

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Тулубенская Елена Владимировна

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН
КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре математического моделирования и кибернетики Сыктывкарского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
МИХАЙЛОВСКИЙ Евгений Ильич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
ФИЛИППОВ Сергей Борисович
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор технических наук, профессор
ГОСПОДАРИКОВ Александр Петрович
(Санкт-Петербургский государственный горный институт)

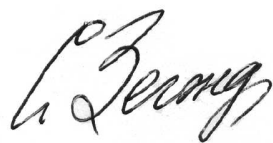
Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Защита состоится “ 2 ” апреля 2009 г. в 14 часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Автореферат разослан “ ____ ” _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор



С. А. Зегжда

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблема устойчивости стержней, пластин и оболочек с односторонними связями относится к конструктивно-нелинейной механике упругих систем. Инженерная востребованность к решению таких задач была всегда, однако решение сводилось либо к поиску локального экстремума, достижимость которого требует отдельного доказательства, либо к решению задач, требующих больших затрат машинного времени.

При решении задач на устойчивость и исследования закритического поведения элементов конструкций в условиях конструктивной нелинейности возникают трудности, связанные с изучением точек бифуркации негладких уравнений, обусловленные тем, что уравнения в окрестности точки равновесия не могут быть линеаризованы, обладая нелинейностью как существенным свойством.

Актуальность темы диссертации подтверждена поддержкой проведенных исследований Российским фондом фундаментальных исследований (04-01-96025). Диссертантом получен грант Правительства г. Санкт-Петербурга (М04-2.2К-549) на реализацию кандидатского проекта „Исследование влияния учета трансверсальных деформаций на устойчивость пластин в условиях односторонних связей“.

Цели работы. Создание эффективного алгоритма решения задач на устойчивость оболочек и пластин в условиях конструктивной нелинейности.

Достоверность работы. Достоверность результатов работы обеспечивается согласованием с результатами решения задач, полученных локальным методом поиска собственных чисел положительно однородного оператора¹. Для ряда задач получено аналитическое решение в случае однородной винклеровской среды, которое согласовывалось с результатами расчетов при фиксированной жесткости одного основания и плавном стремлении второго к фиксированному.

¹ *Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.* Локальный метод поиска собственных чисел положительно однородного оператора. Тезисы докл. Международной научной конференции, посвящ. 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. С.88.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Комбинированный алгоритм полного и локального перебора вариантов решения спектральных задач конструктивно-нелинейной механики.

2. Решения с использованием алгоритма „ППВ+ЛПВ“ задач на устойчивость продольно сжимаемой цилиндрической оболочки на границе разномодульных винклеровских сред, в том числе

— оболочки постоянной толщины по теории Кирхгофа;

— оболочки переменной толщины по теории Кирхгофа;

— оболочки постоянной толщины по теории Маргера-Тимошенко и теории Маргера-Журавского.

3. Решение задачи на устойчивость осесимметрично деформируемой круглой пластины на границе разномодульных винклеровских сред под действием равномерно распределенной по граничному контуру сжимающей радиальной нагрузки.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми. Предложен комбинированный алгоритм поиска части собственного спектра положительно однородного оператора, с помощью которого решен ряд задач, решения которых выносятся на защиту.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчете на устойчивость элементов машин и механизмов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийской научной конференции с международным участием „Математическое моделирование и краевые задачи“ (СамГТУ, г.Самара, 2008), на научной конференции-семинаре „Теория управления и математическое моделирование“ (ИжГТУ, г.Ижевск, 2008), на I Всероссийской молодежной научной конференции „Молодежь и наука на Севере“ (КНЦ УрО РАН, г.Сыктывкар, 2008), а также на ежегодных научных конференциях „Февральские чтения“ (СыктГУ, г.Сыктывкар) в 2005-2008 г.г.

Полностью работа докладывалась на кафедре математического моделирования и кибернетики Сыктывкарского университета (24 октября 2008 г.) и на научном семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета (13 но-

ября 2008 г).

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [1-9]. Статьи [1, 2] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. В работе [1] научным руководителем Е.И.Михайловским дана общая постановка задачи. Соискателю принадлежит алгоритм локального перебора вариантов и его численная реализация. Работы [8, 9] выполнены совместно с учениками соискателя.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 87 наименований. Включает 6 рисунков. Общий объем работы — 89 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность и цели работы, перечислены выносимые на защиту научные результаты диссертации и дан обзор литературы по теме диссертации.

