САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СТАВРОВА Анастасия Константиновна

СТРОЕНИЕ ИЗОТРОПНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Вавилов Николай Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Рудаков Алексей Николаевич (Научно-исследовательский институт системных исследований РАН)
	доктор физико-математических наук Смирнов Александр Леонидович (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН)
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится « » .... 200 .. г. в .... часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Защита состоится по адресу: 191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, комн. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Автореферат разослан « » .... 200 .. г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория алгебраических групп является одной из важнейших областей современной алгебры. Она возникла в середине XX в. на стыке алгебраической геометрии, теории групп и теории Ли, и в настоящее время имеет обширные приложения как в этих, так и в других областях математики: теории конечных групп, теории чисел, теории инвариантов, теории дифференциальных уравнений и т. д. Центральное место в теории алгебраических групп занимают полупростые алгебраические группы и их непосредственное обобщение — редуктивные группы.

Основы теории редуктивных групп были заложены в 1950-х–1960-х годах в работах К. Шевалле, Ж. Титса, А. Бореля, А. Вейля, А. Гротендика, М. Демазюра и др. В частности, в 1956–1958 годах К. Шевалле получил классификацию полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем. Позднее Шевалле показал, что все полупростые группы над алгебраически замкнутым полем в действительности определены над $\mathbb{Z}$, или, иначе говоря, получаются в результате расширения базы из некоторых групповых схем над $\mathbb{Z}$, называемых схемами Шевалле—Демазюра. Группы точек схем Шевалле—Демазюра над коммутативными кольцами называются группами Шевалле. Частными случаями групп Шевалле являются расщепимые классические группы матриц $\mathrm{SL}_n(R)$, $\mathrm{SO}_n(R)$, $\mathrm{Sp}_n(R)$; конечные простые группы типа Ли $A_n(q)$–$G_2(q)$ являются центральными факторами групп Шевалле.

Не все классические группы матриц являются группами Шевалле, однако в наиболее важных случаях они являются группами точек некоторых редуктивных групповых схем. Групповая схема G над коммутативным кольцом R с 1 называется редуктивной (соответственно, полупростой), если она является аффинной и гладкой, и если все ее геометрические слои являются редуктивными (соответственно, полупростыми) группами в обычном смысле.

Изучению строения групп Шевалле как абстрактных групп посвящено огромное количество работ, и ключевую роль в подавляющем большинстве из них играет элементарная подгруппа $E(R)$ группы Шевалле $G(R)$, которая обычно определяется как подгруппа, порожденная всеми элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(\xi)$, где $\xi \in R$ и α пробегает систему корней группы Шевалле. Это понятие является прямым обобщением элементарной группы матриц $E_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_n(R)$, порожденной всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $\xi \in R$,

$1 \leq i \neq j \leq n$. Важнейшим свойством элементарной подгруппы $E(R)$ является ее нормальность в объемлющей группе $G(R)$. В частности, оно послужило отправной точкой для Г. Уайтхеда, Х. Басса и Дж. Милнора при построении алгебраической K-теории. Нормальность элементарной подгруппы в группах Шевалле ранга ≥ 2 была доказана в работах А. Суслина, В. Копейко, Фу-ан Ли, И. Абе, Дж. Таддеи к концу 1980-х годов.

В случае произвольной редуктивной групповой схемы G над коммутативным кольцом R группа точек $G(R)$ может не содержать полного набора элементарных корневых унипотентов, и данное выше определение элементарной подгруппы не может быть перенесено дословно. В случае, когда $R = k$ является полем, Ж. Титс определил группу $G^+(k)$ как подгруппу в $G(k)$, порожденную k-точками унипотентных радикалов всех параболических подгрупп в G, определенных над k. При таком определении ее нормальность очевидна, однако позднее А. Борелем и Ж. Титсом было показано, что группа $G^+(k)$ на самом деле порождается точками унипотентных радикалов любых двух параболических подгрупп G. Сходным образом, в случае нерасщепимых классических групп над кольцами Л. Васерштейн определил элементарную подгруппу как подгруппу, порожденную *всеми* трансвекциями Эйхлера–Зигеля–Диксона. Нормальность при этом также очевидна, однако Васерштейн доказывает, что элементарная подгруппа порождается трансвекциями специального вида. Для классических групп имеются также варианты определения элементарной подгруппы с использованием инволюции и "форменного параметра" (унитарные группы Бака), в этом случае нормальность доказана Л. Васерштейном и Хон Ю, А. Баком и Н. Вавиловым в 1995 г. Аналогичные результаты для "нечетных" унитарных групп были получены В. Петровым.

