b_3 + a_1 + a_4 + 3.
\end{aligned}$$

Кроме того, в леммах 3.9 и 3.10 показывается, что, не умаляя общности, можно предполагать, что

$$(a_1 - a_4)b_2 - a_2(b_1 - b_4) = 1, \quad b_3 = \pm b_2, \quad a_3 = \pm a_2.$$

Оставшаяся часть доказательства теоремы 3.1 посвящена поиску целочисленных решений полученной системы.

Результаты §3.2 опубликованы автором в [12], [19]. В теореме 3.2 устанавливается, что группа $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ порождается парой матриц (8), отвечающей параметрам (13). С технической точки зрения оказывается более удобным работать не с матрицами вида (8), а с сопряженной с ними парой. Метод доказательства аналогичен описанному в §2.2–2.4. В частности, из теоремы 3.2 вытекает, что группа $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ является $(2,3)$-порожденной. Кроме того, можно проверить, что образующие из теоремы 3.2 удовлетворяют дополнительному соотношению $[X,Y]^{12} = 1$. Взяв в качестве образующих группы $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ матрицы XYX, Y^{-1}, $XYX \cdot Y^{-1}$, получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Группа* $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ *является* $(3,3,12)$*-порожденной.*

Глава 4. $(2,3)$**-порождение групп** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ **и** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$**: общий случай.**

В этой главе дается окончательный ответ на давно стоявший вопрос о том, когда группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ являются $(2,3)$-порожденными. Результаты §4.1 и приложения опубликованы в [12],[19],[20]. Результаты §4.2 опубликованы в [11],[15]. Результаты §4.3 опубликованы в [12].

Теорема 4.1. *Группы* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ *и* $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z})$ *являются* $(2,3)$*-порожденными тогда и только тогда, когда* $n \geq 5$. *Группа* $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ *является* $(2,3)$*-порожденной тогда и только тогда, когда* $n = 2$ *или* $n \geq 5$.

В §4.1 приводится общая схема доказательства. Отрицательные результаты при $n \leq 4$ были известны ранее. Положительный ответ для $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ был получен в главе 2 (теорема 2.1) и главе 3 (теорема 3.2), соответственно. Учитывая результаты М. К. Тамбурини, П. Санкини и С. Вассало [6], [9] для групп больших рангов, остается рассмотреть группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 7,\ldots,12$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 6,\ldots,12, 14$. Более того, согласно лемме 2.1 для нечетных n достаточно рассматривать только одну из двух групп.

В §4.2 и 4.3 подробно рассматриваются группы $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_7(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_7(\mathbb{Z})$. В отличие от утверждений глав 2 и 3, здесь, по-видимому, не приходится рассчитывать на результат о конечности числа классов сопряженности пар $(2,3)$-образующих, аналогичный теоремам 2.1 и 3.1. С другой стороны, это предоставляет большую свободу при выборе образующих, и можно искать $(2,3)$-пары, удовлетворяющие дополнительным условиям. Например, можно установить ограничения на вид характеристического многочлена коммутатора такой пары. В случае $n = 6$ рассмотрим матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & r_1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & r_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & -r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -r_4 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_5 & r_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r_7 & r_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

имеющие порядок 2 и 3, соответственно. Следующий шаг состоит в нахождении параметров $r_1,\ldots,r_8$, для которых некоторая степень коммутатора $[x,y]$ является трансвекцией (не обязательно элементарной). Для этой цели естественно ограничиться случаем, когда 1 является двойным корнем характеристического многочлена для $[x,y]$, а остальные корни простые и имеют конечный мультипликативный порядок. Более точно, было наложено следующее условие: характеристический многочлен матрицы $[x,y]$ равен

$$(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1).$$

Это условие можно записать в виде системы полиномиальных уравнений в неизвестных $r_1,\ldots,r_8$. Удается подобрать «небольшие» ее решения, удовлетворяющие естественному необходимому условию: для всех простых чисел p, меньших некоторой заданной границы, матрицы x и y, рассматриваемые по модулю p, порождают $\mathrm{GL}_6(p)$. Было найдено следующее решение, которое проходило все тесты: $r_1 = r_2 = r_4 = 0$, $r_3 = r_5 = 1$, $r_6 = r_8 = -2$, $r_7 = -1$. В общей ситуации упомянутое необходимое условие не является достаточным, однако оказывается, что в данном случае $\langle x, y\rangle = \mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$. Равенство этих групп доказывается методом, аналогичным изложенному в §2.2–2.4 и §3.2.