В **первом разделе** приведены известные сведения, на которые в дальнейшем делаются ссылки при изложении основного материала.

В *подразделе 1.1* изложены основные сведения из нелинейной теории жесткогибких оболочек, учитывающей трансверсальные деформации, в том числе одноименные сдвиги как по модели С.П.Тимошенко, так и по модели Д.И.Журавского. Сформулирован основанный на этой теории **М**-алгоритм² учета трансверсальных деформаций в различных кирхгофовских вариантах теории оболочек. **М**-алгоритм иллюстрирован уточнением нелинейной теории пологих оболочек Маргера. Приводится полудеформационный вариант граничных величин, с использованием которого уточненная система уравнений Маргера является замкнутой. В дальнейшем используются следующие³ основные уравнения названной системы для цилиндрической оболочки:

$$d_{\circ}\Delta^2 w + R \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\Psi - \frac{kh_{\psi}^2}{R^2} \Delta \Psi \right) = f + \left(I - \frac{kh_{\psi}^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(w, \Psi)$$

²Михайловский Е.И. Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 с.

³Михайловский Е.И. Нелинейная теория жесткогибких оболочек типа Журавского // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер.1. Мат.Мех.Инф. Вып. 7. 2007. С. 77-100.

$$-EhR \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \Delta^2 \Psi = -\frac{1}{2} Eh \Lambda(w, w), \quad (1)$$

где

$$k = \begin{cases} 0 & \text{— теория Маргера} \\ 1 & \text{— теория Маргера-Тимошенко} \\ 15/8 & \text{— теория Маргера-Журавского;} \end{cases}$$

$$f = R^4 \left(q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta q_n \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2},$$

$$\Lambda(w, \Psi) = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}. \quad (1')$$

В *подразделе 1.2* приводятся иллюстрации постановки задач на устойчивость в условиях конструктивной нелинейности, обусловленной наличием односторонних связей в виде разномодульных винклеровских сред.

Пусть шарнирно опертая цилиндрическая оболочка длиной l нагружена продольной силой P и находится на границе раздела двух упругих сред с жесткостями c_1 и c_2 , реагирующих на прогибы оболочки как простые винклеровские основания. В случае осесимметричного выпучивания рассматриваемой оболочки приходим к проблеме определения (собственных) таких значений нагрузки P , при которых краевая задача (см. уравнение (1) при $k = 0$)

$$w^{IV} + 4b^4 w - \frac{R^4}{d_o} q_n = -\frac{R^2}{d_o} P w''$$

$$w(0) = w(\xi_o) = 0, \quad w''(0) = w''(\xi_o) = 0 \quad (2)$$

$$(4b^4 = 12(1 - \nu^2)R^2/h^2)$$

имеет нетривиальное решение.

В уравнении (2)₁ штрихом обозначена производная по $\xi = x_1/R$; $q_n = -c_1 w_+ - c_2 w_-$, $w_+ = \max\{0, w\}$, $w_- = \min\{0, w\}$ — срезки функции $w(\xi)$ (прогиба); $\xi_o = l/R$, d_o — цилиндрическая жесткость оболочки, R — радиус, h — толщина стенки, ν — коэффициент Пуассона.

Особенностью задачи (2) является то, что она обладает существенной (неустранимой) нелинейностью, обусловленной срезками функции $w(\xi)$.

Если $c_1 = c_2 = c$, то $c_1 w_+ + c_2 w_- = c(w_+ + w_-) = c w$ и (2) переходит в известное уравнение осесимметричного выпучивания цилиндрической оболочки в однородной винклеровской среде.

Полная потенциальная энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} F(w, w', w'') d\xi, \quad (3)$$

где

$$F = \frac{d_0}{R^4} w''^2 + \frac{Eh}{R^2} w^2 - \frac{P}{R^2} w'^2 + c_1 \begin{cases} w^2, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} + c_2 \begin{cases} 0, & w \geq 0 \\ w^2, & w < 0 \end{cases}.$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{2Eh}{R^2} w + c_1 \begin{cases} 2w, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} + c_2 \begin{cases} 0, & w \geq 0 \\ 2w, & w < 0 \end{cases} = \\ &= \frac{2Eh}{R^2} w + 2c_1 w_+ + 2c_2 w_- \end{aligned}$$

и разделив, полученное выражение на d_0/R^4 приходим к уравнению (2), которое является уравнением Эйлера-Пуассона для интеграла (3).