Теория алгебраических групп с самого своего возникновения была тесно связана с теорией алгебр Ли. В частности, упомянутая выше конструкция Шевалле полупростых групповых схем над $\mathbb{Z}$ основывается на существовании $\mathbb{Z}$-форм полупростых комплексных алгебр Ли и их фундаментальных представлений. Хорошо известно, что над полем характеристики 0 категория односвязных полупростых алгебраических групп эквивалентна категории полупростых алгебр Ли.

Пусть G — произвольная редуктивная групповая схема. Можно показать, что изотропность G эквивалентна существованию нетривиального действия на G 1-мерного расщепимого тора. Такое действие задает $\mathbb{Z}$-градуировку на алгебре Ли группы G. Поэтому теория изотропных редуктивных групп параллельна теории $\mathbb{Z}$-градуированных (или, более общо, $\mathbb{Z}^n$-градуированных) алгебр Ли. В свою очередь, $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры Ли тесно связаны с йордановыми алгебрами и другими алгебраическими структурами йорданова типа.

Понятие йордановой алгебры впервые возникло в 1934 г. в статье П. Йордана, Дж. фон Неймана и Е. Вигнера в контексте математической формализации квантовой механики. В 1960-х годах в ряде работ была объяснена тесная связь между йордановыми алгебрами и алгебрами Ли. В частности, И. Кантор и М. Кехер показали, что произвольную йорданову алгебру J можно вложить в $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли L, такую что $L_i = 0$ при $|i| > 1$ (так называемую 3-градуированную алгебру), таким образом, что $L_{\pm 1}$ — две копии алгебры J, а L_0 — внутренняя структурная алгебра Ли алгебры J.

В это же время стали возникать новые понятия, обобщающие понятие йордановой алгебры или близкие к нему по свойствам. Именно, К. Майберг определил йордановы тройные системы и тройные системы Фрейденталя. По тройной системе Фрейденталя можно построить 5-градуированную алгебру Ли, такую что L_{-2} и L_2 — модули ранга 1. Другие структуры, аналогичные йордановым алгебрам, но соответствующие 5-градуированным алгебрам Ли, изучались в работах Б. Эллисона, И. Кантора, О. Смирнова. Особую важность изучению 5-градуированных алгебр Ли придает тот факт, что простая комплексная алгебра Ли типа E_8 имеет естественную 5-градуировку, но не имеет, в отличие от простых алгебр Ли других типов, естественной 3-градуировки. Другим важным обобщением понятия йордановой алгебры является понятие йордановой пары, введенное О. Лоосом.

Эти понятия получили широкое обобщение в работах Е. Зельманова. Около 1985 г. Зельманов определил йорданову систему как набор модулей с полилинейными отображениями между ними, такой что эти модули являются подмодулями с ненулевым весом некоторой $\mathbb{Z}^n$-градуированной алгебры Ли, а полилинейные отображения индуцированы скобкой Ли. В 1990–2000-х годах йордановы системы изучались в работах Е. Зельманова, Дж. Бенкарт, С. Бермана и Р. Муди и других. В частности, в 2003 г. Дж. Бенкарт и О. Смирнов описали йордановы системы, отвечающие 5-градуированным алгебрам Ли над полем.

В своих работах 1978–79 годов О. Лоос также установил связь йордановых пар с алгебраическими группами. Именно, он показал, что существует естественное соответствие (фактически, эквивалентность категорий) между простыми йордановыми парами и присоединенными полупростыми группами с фиксированной парой противоположных параболических подгрупп, обладающих абелевыми унипотентными радикалами. В работах Дж. Фолкнера 2000 и 2004 годов результаты

Лооса были воспроизведены с использованием языка алгебр Хопфа.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в диссертационной работе, находятся в контексте современной теории редуктивных групп и алгебраических структур йорданова типа.

Цель работы. Целью работы является изучение строения изотропных редуктивных групп в терминах их элементарных подгрупп и ассоциированных с ними йордановых систем.

Методы исследований. Используются методы алгебраической геометрии, теории редуктивных групп и теории йордановых алгебр. Для доказательства нормальности элементарной подгруппы применяется строго плоский спуск, обобщение коммутационных формул Шевалле, метод локализации и вариант леммы Квиллена—Суслина. При исследовании связи между йордановыми системами и изотропными группами используется теорема Демазюра об автоморфизмах проективных однородных многообразий.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

- Доказана нормальность элементарной подгруппы группы точек изотропной редуктивной группы над произвольным коммутативным кольцом, при стандартных ограничениях на изотропный ранг.