В §4.3 рассматриваются группы $\mathrm{GL}_7(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_7(\mathbb{Z})$. Метод поиска образующих аналогичен описенному выше. В частности, искались матрицы x_1, y_1, для которых выполняются равенства $x_1^2 = y_1^3 = I$ и для которых характеристический многочлен коммутатора равен

$$\chi_{x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1). \tag{17}$$

Доказательство равенства $\langle x_1, y_1\rangle \mathrm{SL}_7(\mathbb{Z})$ аналогично методу из §2.2-2.4 и §3.2.

В оставшихся случаях $8 \leq n \leq 14$ технические детали доказательства (в том числе, явный вид образующих и соотношения, показывающие, как в терминах этих образующих строятся трансвекции) вынесены в приложение. Способ нахождения образующих и построение трансвекций аналогичны методу, применявшемуся в §4.2-4.3.

Глава 5. $(2, 3, k)$-порожденные унитарные группы.

В этой главе исследуется вопрос о $(2, 3, k)$-порождении некоторых унитарных групп $\mathrm{PSU}_2(R, B)$, определенных над кольцами алгебраических чисел. Результаты этой главы получены автором в [13].

Обозначим через $T(2, 3, k)$ следующую абстрактную группу, заданную при помощи образующих и определяющих соотношений:

$$T(2, 3, k) = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = (XY)^k = 1\rangle.$$

Пусть $\epsilon \in \mathbb{C}$ — первообразный корень из 1 степени k, если $k > 1$ и нечетно, и первообразный корень из 1 степени $2k$, если k четно. Также положим $\theta = \epsilon + \epsilon^{-1}$, $\eta = \epsilon - \epsilon^{-1}$.

Согласно [3], всякая неабелева $(2, 3, k)$-порожденная подгруппа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ изоморфна группе, порожденной проективными образами матриц X, Y, где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = XY = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

и проективный образ группы $\langle X, Y \rangle$ изоморфен $T(2, 3, k)$. Матрицы X, Y сохраняют эрмитову форму $B = \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta \\ -\eta & \eta^2 \end{pmatrix}$. В частности, $\langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle \leq \mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\epsilon]) : \overline{A}^T BA = B\}$. Следующие две теоремы дают ответ на вопрос о том, когда (в случае бесконечных неразрешимых групп $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$, то есть при $k > 6$) имеет место равенство $\langle X, Z \rangle = \mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$.

Теорема 5.1. *Пусть $k = 7$, 9 или 11. Тогда $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B) = \langle X, Z \rangle$, где X, Z определены в (18). В частности, группа $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$ изоморфна $T(2, 3, k)$.*

Теорема 5.2. *Для нечетных $k \geq 13$ и для четных $k \geq 8$ группа $\langle X, Z \rangle$ является собственной подгруппой $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$.*

Теорема 5.1 доказывается в §5.2. Несложно проверяется, что матрицы из $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$ — это в точности матрицы с определителем 1, представимые в виде

$$v = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & 1 \\ 1 & -\eta \end{pmatrix},$$

где $2x_0, 2x_1, 2x_2, 2x_3, x_0 - x_3 - x_2\theta, x_1 + x_2 - x_3\theta \in \mathbb{Z}[\theta]$. Кроме того, $\det(v) = x_0^2 + x_1^2 - (\theta^2 - 3)(x_2^2 + x_3^2)$.

