САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ТИХОМИРОВ Сергей Борисович

ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ В ГЛАДКИХ ПОТОКАХ

01.01.02 Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пилюгин Сергей Юрьевич.
Официальные оппоненты:	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Леонов Геннадий Алексеевич (Санкт-Петербургский государственный университет), кандидат физико-математических наук, доцент Бегун Евгения Николаевна (Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения).
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”.

Защита диссертации состоится “ ” 200 года в час. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199048, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 14 линия, д. 29, математико-механический факультет, ауд. 13.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Автореферат разослан “ ” 200 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Архипова А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации изучаются различные свойства отслеживания для векторных полей и порожденных ими динамических систем (потоков). Задача об отслеживании псевдотраекторий в самом общем виде связана со следующим вопросом: при каких условиях для любой псевдотраектории динамической системы можно найти близкую к ней траекторию?

Для нелинейных динамических систем нахождение их траекторий в явном виде возможно только в исключительных случаях, поэтому для исследования таких систем используются численные методы. При этом из-за ошибок округления в результате вычислений получаются последовательности, соответствующие псевдотраекториям. Таким образом, если поток обладает свойством отслеживания, то результаты компьютерного моделирования отражают поведение траекторий исходной динамической системы. Данный факт делает изучение свойства отслеживания актуальным не только для теоретических исследований, но и для практических применений.

Изучение задачи об отслеживании было начато Д. В. Аносовым [1] и Р. Боуэном [2]. Современное состояние теории отслеживания в значительной степени отражено в монографиях [3, 4]. Одним из важнейших результатов теории отслеживания является так называемая shadowing lemma, утверждающая, что в малой окрестности гиперболического множества диффеоморфизма выполняется свойство отслеживания. Позднее было доказано, что структурно устойчивые диффеоморфизмы обладают свойством отслеживания. Аналогичный результат верен и для векторных полей.

Основное отличие задачи об отслеживании для потоков от аналогичной задачи для дискретных динамических систем, порождаемых диффеоморфизмами, состоит в необходимости репараметризации отслеживающих траекторий. В данной диссертации изучаются липшицево, стандартное, ориентированное и орбитальное свойства отслеживания.

Основным вопросом для нас является вопрос о структуре множества векторных полей, обладающих различными видами свойства отслеживания. Мы рассматриваем не сами множества векторных полей, обладающих тем или иным свойством отслеживания, а их $\mathbf{C}^1$-внутренности, т.е. множества таких векторных полей, которые обладают свойством отслеживания вместе с их малыми (в $\mathbf{C}^1$-метрике) возмущениями.

Цель работы. Основной целью работы является изучение $\mathbf{C}^1$-внутренностей множеств векторных полей, обладающих различными видами свойства отслеживания.

Методика исследования. Для получения результатов используются методы теории динамических систем, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и др.

Научная новизна и значимость работы. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Выделим основные из них:

- доказано, что $\mathbf{C}^1$-внутренность множества векторных полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых векторных полей,
- доказано, что если размерность многообразия не превышает 3, то $\mathbf{C}^1$-внутренность множества векторных полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых векторных полей,
- доказано, что $\mathbf{C}^1$-внутренность множества векторных полей без точек покоя, обладающих орбитальным свойством отслеживания, состоит лишь из структурно устойчивых векторных полей,
- введен специальный класс $\mathcal{B}$ векторных полей, и доказано, что $\mathbf{C}^1$-внутренность множества векторных полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания и не являющихся векторными полями класса $\mathcal{B}$, состоит лишь из структурно устойчивых векторных полей.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты важны для общей теории динамических систем. Также полученные результаты могут быть использованы при интерпретации результатов численного моделирования гладких потоков.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

– Научная сессия МИАН-ПОМИ “Динамические системы”, Декабрь 2007, Москва, Россия.

– Школа-конференция “School and Workshop on Dynamical Systems”, Июль 2008, Триест, Италия.

– Семинар “Nonlinear Dynamics”, Free University Berlin, Октябрь 2008, Берлин, Германия.