- Доказана эквивалентность категории изотропных присоединенных полупростых групп с параболической подгруппой, степень нильпотентности унипотентного радикала которой не превосходит n, и категории алгебраических йордановых систем степени n, при условии, что $(2n)!$ обратимо в базовом кольце.

- Получено задание изотропной редуктивной группы как группового пучка образующими и соотношениями в терминах ассоциированной с ней йордановой системы.

- Получены явные формулы для умножения элементов большой клетки изотропной редуктивной группы в случае, когда степень нильпотентности унипотентного радикала соответствующей параболической подгруппы равна 2 (случай 5-градуированной алгебры Ли), при помощи выражений для квазиобратных в соответствующей йордановой системе.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории алгебраических и арифметических групп, а также в алгебраической геометрии, алгебраической K-теории, теории неассоциативных алгебр и систем (лиевского и йорданова типа), алгебраической теории чисел и других разделах алгебры.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международной конференции “Группы преобразований”, посвященной 70-летию Э. Б. Винберга (Москва, 2007), на международной конференции “Quadratic forms, algebraic groups, algebraic cobordism and related topics” (Ноттингем, Великобритания, 2008), на международной конференции “Quadratic forms and linear algebraic groups” (Обервольфах, Германия, 2009), на Санкт-Петербургском городском алгебраическом семинаре имени Д. К. Фаддеева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печатных работах [1]–[4][1]. Работа [2] опубликована в журнале, входящем в действующий список ВАК, работа [1] — в журнале, входившем в список ВАК на момент публикации (до 2007 года).

В работе [1] диссертантке принадлежат теоремы 1, 2, 3 о строении параболических подгрупп, соавтору — теорема 4 об исключительном случае групп типа G_2, не включенная в диссертацию. В работе [2] диссертантке принадлежит доказательство теоремы 2 о нормальности элементарной подгруппы, соавтору — постановка задачи и доказательство теоремы 1 о существовании корневых подсхем с определенными свойствами, не включенное в диссертацию. В работе [3] соавтору принадлежит постановка задачи, диссертантке — основные результаты.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав (первая содержит три раздела, вторая — шесть разделов), списка литературы, содержащего 74 наименования, и двух приложений. Объем диссертации — 158 страниц (основной текст — 144 страницы, приложения — 14 страниц).

Содержание диссертации

Во **введении** излагается история вопроса, формулируется цель работы, описываются методы исследований и структура диссертации.

Первая глава посвящена изучению строения параболических подгрупп изотропных редуктивных групп и доказательству нормальности элементарной под-

[1] См. также A. Stavrova, Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over rings, Algebra Colloquium 2009. Т. 16. № 4. 631–648.

группы.

В ***первом разделе*** воспроизводятся основные определения теории редуктивных групп, восходящие к Семинару по алгебраической геометрии (SGA 3) А. Гротендика и М. Демазюра.

Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Для любого конечно-порожденного проективного R-модуля V мы обозначаем через $W(V)$ соответствующую аффинную R-схему.

Для любой редуктивной групповой схемы G над R будем обозначать через G^{ad} соответствующую групповую схему присоединенного типа, через $\mathrm{Lie}(G)$ — алгебру Ли G.

Редуктивная группа G над R называется *изотропной*, если она обладает (собственной) параболической подгруппой P. В диссертации показано, что это условие эквивалентно существованию нетривиального действия на G некоторого 1-мерного расщепимого тора, или, иначе говоря, тому, что G^{ad} содержит 1-мерный расщепимый подтор.

Во ***втором разделе*** изучается строение параболических подгрупп изотропных редуктивных групп.

Пусть G — редуктивная групповая схема над коммутативным кольцом R. Пусть S — n-мерный расщепимый тор над R, который действует на групповой схеме G автоморфизмами. Тогда индуцированное действие S задает на $\mathrm{Lie}(G)$ структуру $\mathbb{Z}^n$-градуированной алгебры Ли. Мы будем называть тор S *градуирующим тором*, если гомоморфизм $S \to \mathrm{Aut}\,(G)$ является мономорфизмом.