При $k = 7, 9, 11$ рассматривается вспомогательная неотрицательная функция $F(v) = x_2^2 + x_3^2$ на множестве $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$ и показывается (лемма 5.6), что если $F(v)$ больше некоторой границы, то $F(vX^sZ^t) < F(v)$ для подходящих s, $t \in \mathbb{Z}$. Таким образом, задача сводится к исследованию матриц $v \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$, для которых значение $F(v)$ ограничено. Оказывается, что таких матриц лишь конечное число и все они могут быть представлены в виде $X^r Z^s X^t$ для подходящих r, s и t (леммы 5.8, 5.10, 5.12).

Теорема 5.2 доказывается в §5.3. Доказательство разбивается на два этапа. В лемме 5.13 приводится альтернативное доказательство известного факта о том, что при $k \geq 7$ группа $T(2,3,k)$ не содержит свободную абелеву подгруппу ранга 2. В лемме 5.15 строится абелева подгруппа в $\mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[\epsilon], B)$, а в лемме 5.16 вычисляется ее ранг. В частности, оказывается, что если $k > 7$, $k \neq 9$, 11, то ранг соответствующей абелевой подгруппы по крайней мере 2. Вычисление ранга основано на теореме Дирихле о единицах.

Глава 6. $(2,3,7)$**-порожденные подгруппы** $\mathrm{PGL}_7(\mathbb{F})$**.**

В этой главе изучаются проективные $(2,3,7)$-тройки в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}$ характеристики $p \geq 0$. Результаты §6.1 и §6.2 получены автором в [16], результаты §6.3 получены автором в [17]. Изложение в §6.4 следует работе [14]. В §6.1 классифицируются допустимые инварианты подобия неприводимых троек.

Теорема 6.1. *Пусть* (x,y,z) *— неприводимая проективная* $(2,3,7)$*-тройка в* $\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$*. Тогда (с точностью до выбора линейных представителей в проективных классах) инварианты подобия удовлетворяют одной из следующих альтернатив:*

(i) $t+1$, t^2-1, t^2-1, t^2-1 *для* x*;* $t-1$, t^3-1, t^3-1 *для* y*;* t^7-1 *для* z*. Кроме того, в этом случае* $p \neq 2$ *и* $\langle x,y\rangle$ *содержится в ортогональной группе.*

(ii) $t+1$, t^2-1, t^2-1, t^2-1 *для* x*;* t^2+t+1, t^2+t+1, t^3-1 *для* y*;* t^7-1 *для* z*. Кроме того, в этом случае* $p \neq 2$ *и* $\langle x,y\rangle$ *содержится в ортогональной группе.*

(iii) $t+1$, t^2-1, t^2-1, t^2-1 *для* x*;* $t-1$, t^3-1, t^3-1 *для* y*;* $t-\gamma$,

$(t-\gamma)(t-\gamma^{15})(t-\gamma^{22})(t-\gamma^{29})(t-\gamma^{36})(t-\gamma^{43})$ *для* z. *В этом случае* $p \neq 7$, *а* γ *— некий первообразный корень из* 1 *степени* 49.

Доказательство основано на применении различных вариантов формулы Скотта и детальном изучении ограничений на степени инвариантов подобия.

Дальнейшие вычисления показывают, что в случаях, описанных в пунктах (ii) и (iii) теоремы 6.1, в формуле Скотта (1) имеет место равенство. Вместе с результатом К. Страмбака и Г. Фолклейна [8] это влечет, что всякая неприводимая (2,3,7)-тройка с такими инвариантами подобия является линейно жесткой. В частности, с точностью до сопряжения имеется не более одной неприводимой тройки с перечисленными инвариантами подобия, и поэтому достаточно предъявить подходящую тройку. В §6.2 изучаются группы, порожденные теми тройками, которые удовлетворяют условию жесткости.

Теорема 6.2. *Пусть* $p \neq 2$, *а* (x, y, z) *неприводимая проективная* $(2, 3, 7)$-*тройка в* $\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$, *удовлетворяющая условиям теоремы 6.1(ii). Тогда* $\langle x, y\rangle \simeq \mathrm{PSL}_2(8)$ *и имеется в точности один класс сопряженности таких троек.*

Следующая теорема не только описывает группы, образующие которых удовлетворяют теореме 6.1(iii), но и дает пример новых серий гурвицевых групп.