Основное содержание диссертации изложено в работах автора [5], [6]. В работе [5] научному руководителю принадлежит постановка задачи и общая идея метода решения; реализация метода проведена автором. Статьи [5],[6] опубликованы в изданиях, включенных в Перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа объемом 111 машинописных страниц состоит из введения, трех глав, одного приложения и списка литературы, содержащего 25 наименований. Первая глава включает 5 параграфов, вторая и третья – по 2 параграфа.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор исследуемых математических объектов и сформулированы основные результаты диссертационной работы, приведено сравнение результатов диссертации с аналогичным исследованием для случая дискретных динамических систем.

В первой главе изучается структура $\mathbf{C}^1$-внутренности множества векторных полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания.

Рассмотрим компактное гладкое многообразие без края M с римановой метрикой dist. Пусть X – гладкое векторное поле на M и $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ — поток, порожденный данным векторным полем. Введем обозначение $O(x, \phi) = \{\phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$. Пусть R – произвольное подмножество многообразия M. Через $\operatorname{Cl} R$ будем обозначать замыкание множества R.

Обозначим через $\mathcal{F}(M)$ пространство гладких векторных полей на M с топологией, порожденной C^1-метрикой. Для любого множества $A \subset \mathcal{F}(M)$ будем через $\operatorname{Int}^1(A)$ обозначать внутренность множества A в данной топологии. Для векторного поля X обозначим через $\operatorname{Per}(X)$ множество точек покоя и замкнутых траекторий поля X. Для гиперболической траектории $p \in \operatorname{Per}(X)$ будем обозначать через $W^s(p)$ и $W^u(p)$ ее устойчивое и неустойчивое многообразия.

Рассмотрим произвольное $d > 0$. Отображение $g(t) : \mathbb{R} \to M$ будем называть *d-псевдотраекторией* векторного поля X и потока ϕ, если для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t \in [-1, 1]$ выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}(g(t_0 + t), \phi(t, g(t_0))) < d. \tag{1}$$

Основное отличие задачи об отслеживании для потоков от аналогичной задачи для дискретных динамических систем, порождаемых диффеоморфизмами, состоит в необходимости репараметризации отслеживающих траекторий.

Назовем *репараметризацией* такой возрастающий гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $h(0) = 0$.

Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают *ориентированным свойством отслеживания*, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории g можно указать такие точку p и репараметризацию h, что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(\phi(h(t), p), g(t)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим множество векторных полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания, через OrientSh.

В параграфе 1 изучается вопрос о гиперболичности точек покоя и замкнутых траекторий векторного поля X, лежащего в $\mathbf{C}^1$-внутренности множества векторных полей, обладающих свойством отслеживания.

Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают *орбитальным свойством отслеживания*, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории g можно указать такую точку p, что выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}_H(\operatorname{Cl} O(x,p), \operatorname{Cl}\{g(t) :\ t \in \mathbb{R}\}) < \varepsilon,$$

где dist_H – расстояние по Хаусдорфу. Обозначим множество векторных полей, обладающих орбитальным свойством отслеживания, через OrbitSh.

Теорема 1. *Пусть* $X \in \operatorname{Int}^1(\text{OrbitSh})$. *Тогда все точки покоя и замкнутые траектории векторного поля* X *гиперболичны.*

В параграфе 2 изучаются свойства гетероклинических траекторий векторных полей $X \in \operatorname{Int}^1(\text{OrientSh})$.

Будем говорить что матрица A принадлежит классу $\mathcal{K}$, если все ее собственные числа имеют ненулевые вещественные части. Отметим, что точка покоя p является гиперболической, если матрица Якоби $\mathrm{D}\, X(p) \in \mathcal{K}$. Обозначим через $\mathcal{K}_1^+$ множество матриц $A \in \mathcal{K}$, у которых есть такое вещественное собственное число $a_1 > 0$, что если $c_1 + d_1 i$ – собственное число матрицы A с $c_1 > 0$ и $d_1 \neq 0$, то $c_1 > a_1$. Обозначим через $\mathcal{K}_2^+$ множество матриц $A \in \mathcal{K}$, для которых найдется такая пара комплексно сопряженных собственных чисел $a_1 \pm b_1 i$ с $a_1 > 0$, что если $c_1 > 0$ – собственное число матрицы A, то $c_1 > a_1$. Обозначим через $\mathcal{K}_1^-$ множество таких матриц $A \in \mathcal{K}$, что $-A \in \mathcal{K}_1^+$. Аналогично, обозначим через $\mathcal{K}_2^-$ множество таких матриц $A \in \mathcal{K}$, что $-A \in \mathcal{K}_2^+$.