Таким образом, спектральную краевую задачу (2) можно переформулировать так: найти такие значения параметра P , при которых вариационная проблема

$$\Pi(w) \rightarrow \min_w, \quad (4)$$

$$w(0) = w(\xi_0) = 0, \quad w''(0) = w''(\xi_0) = 0.$$

имеет нетривиальное решение.

С помощью конечно-разностных отношений приходим в (3) к конечно-номерному случаю, определяем соответствующие операторы в конечно-номерном пространстве и получаем выражение для полной энергии

$$\Pi(\tilde{w}) = \frac{1}{2} \tilde{w}^\oplus A \tilde{w} + \frac{1}{2} \tilde{w}^\oplus C \tilde{w} - \frac{1}{2} \lambda \tilde{w}^\oplus Q \tilde{w}, \quad (5)$$

Используя необходимое условие минимума функционала (5)

$$\nabla_{\tilde{w}} \Pi = A \tilde{w} + C \tilde{w} - \lambda Q \tilde{w} = 0.$$

приходим к задаче, которая сводится к отысканию чисел λ , при которых система уравнений

$$A \tilde{w} + C_1 \tilde{w}_+ + C_2 \tilde{w}_- = \lambda Q \tilde{w} \quad (6)$$

имеет нетривиальное решение. В данном случае A , Q – симметричные, строго положительно определенные матрицы; C_1, C_2 – диагональные матрицы с неотрицательными элементами $c_{1,i}, c_{2,i}, i \in 1 : m - 1$;

$$\begin{aligned}\tilde{w}_+ &= [w_{1+}, w_{2+}, \dots, w_{m+}]^\oplus, \quad w_{i+} = \max\{0, w_i\}, \\ \tilde{w}_- &= [w_{1-}, w_{2-}, \dots, w_{m-}]^\oplus, \quad w_{i-} = \min\{0, w_i\},\end{aligned}$$

где \oplus – знак транспонирования.

В *подразделе 1.3* рассматривается локальный метод поиска собственных чисел положительно однородного оператора. Названный метод сводится к решению последовательности задач минимизации выпуклого функционала при линейных ограничениях и дает какое–либо, не обязательно минимальное собственное число. К минимальному собственному числу алгоритм будет сходиться при наличии достаточно хорошего начального приближения.

В *подразделе 1.4* изложена сущность комбинированного алгоритма перебора вариантов, составляющего основу данной работы.

Для построения части собственного спектра уравнения (6) можно применить алгоритм *полного перебора вариантов* (ППВ) возможных форм изгиба в соответствии с принятой сеткой, который (алгоритм) заключается в следующем:

– перебираются все 2^{m-1} возможных представлений вектора формы

$$b = [b_1, \dots, b_{m-1}]^\oplus$$

где

$$b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0; \\ 0, & w_i \leq 0; \end{cases} \quad (7)$$

– для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения детерминированного (все компоненты вектора формы известны) уравнения (6);

– запоминается собственная пара (число и форма), для которой форма изгиба $\tilde{w}^{(i)}$ или $-\tilde{w}^{(i)}$ согласуется с выбранным вектором формы.

Применяем алгоритм ППВ увеличивая число узлов сетки, до тех пор, пока качественная конфигурация собственной формы искомого собственного числа не стабилизируется. Собственную форму, имеющую устойчивый с ростом m вид графика, будем называть *качественно адекватной*.

После определения качественно адекватной собственной формы, применяем алгоритм *локального перебора вариантов* (ЛПВ) [1], взяв за начальное приближение, полученную качественно адекватную собственную форму.

1) Последовательно удваиваем число узлов сетки путем деления интервалов пополам и выполняем перебор вариантов лишь вблизи корней последнего приближения к искомой собственной форме; если же график приближенной собственной формы не пересекает ось ξ , то выполняем дробление сетки без перебора вариантов.

При этом могут быть использованы две схемы ЛПВ.