Теорема 6.5. *Пусть* $p \neq 7$ *и* (x, y, z) *— неприводимая проективная* $(2, 3, 7)$-*тройка в* $\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$, *инварианты подобия которой перечислены в теореме 6.1(iii). Тогда имеется в точности один класс сопряженности таких троек.*

Для $p \neq 0$ *определим* m_7 *как порядок* p *модулю* 49. *Тогда проективный образ* $\langle x, y\rangle$ *изоморфен* $\mathrm{PSL}_7(p^{m_7})$, *если* m_7 *нечетно,* $\mathrm{PSU}_7(p^{m_7})$, *если* m_7 *четно. Если* $p = 0$, *то* $\langle x, y\rangle$ *сохраняет невырожденную эрмитову форму.*

Гурвицевость групп $\mathrm{PSL}_7(p^{m_7})$ и $\mathrm{PSU}_7(p^{m_7})$ установлена впервые. Для доказательства теоремы 6.5 используется список максимальных подгрупп в $\mathrm{PSL}_7(q)$, $\mathrm{PSU}_7(q)$, полученный в [4], и проверяется, что подгруппа, порожденная x и y, не может содержаться ни в одной из максимальных подгрупп. В случае, когда m_7 четно или $p = 0$, используется следующее достаточное условие, гарантирующее, что $\langle x, y \rangle$ содержится в унитарной группе. Этот результат представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 6.2. *Пусть L/K — квадратичное расширение полей и σ — нетривиальный автоморфизм L над K. Пусть $x, y \in \mathrm{GL}_n(L)$. Распространим естественным образом действие σ на матрицы. Предположим, что в $\mathrm{GL}_n(\bar{L})$ матрица $\sigma(x)$ сопряжена с x^{-1}, $\sigma(y)$ сопряжена с y^{-1}, $\sigma(xy)$ сопряжена с $(xy)^{-1}$. Также предположим, что группа $\langle x, y \rangle$ абсолютно неприводима и*

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} > n^2,$$

где d_M^x (соответственно d_M^y, d_M^{xy}) — размерности централизаторов x (соответственно y, xy) в $M = \mathrm{Mat}_n(\bar{L})$. Тогда $\langle x, y \rangle \leq \mathrm{U}_n(L, J, \sigma)$ для некоторой невырожденной эрмитовой формы J.

Для троек, описанных в теореме 6.1(i), условие жесткости не выполняется. Поэтому имеется бесконечно много попарно несопряженных троек с одними и теми же инвариантами подобия. Параметризация всех таких неприводимых троек получена в §6.3.

Зафиксируем ϵ — некий корень уравнения $t^6 + t^5 + \cdots + t + 1 = 0$, то есть ϵ — фиксированный первообразный корень из 1 степени 7, если $p \neq 7$, $\epsilon = 1$, если $p = 7$. Аналогичным образом, ω — фиксированный корень многочлена $t^2 + t + 1 = 0$, то есть ω — фиксированный первообразный кубический корень из 1, если $p \neq 3$, $\omega = 1$, если $p = 3$. Основным результатом §6.3 является следующая теорема.

Теорема 6.6. *Пусть $p \neq 2$. Всякая неприводимая $(2, 3, 7)$-тройка в $\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$ с инвариантами подобия, перечисленными в теореме 6.1(i), сопряжена в*

$\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$ *с тройкой* $(x, y, z = xy)$, *где* x *и* y *заданы равенствами*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r_5 & 0 & r_8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r_6 & 0 & r_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

причем $r_1,\ldots,r_9$ *принадлежат одному из следующих пяти параметрических семейств.*