В главе 1 доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $X \in \operatorname{Int}^1(\mathrm{OrientSh})$, γ_1 *– замкнутая траектория векторного поля* X, *а* $\gamma_2 \in \operatorname{Per}(X)$. *Пусть* $r_0 \in W^s(\gamma_1) \cap W^u(\gamma_2)$. *Тогда* r_0 *– точка трансверсального пересечения* $W^s(\gamma_1)$ *и* $W^u(\gamma_2)$.

Лемма 2. *Пусть* $X \in \operatorname{Int}^1(\mathrm{OrientSh})$, p_1 *– точка покоя векторного поля* X, $\gamma_2 \in \operatorname{Per}(X)$ *и* $\mathrm{D}\,X(p_1) \in \mathcal{K}_1^+$. *Пусть* $r_0 \in W^s(p_1) \cap W^u(\gamma_2)$. *Тогда* r_0 *– точка трансверсального пересечения многообразий* $W^s(p_1)$ *и* $W^u(\gamma_2)$.

Для формулировки основного результата данной главы (теорема 2) нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что векторное поле X принадлежит классу $\mathcal{B}$, если у него есть две гиперболические точки покоя p_1 и p_2 (не обязательно различные), обладающие следующими свойствами:

(1) матрица $\mathrm{D}\,X(p_1) \in \mathcal{K}_2^+$,

(2) матрица $\mathrm{D}\,X(p_2) \in \mathcal{K}_2^-$,

(3) существует траектория нетрансверсального пересечения многообразий $W^u(p_2)$ и $W^s(p_1)$.

Обозначим множество структурно устойчивых векторных полей через S.

Теорема 2. $\operatorname{Int}^1(\mathrm{OrientSh} \setminus \mathcal{B}) \subset S$.

В параграфах 3 и 4 завершается доказательство лемм 1 и 2.

В параграфе 5 доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\dim M \leq 3$, *то выполнено равенство*

$$\operatorname{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) = S.$$

Во второй главе изучается структура $\mathbf{C}^1$-внутренности множества векторных полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания.

Для $a > 0$ обозначим через $\operatorname{Rep}(a)$ множество репараметризаций $h(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{h(t_1) - h(t_2)}{t_1 - t_2} - 1 \right| \leq a \quad \text{для} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \neq t_2.$$

Будем говорить, что векторное поле X и поток ϕ обладают *липшицевым свойством отслеживания*, если существуют константы $L_0, D_0 > 0$, обладающие следующим свойством: для любых $d < D_0$ и d-псевдотраектории g можно указать такие точку p и репараметризацию $h \in \mathrm{Rep}(L_0 d)$, что выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(\phi(h(t), p), g(t)) < L_0 d, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим множество векторных полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания, через LipSh.

В параграфе 1 изучается свойство отслеживания для двух специальных линейных потоков на плоскости и на прямой.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ поток $\varphi(t, x)$, порожденный линейной автономной системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{где } a > 0 \text{ и } b \neq 0. \tag{3}$$

Для точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ будем обозначать через $\arg(x)$ точку $x/|x| \in S^1$, где S^1 – окружность радиуса 1 с центром в точке 0.

Лемма 3. *Для любых $\varepsilon, L > 0$ существуют такие положительные числа $T = T(\varepsilon, L)$ и $d_0 = d_0(\varepsilon, L)$, что если*

$$d < d_0, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2, \quad |x_0| \geq d, \quad h(t) \in \mathrm{Rep}(Ld)$$

и

$$|\varphi(t, x_0) - \varphi(h(t), x_1)| < Ld \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

то выполнено неравенство $|\arg(x_1) - \arg(x_0)| < \varepsilon$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = ax$ на прямой и его поток $\varphi(t, x) = xe^{at}$.