Первая схема ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком приближенной собственной формы оси ξ не выйдет за пределы интервала, в котором она располагалась до удвоения числа узлов сетки. По этой схеме для каждого корня собственной формы реализуются два варианта вычислений:

$$1) b_{2i+1} = 1, 2) b_{2i+1} = 0.$$

Остальные компоненты вектора формы не варьируются, т.е.

$$\begin{aligned} b_j = 1, b_{j+1} = 1 &\Rightarrow b_{2j} = 1, b_{2j+1} = 1, b_{2j+2} = 1, \\ b_k = 0, b_{k+1} = 0 &\Rightarrow b_{2k} = 0, b_{2k+1} = 0, b_{2k+2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вторая схема ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком собственной формы оси ξ может выйти за пределы интервала, в котором она располагалась до удвоения числа узлов сетки. Вторая схема сводится к перебору четырех вариантов для каждого корня предыдущего приближения к соответствующей собственной форме. Если $b_i = 1, b_{i+1} = 0$, где (ξ_i, ξ_{i+1}) – интервал, содержащий точку пересечения графиком качественно адекватной собственной формы оси ξ , то реализуются следующие варианты вычислений:

- 1) $b_{2i} = 0, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 0$;
- 2) $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 0$;
- 3) $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 0$;
- 4) $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 1$,

иначе $0 \Rightarrow 1$. Остальные компоненты вектора формы не варьируются (см. (8)).

2) Процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой (и достижимой) точностью.

Второй раздел посвящен рассмотрению задач на устойчивость одномерных элементов конструкций на границе разномодульных винклеровских сред. Учитывая, что задачи на продольную устойчивость стержня, цилиндрически изгибаемой пластины и осесимметрично изгибаемой цилиндрической оболочки таковы, что зная решение одной можно получить решения остальных, в данном разделе ограничились рассмотрением шарнирно опертой цилиндрической оболочки.

В *подразделе 2.1* рассмотрена круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины, которая находится на границе раздела двух винклеровских сред. Выполнив замену переменных по формулам

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi R}{l} \xi, \quad \lambda = \frac{Pl^2}{\pi^2 d_o}, \quad k_i = \frac{l^4}{\pi^4 d_o} c_i + \frac{4b^4 l^4}{R^4 \pi^4}, \quad i = 1, 2$$

вместо функционала (4) будем рассматривать следующий:

$$\Pi_1(w) \triangleq \frac{l^3}{\pi^3 d_o} \Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [w''^2 - \lambda w'^2 + k_1 (w_+)^2 + k_2 (w_-)^2] d\tilde{\xi}.$$

Для случая шарнирного опирания результаты расчетов первого собственного числа и отвечающей ему собственной формы с применением локального метода при $m = 34$ и алгоритма „ППВ($m = 8$) + ЛПВ($m = 16, 32$)“ (при приведенных параметрах — задачи идентичны) представлены в табл.1. При этом безразмерный параметр k_1 фиксировался ($k_1 = 16$), а — k_2 увеличивался от $k_2 = 18$ до $k_2 = 810$. Из табл.1 видно, что полуволна $w < 0$ с ростом k_2 как бы вытесняется в сторону среды меньшей жесткости. Учитывая, что оба реализованные метода оценивают собственные числа сверху, из табл.1 усматривается также, что комбинированный алгоритм дает более точную оценку для первого собственного числа, так как $\lambda_1(k_2) < P_I(k_2)$ (для первого собственного числа, вычисленного локальным методом, сохранено обозначение — P_I , принятое в книге⁴).

⁴ Тарасов В. Н., Холмогоров Д. В. Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем/Под ред. проф. Е.И. Михайловского. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2001. 189 с.

Таблица 1.

k_2	Локальный метод ($m = 34$)	Алгоритм "ППВ+ЛПВ" ($m = 32$)	
	P_I	λ_1	Собственная форма
18	8.338	8.309	
90	9.842	9.797	
150	9.956	9.909	
270	10.033	9.985	
450	10.075	10.025	
810	10.105	10.055	