(I) r_3, $r_4 \in \mathbb{F}$, $r_3r_4 + r_4^2 + r_4 + 1 \neq 0$ *и*

$$\begin{aligned} r_1 &= -r_3^2 - 2r_3 - r_4, \quad r_5 = -r_3 - 1, \quad r_6 = 0, \quad r_9 = r_3 - r_4, \\ r_2 &= \frac{r_3^4 + r_3^3r_4 + 4r_3^3 + 3r_3^2r_4 + 3r_3^2 - 2r_3 - r_4^3 - r_4^2 - 2r_4 - 2}{r_3r_4 + r_4^2 + r_4 + 1}, \\ r_7 &= -\frac{r_3^3r_4 + r_3^3 + r_3^2r_4^2 + 4r_3^2r_4 + 4r_3^2 + 3r_3r_4^2 + 3r_3r_4 + 3r_3 + r_4^4 + r_4^3 - 2}{r_3r_4 + r_4^2 + r_4 + 1}, \\ r_8 &= \frac{r_3^4 + r_3^3r_4 + 3r_3^3 + r_3^2r_4 + r_3r_4^3 - r_3r_4^2 - 4r_3r_4 - 4r_3 - r_4^2 - 3r_4 - 2}{r_3r_4 + r_4^2 + r_4 + 1}. \end{aligned}$$

Кроме того, $F_{1,j}(r_3, r_4) \neq 0$ *для всякого* $j = \pm 1$ *и* $F_{2,j}(r_3, r_4) \neq 0$ *для всякого* $j = 1, 2, 3$, где $F_{1,j}(r_3, r_4) = r_3^2 + r_3r_4 - (\epsilon^{4j} + \epsilon^{2j} + \epsilon^j - 2)r_3 + r_4^2 - 2(\epsilon^{4j} + \epsilon^{2j} + \epsilon^j)r_4 - \epsilon^{4j} - \epsilon^{2j} - \epsilon^j - 1$, $F_{2,j}(r_3, r_4) = r_3^2 + r_3r_4 + (1 - \epsilon^j - \epsilon^{-j})r_3 + r_4^2 + r_4 + \epsilon^{2j} + \epsilon^{-2j} + 1$.

(II) $r_2 \in \mathbb{F}$ *и*

$$r_1 = -4, \quad r_3 = -3, \quad r_4 = 1, \quad r_5 = 2, \quad r_6 = 0,$$

$$r_7 = r_2 + 2, \quad r_8 = 2r_2 + 8, \quad r_9 = -4.$$

Кроме того, $r_2 \neq -5(\epsilon^{4j} + \epsilon^{2j} + \epsilon^j + 2), \qquad j = \pm 1.$

(III) $p \neq 7$, $r_2 \in \mathbb{F}$, *и*

$$\begin{aligned}
r_4 &= \epsilon^k, \quad r_6 = 0, \\
r_1 &= -\epsilon^{5k} - \epsilon^{2k} - \epsilon^k - 1, \\
r_3 &= \epsilon^{5k} + \epsilon^{4k} + \epsilon^{3k} + \epsilon^{2k}, \\
r_5 &= -\epsilon^{5k} - \epsilon^{4k} - \epsilon^{3k} - \epsilon^{2k} - 1, \\
r_7 &= \epsilon^k r_2 - 2\epsilon^{5k} - 2\epsilon^{2k} - 1, \\
r_8 &= (\epsilon^k + 1) r_2 - 2\epsilon^{5k} - \epsilon^{4k} - \epsilon^{3k} - \epsilon^{2k} + \epsilon^k - 2, \\
r_9 &= \epsilon^{5k} + \epsilon^{4k} + \epsilon^{3k} + \epsilon^{2k} - \epsilon^k
\end{aligned}$$

для некоторого $k \in \{1, \ldots, 6\}$. *Кроме того,*

$$\begin{aligned}
r_2 &\neq -\epsilon^{5k} - \epsilon^{3k} - 2\epsilon^{2k} - 3\epsilon^k - 4, \\
r_2 &\neq -2\epsilon^{5k} + \epsilon^{4k} - \epsilon^{2k} - 2, \\
r_2 &\neq -\epsilon^{5k} - \epsilon^{4k} + \epsilon^{2k} - \epsilon^k - 2.
\end{aligned}$$