Лемма 4. *Для любого $L > 0$ существует такое положительное число $T = T(L)$, что если для некоторых*

$$d > 0, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad |x_0| \geq d, \quad h(t) \in \mathrm{Rep}(Ld)$$

выполнено неравенство (4), то числа x_0 и x_1 одного знака.

В параграфе 2 доказана следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть p, q – гиперболические точки покоя векторного поля $X \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh})$ и $r_0 \in W^s(p) \cap W^u(q)$. Тогда r_0– точка трансверсального пересечения $W^s(p)$ и $W^u(q)$.*

С помощью этой леммы и теоремы 2 доказана следующая теорема, являющаяся одним из основных результатов диссертации.

Теорема 4. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) = S$.

В третьей главе изучается орбитальное свойство отслеживания.

В параграфе 1 изучается отслеживание псевдотраекторий специального вида. Предположим, что векторное поле $X \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{OrbitSh})$ не имеет точек покоя. Пусть псевдотраектория $g(t)$ удовлетворяет соотношению $g(t) = \phi(t, r)$ при $t < 0$ для некоторой точки $r \in W^u(\gamma_1)$, где γ_1 – замкнутая траектория векторного поля X. Предположим, что для некоторой точки x и $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}_H(\mathrm{Cl}\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\}, \mathrm{Cl}(O(x, \phi))) < \varepsilon. \tag{5}$$

В параграфе 1 приводятся условия, при которых из неравенства (5) следует включение $x \in W^u(\gamma_1)$.

В параграфе 2 приводится доказательство основной теоремы, описывающей структуру множества $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrbitSh})$. Пусть N – множество векторных полей без точек покоя.

Теорема 5. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrbitSh} \cap N) \subset S$.

В приложении А исследуется вопрос об эквивалентности введенных ранее различных видов свойства отслеживания. В данном разделе приведены примеры векторных полей, лежащих в множествах $\mathrm{StSh} \setminus \mathrm{LipSh}$ и $\mathrm{OrbitSh} \setminus \mathrm{OrientSh}$. Таким образом, показано, что свойства LipSh и StSh различны, а также различны свойства OrientSh и OrbitSh.

Приведен пример векторного поля на окружности с негиперболической точкой покоя, обладающего свойством StSh и не обладающего свойством LipSh.

Примером векторного поля, лежащего в $\mathrm{OrbitSh} \setminus \mathrm{OrientSh}$, является "иррациональная обмотка тора", т.е. постоянное векторное поле на торе $\mathbb{T}^2$, задаваемое равенством

$$X(x) = (\alpha, 1), \quad x \in \mathbb{T}^2,$$

где $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Список цитируемой литературы

1. *Аносов Д.В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Труды 5-й Межд. конф. по нелин. колеб. Киев. 1970. Т. 2. С. 39 – 45.

2. *Bowen R.* Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lect. Notes. Math. V. 470. Springer-Verlag. Berlin. 1975. 108 p.

3. *Palmer K.* Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications. Dordrecht-Boston-London. 2000. 299 p.

4. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in dynamical systems. Lect. Notes Math. V. 1706. Springer-Verlag. Berlin. 1999. 283 p.

Публикации автора по теме диссертации

5. *Пилюгин С. Ю., Тихомиров С. Б.* Множества векторных полей с различными свойствами отслеживания псевдотраекторий // Доклады АН. 2008. Т. 422. N. 1. С. 30-31.

6. *Тихомиров С. Б.* Внутренности множеств векторных полей со свойствами отслеживания, соответствующими некоторым классам репараметризаций // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 1. 2008. Вып. 4 С. 90-97.

Подписано к печати 26.12.08 Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая. Печ. л. 0,7.
Тираж 100 экз. Заказ 4367.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии химического факультета СПбГУ
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26
Тел.: (812)428-4043, 428-6919