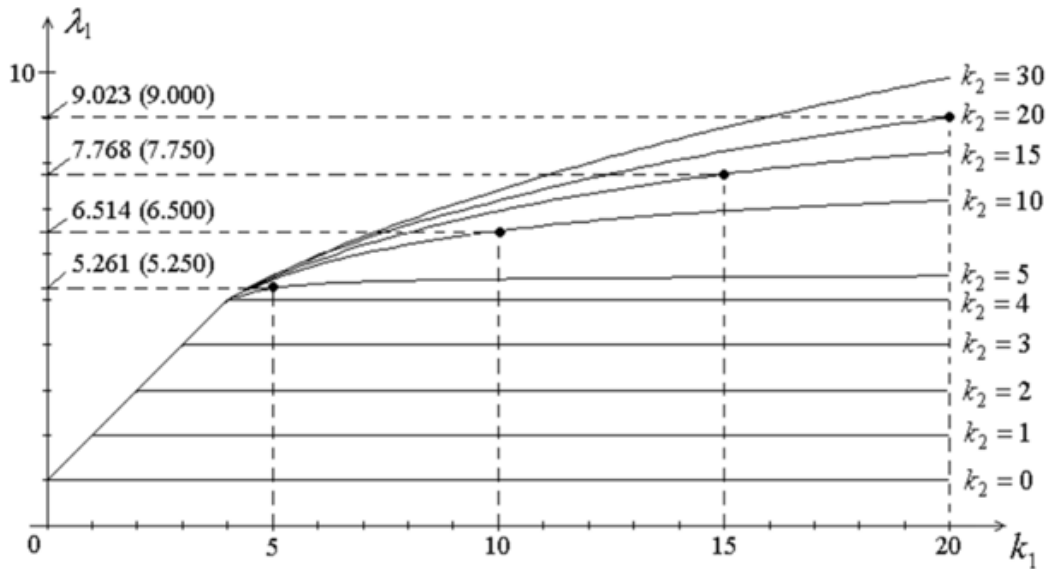


Рис.1.

На рис.1 представлены графики функции $\lambda_1(k_1)$, вычисленной с использованием алгоритма "ППВ+ЛПВ" на сетке $m = 64$ при фиксированных значениях k_2 ($0 \leq k_2 \leq 30$). Тот факт, что названные графики

плавно переходят в точки, достаточно хорошо согласующиеся с формулой для аналитического решения в случае однородной упругой среды при $k_1 = k_2 = 5, 10, 15, 20$, косвенно подтверждает правильность выполненных расчетов (на рис.1 в скобках указаны точные значения $\lambda_1(k)$).

В *подразделе 2.2* приведены расчеты для круговой цилиндрической оболочки переменной толщины ($h(\tilde{\xi}) = h_0 s(\tilde{\xi})$) на границе раздела двух винклеровских сред выполним замену переменных в функционале (3) по формулам

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi R}{l} \xi, \quad \lambda = \frac{Pl^2}{d_0 \pi^2}, \quad \beta_i = k_i + \frac{Eh_0 l^4}{R^2 \pi^4 d_0} s(\tilde{\xi}), \quad k_i = \frac{l^4}{d_0 \pi^4} c_i, \quad i = 1, 2,$$

будем иметь:

$$\frac{l^3}{d_0 \pi^3} \Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[s^3(\tilde{\xi}) w'^2 - \lambda w'^2 + \beta_1(\tilde{\xi}) (w_+)^2 + \beta_2(\tilde{\xi}) (w_-)^2 \right] d\xi,$$

где

$$s(\tilde{\xi}) = 2 \sin \left(\varepsilon \tilde{\xi} + \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon) \right).$$

После перехода к конечномерной аппроксимации приходим к задаче (6). Применим комбинированный алгоритм „ППВ+ЛПВ“ при $\varepsilon = 0.2$, $l/R = 5$, $l = \pi$ и фиксируя значение $k_2 = 20$. Значение параметра k_1 изменяем от 10 до 20. Результаты расчетов представлены в таблице 2.

Таблица 2.

m	λ_1				
	$k_1 = 10$ $k_2 = 20$	$k_1 = 15$ $k_2 = 20$	$k_1 = 17$ $k_2 = 20$	$k_1 = 19$ $k_2 = 20$	$k_1 = k_2 = 20$
8	8.723	9.921	10.319	10.673	10.833
16	7.638	8.652	9.002	9.319	9.459
32	7.391	8.358	8.697	9.011	9.152
64	7.330	8.286	8.621	8.933	9.077
128	7.314	8.269	8.606	8.917	9.062
256	7.311	8.264	8.602	8.911	9.060

Разрешающее уравнение задачи об устойчивости круглой жестко заземленной пластины под действием равномерной радиальной нагрузки на границе двух винклеровских сред, рассматриваемой в *подразделе 2.3*,

имеет вид

$$w^{IV} + \frac{2}{\xi}w''' - \frac{1}{\xi^2}w'' + \frac{1}{\xi^3}w' + k_1w_+ + k_2w_- =$$

$$= -\lambda(w'' + \frac{1}{\xi}w'), \quad w' \triangleq \frac{dw}{d\xi}, \quad \xi \in [0, \pi],$$

где $\xi = \frac{\pi}{R}r$, $\lambda = \frac{PR^2}{\pi^2d_o}$, $k_i = \frac{R^4}{\pi^4d_o}c_i$, $i = 1, 2$.