(IV) $r_3 \in \mathbb{F}$, $r_3 \neq -1$ *и для некоторого* $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
r_4 &= 0, \quad r_5 = -r_3 - 1, \quad r_6 = \omega^k, \quad r_9 = r_3, \\
r_1 &= -\frac{(\omega^k + 1) r_3 + 2\omega^k + 2}{r_3 + 1} \\
r_2 &= \frac{(\omega^k + 1) r_3^3 + (3\omega^k + 3) r_3^2 + (\omega^k + 2) r_3 - 2\omega^k}{r_3 + 1}, \\
r_7 &= -\frac{(\omega^k + 1) r_3^2 + (3\omega^k + 2) r_3 + 2\omega^k + 2}{r_3 + 1}, \\
r_8 &= \frac{(\omega^k + 1) r_3^3 + (2\omega^k + 2) r_3^2 - 2\omega^k - 2}{r_3 + 1}.
\end{aligned}$$

Кроме того, $r_3 \neq \omega^k(\epsilon^{3j} + \epsilon^{5j} + \epsilon^{6j}) + \epsilon^j + \epsilon^{2j} + \epsilon^{4j} - 1, \quad j \in \{1, -1\}$,

$$r_3 \neq (\omega^k + 1)(1 + \epsilon^j + \epsilon^{-j}) - 1, \quad j \in \{1, 2, 4\}.$$

(V) $p \neq 3$ *и для некоторого* $k \in \{1, 2\}$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{7 - 10\omega^k}{9}, \quad r_2 = \frac{8 - 8\omega^k}{9}, \quad r_3 = r_4 = -\frac{2 + \omega^k}{3}, \quad r_5 = \frac{\omega^k - 1}{3}, \\
r_6 &= \omega^k, \quad r_7 = r_8 = -2\omega^k - 1, \quad r_9 = 0.
\end{aligned}
$$

Кроме того, $p \neq 5$.

Более того, все тройки (x, y, z) *для перечисленных выше семейств неприводимы.*

Для удобства читателя поясним, что в формулировке теоремы 6.6 в каждом из случаев (I)–(V) условия, начинающиеся со слов «кроме того», — это в точности условия, гарантирующие неприводимость соответствующей тройки.

Дальнейшее изучение параметрических семейств может привести к полному описанию гурвицевых подгрупп в $\mathrm{GL}_7(\mathbb{F})$. Пример соответствующей техники демонстрируется в §6.4. А именно, рассматривается частный случай параметрического семейства (I) с $r_3 = -2$, $r_4 = 0$.

В следующей теореме впервые строятся явные гурвицевы образующие для исключительных групп типа Ли $G_2(p)$, где p — простое, $p \geq 5$. Более того, удается получить более сильный результат, а именно, помимо соотношений для образующих и их произведения, удается указать соотношение, которому удовлетворяет коммутатор образующих.

Теорема 6.7. *Для всякого простого* $p \geq 5$ *группа* $G_2(p)$ *является эпиморфным образом группы* $(2, 3, 7; 2p) = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = (XY)^7 = [X, Y]^{2p} = 1\rangle$. *Иными словами,* $G_2(p)$ *порождается двумя элементами,* x *и* y, *такими, что*

$$x^2 = y^3 = (xy)^7 = [x, y]^{2p} = 1.$$

Более точно, в качестве соответствующих образующих можно взять матрицы

x, y (рассматриваемые по модулю p), определенные согласно (19) *при следующих значениях параметров* $r_1 = 0$, $r_2 = -2$, $r_3 = -2$, $r_4 = 0$, $r_5 = 1$, $r_6 = 0$, $r_7 = 0$, $r_8 = -2$, $r_9 = -2$.

Соотношения между образующими проверяются непосредственно. Для вычисления порядка коммутатора $[x, y]$ удобно привести $[x, y]$ к канонической жордановой форме. Доказательство теоремы 6.7 разбивается на 2 этапа. Сначала в лемме 6.14 доказывается, что $\langle x, y\rangle$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов некоторой алгебры октав. Указывается таблица умножения соответствующей алгебры. Таким образом, для каждого $p \geq 3$ группа $\langle x, y\rangle$ содержится в $G_2(p)$. Для завершения доказательства на втором этапе проверяется, что $\langle x, y\rangle$ не может содержаться ни в одной из максимальных подгрупп $G_2(p)$. Сам список максимальных подгрупп взят из работы П. Клейдмана [5].