Значения первых трех собственных чисел при жесткой заделке и $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0$ приведены в таблице 3.

Таблица 3.

m	λ_1	λ_2	λ_3	Алгоритм
10	1.762	6.135	14.498	ППВ
20	1.640	5.386	11.579	ЛПВ
40	1.594	5.162	10.886	ЛПВ
80	1.573	5.076	10.656	ЛПВ
160	1.571	5.034	10.523	ЛПВ

Собственная форма первого собственного числа не имеет точек пересечения с осью ξ , поэтому расчет для λ_1 производился последовательным удвоением числа узлов сетки.

При $k_1 = k_2 = 0$ задача (жесткая заделка) была решена Дж. Брайаном и получены формулы для критических сил

$$T_{бр}^{(1)} = \frac{14.68d_o}{R^2}, \quad T_{бр}^{(2)} = \frac{49.15d_o}{R^2}, \quad T_{бр}^{(3)} = \frac{103.17d_o}{R^2}.$$

Так как $P^{(i)} = \frac{\lambda_i d_o \pi^2}{R^2}$, имеем

$$\lambda_1 = 14.68/\pi^2, \quad \lambda_2 = 49.15/\pi^2, \quad \lambda_3 = 103.17/\pi^2. \quad (9)$$

Полученные значения при $m = 160$ (табл.3) согласуются с аналитическими (9).

В **третьем разделе** излагается полученное соискателем решение задачи на устойчивость продольно сжатой цилиндрической оболочки на границе разномодульных винклеровских сред, при учете в ней (оболочке) поперечных сдвигов по моделям Тимошенко и Журавского.

Основное уравнение теории Маргера-Тимошенко ($k = 1$) и теории Маргера-Журавского ($k = 15/8$) для осесимметричной деформации с учетом того, что $T_{11} = -P = const$ принимает вид

$$\begin{aligned} & w^{IV} - 2(1 + \nu)kw'' + 4b^4w = \\ & = \frac{R^4}{d_o}(q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2}q_n'') - \frac{PR^2}{d_o}(w'' - \frac{kh_\psi^2}{R^2}w^{IV}). \end{aligned} \quad (10)$$

(Штрихом помечены производные по $\xi \in [0, l/R]$).

Вариант граничных условий шарнирно опертого края можно записывать в том же виде, что и в классической теории оболочек:

$$w(0) = w(\pi) = 0, \quad w''(0) = w''(\pi) = 0. \quad (11)$$

Уравнению (10) можно придать вид:

$$-\mu_*w^{IV} = L_0W, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_* &= \frac{\pi^2\mu h}{kl^2}, \quad L_0W = W'' - \frac{\varkappa^2}{\pi^2}W, \quad W = \tilde{q} - \lambda w'', \\ \tilde{q} &\triangleq q_n - \frac{Eh}{R^2}w, \quad \varkappa^2 = \frac{l^2}{kh_\psi^2}, \quad \lambda = \frac{P\pi^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (12')$$

На основании соотношений (11) и (12') функция $W(\xi)$ удовлетворяет условиям $W(0) = W(\pi) = 0$.