Приложение.

Приложение содержит оставшиеся детали доказательства теоремы 4.1, а именно наборы $(2, 3)$-образующих групп $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 8$, 9, 10, 11, 12 и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 8$, 9, 10, 11, 12, 14 и построение элементарных трансвекций уровня 1 в терминах этих образующих.

Список литературы.

[1] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп // М.: Мир, 1980. — 477 с.

[2] Лузгарев А.Ю., Певзнер И.М. Некоторые факты из жизни $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$ // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2003.— Т. 305.— С. 153–162.

[3] Di Martino L., Tamburini M. C., Zalesski A. E. On Hurwitz groups of low rank // Communications in Algebra.— 2000.— Vol. 28, no. 11.— P. 5383–5404.

[4] Kleidman P. The low-dimensional finite simple classical groups and their subgroups // Doctoral Thesis, University of Cambridge.— 1987.

[5] Kleidman P. The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // Journal of Algebra.— 1988.— Vol. 117, no. 1.— P. 30–71.

[6] Sanchini P., Tamburini M. C. Constructive $(2,3)$-generation: a permutational approach // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano.— 1996.— V. 64.— P. 141–158.

[7] Scott L. L. Matrices and cohomology // Ann. Math.— 1977.— Vol. 105.— P. 473–492.

[8] Strambach K., Völklein H. On linearly rigid tuples // J. Reine Angew. Math.— 1999.— Vol. 510.— P. 57–62.

[9] Tamburini M. C., Vassallo S. (2,3)-generazione di gruppi lineari // Manara C. F. et al. (Eds.) Scritti in onore di Giovanni Melzi Vitae / Sci. Mat.— Milano, Italy: Univ. Cattolica del Sacro Cuore, 1994.— P. 392–399.

Публикации автора по теме диссертации.

Издания, входящие в список ВАК.

[10] Всемирнов М.А. Является ли группа $\mathrm{SL}(6,\mathbb{Z})$ (2,3)-порожденной? // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2006.— Т. 330.— С. 101–130.

[11] Всемирнов М.А. Группа $\mathrm{GL}(6,\mathbb{Z})$ (2,3)-порождена // Препринты ПОМИ РАН.— 2006.— №26.— С. 1–7.

[12] Всемирнов М.А. О $(2,3)$-порождении матричных групп над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ.— 2007.— Т. 19, №6.— С. 22–58.

[13] Vsemirnov M., Mysovskikh V., Tamburini M.C. Triangle groups as subgroups of unitary groups // Journal of Algebra.— 2001.— V. 245, no. 2.— P. 562–583.

[14] Vsemirnov M. The groups $G_2(p)$, $p \geq 5$ as quotients of $(2,3,7;2p)$ // Transformation Groups.— 2006. — V. 11, no. 2.— P. 295–304.

[15] Vsemirnov M. The group $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ is $(2,3)$-generated // Journal of Group Theory.— 2007.— V. 10, no. 4.— 425–430.

[16] Tamburini M.C., Vsemirnov M. Irreducible (2,3,7)-subgroups of $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})$, $n \leq 7$ // Journal of Algebra.— 2006.— V. 300.— P. 339-362.

[17] Tamburini M.C., Vsemirnov M. Irreducible (2,3,7)-subgroups of $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})$, $n \leq 7$, II // Journal of Algebra.— 2009.— V. 321, no. 8.— P. 2119–2138.

Прочие издания.

[18] Vsemirnov M. Hurwitz groups of intermediate rank // London Mathematical Society Journal of Computation and Mathematics.— 2004.— V. 7.— P. 300–336.

[19] Vsemirnov M.A. On $(2,3)$-generation of matrix groups over the ring of integers // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Д.К.Фаддеева. Тезисы докладов/ Санкт-Петербург (Россия), 2007.— С. 174–175.

[20] Vsemirnov M. On $(2,3)$-generation of small rank matrix groups over integers // Quaderni del Seminario Matematico di Brescia.— 2008.— No. 30.— P. 1–15.