С тем, чтобы уйти от дифференцирования нагрузки q_n , обратим оператор L_0 . Для этого найдем функцию Грина из краевой задачи

$$\begin{aligned} L_0G &\equiv \frac{d^2G}{d\xi^2} - \frac{\varkappa^2}{\pi^2}G = \delta(\xi - \alpha); \\ G(0) &= G(\pi) = 0. \end{aligned}$$

В окончательном виде преобразованное уравнение (12) можно представить так (см. форм. (12')):

$$\begin{aligned} & \frac{\varkappa^3\mu_*}{\pi^3} \left(\frac{\text{sh } \frac{\varkappa\xi}{\pi}}{\text{sh } \varkappa} \int_0^\pi \text{sh } \frac{\varkappa}{\pi}(\pi - \alpha)w(\alpha)d\alpha - \right. \\ & \left. - \int_0^\xi \text{sh } \frac{\varkappa}{\pi}(\xi - \alpha)w(\alpha)d\alpha \right) + \mu_*w'' + k_1w_+ + k_2w_- = -\lambda w'', \end{aligned} \quad (14)$$

где $k_i = (c_i + \frac{Eh}{R^2}) \frac{l^4}{\pi^4 d_0}$.

Для нахождения наименьшего собственного числа уравнения (14) используем алгоритм при $l = \pi$, $h = 0.05$, $k = 1$ (в скобках значение λ_1 при $k = 15/8$). Соответствующие расчеты приведем в табл. 4.

Таблица 4.

m	λ_1			
	$k_1 = 3$ $k_2 = 4$	$k_1 = 3.5$ $k_2 = 4$	$k_1 = 3.95$ $k_2 = 4$	$k_1 = k_2 = 4$
8	9.045 (9.032)	9.547 (9.533)	9.954 (9.936)	10.009 (9.998)
16	7.930 (7.918)	8.345 (8.331)	8.822 (8.808)	8.898 (8.880)
32	6.732 (6.721)	7.240 (7.228)	7.732 (7.719)	7.803 (7.792)
64	5.956 (5.943)	6.461 (6.450)	6.959 (6.944)	6.145 (6.134)
128	5.471 (5.460)	5.986 (5.977)	6.533 (6.515)	6.589 (6.578)
256	5.454 (5.443)	5.944 (5.923)	6.486 (6.475)	6.544 (6.533)

Как видно из табл.4 при изменении коэффициента k_1 от 3 до 4 ($k_2 = 4$) значение критической силы плавно изменяется, стремясь к значению при $k_1 = k_2 = 4$. Это обстоятельство является косвенным подтверждением сходимости комбинированного алгоритма „ППВ+ЛПВ“.

В **заключении** формулируются основные результаты работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Михайловский Е. И., Тулубенская Е. В. Алгоритм локального перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе винклеровских сред // Механика и процессы управления: Тр. XXXVII Уральского семинара, посвященного 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра „КБ им. академика В.П. Макеева“. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 109–116.
- [2] Тулубенская Е. В. Об устойчивости одномерных элементов конструкций на границе винклеровских сред // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Вып.2, 2008. С. 183–184.
- [3] Тулубенская Е. В. Устойчивость продольно сжатой цилиндрической оболочки на границе винклеровских сред // Труды пятой Всерос-

сийской научной конференции с международным участием „Математическое моделирование и краевые задачи“. Ч.1. Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. С. 330-332.

- [4] *Тулубенская Е.В.* Метод перебора вариантов в задаче об устойчивости пластины Тимошенко на границе упругих сред. Материалы V юбилейной международной молодежной научной конференции "Севергеоэкотех - 2004". Ухта: 2004.
- [5] *Тулубенская Е.В.* Алгоритм перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе двух винклеровских сред. Материалы VI международной молодежной научной конференции "Севергеоэкотех - 2005". Ухта: УГТУ, 2006. С.189-191.
- [6] *Тулубенская Е.В.* Учет трансверсальных сдвигов в задаче об устойчивости пластины при односторонних ограничениях. Тез. докл. XV Коми республиканской молодежной конференции. Том I. Сыктывкар: Изд-во Коми научного центра УрО РАН, 2004. С. 17-19.
- [7] *Тулубенская Е.В.* Проблема устойчивости круглой пластины на границе упругих сред. // Труды I Всероссийской молодежной научной конференции "Молодежь и наука на Севере". Сыктывкар, 2008. Том 1. С. 16-17.
- [8] *Тулубенская Е.В., Каргин Р.В.* Устойчивость стержня переменной жесткости при односторонних ограничениях на перемещения. // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Инф. Вып.8. 2008. С.141-148.
- [9] *Тулубенская Е.В., Логинов Д.В.* Устойчивость круглой пластины на границе двух винклеровских сред // В сб.: Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела/Тр. научн. школы акад. В.В. Новожилова. СПб: СПбГУ, 2004. Вып. 8. С.162-166.