Пусть
$$\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{A\in \mathrm{X}^*(S)} \mathrm{Lie}(G)_A$$
— разложение $\mathrm{Lie}(G)$, индуцированное действием S, где $\mathrm{X}^*(S)$ — группа характеров S. Пусть $L = \mathrm{Cent}_G(S)$ — неподвижная подгруппа S в G. Строго плоский спуск показывает, что для любого замкнутого по сложению подмножества $\Psi \subseteq \mathrm{X}^*(S)$ существует единственная гладкая связная замкнутая подгруппа U_Ψ группы G, нормализуемая L и такая, что $\mathrm{Lie}(U_\Psi) = \bigoplus\limits_{A\in\Psi} \mathrm{Lie}(G)_A$. При этом, если $\Psi = \{0\}$, то $U_\Psi = L$; если $\Psi = -\Psi$, то U_Ψ редуктивна; если $\Psi \cup (-\Psi) = \mathrm{X}^*(S)$, то U_Ψ и $U_{-\Psi}$ — две противоположные параболические подгруппы в G с общей подгруппой Леви $U_{\Psi\cap(-\Psi)}$, а если $0 \notin \Psi$, то U_Ψ — унипотентная подгруппа.

Множество Φ_S ненулевых характеров $A \in \mathrm{X}^*(S) \cong \mathbb{Z}^n$, таких что $\mathrm{Lie}(G)_A \neq 0$, будем называть *системой относительных корней группы* G *относительно* S, а элементы Φ_S — *относительными корнями.* Заметим, что если G — расщепимая группа и S — расщепимый максимальный подтор G, то $\Phi_S = \Phi$ является системой корней G в обычном смысле. Если G — редуктивная группа над полем, и S — максимальный расщепимый тор G, то Φ_S — относительная система корней G в смысле Бореля—Титса. В общем случае Φ_S может и не быть системой корней.

Задав полное упорядочение на $\mathbb{Q}$-пространстве $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}X^*(S)$, мы можем разбить Φ_S на два непересекающихся подмножества Φ_S^+ и Φ_S^-, так что $\Phi_S = \Phi_S^+ \cup \Phi_S^-$. Это подмножества *положительных* и *отрицательных относительных корней*, соответственно. Тогда $P^+ = U_{\Phi_S^+\cup\{0\}}$ и $P^- = U_{\Phi_S^-\cup\{0\}}$ — две противоположные параболические подгруппы с общей подгруппой Леви $L = \mathrm{Cent}_G(S)$.

Пусть G — редуктивная группа над R, и $G^{\mathrm{ad}} = \prod G_i$ — разложение соответствующей присоединенной группы в произведение неразложимых полупростых групп. Мы будем называть параболическую подгруппу $P \subseteq G$ *строго собственной*, если образ P при проекции $G \to G^{\mathrm{ad}}$ является произведением собственных параболических подгрупп групп G_i. Градуирующий тор S называется *строго градуирующим*, если S не централизует ни один из сомножителей G_i. Это условие эквивалентно тому, что параболические подгруппы $P^{\pm} = U_{\Phi_S^{\pm}\cup\{0\}}$ являются строго собственными.

Обратно, для каждой параболической подгруппы $P = P^+$ существует градуирующий тор S, такой что $P = U_{\Phi_S^+\cup\{0\}}$. Локально в топологии Зариского за S можно принять максимальный расщепимый подтор в подгруппе Леви образа P в G^{ad}. Соответствующую систему относительных корней мы будем обозначать через Φ_P вместо Φ_S. Положим

$$V_A = \mathrm{Lie}(G)_A, \quad A \in \Phi_P.$$

Тогда V_A — конечно-порожденный проективный модуль над R. Для любого $A \in \Phi_P$ обозначим через (A) подмножество Φ_P, состоящее из всех положительных кратных A, и рассмотрим соответствующую унипотентную группу $U_{(A)}$. Можно показать, что для любого $A \in \Phi_P$ существует S-эквивариантный изоморфизм $U_{(A)}/U_{(A)\setminus A} \cong W(V_A)$ и замкнутое S-эквивариантное вложение схем

$$X_A : W(V_A) \to G,$$

являющееся сечением для проекции $U_{(A)} \to W(V_A)$. Подсхемы $X_A(W(V_A))$, $A \in \Phi_P$, называются *относительными корневыми подсхемами* G, соответствующими параболической подгруппе P. Они являются прямым обобщением корневых подгрупп расщепимой редуктивной группы, в случае, когда $P = B$ является борелевской подгруппой этой группы. Для них также можно выписать аналог коммутационных формул Шевалле. Именно, для любых двух линейно независимых относительных корней $A, B \in \Phi_P$ и любых $v \in V_A$, $u \in V_B$ имеем

$$[X_A(v), X_B(u)] = \prod_{i,j>0} X_{iA+jB}(N_{ABij}(v,u)),$$

где $N_{ABij} \colon V_A \times V_B \to V_{iA+jB}$ — некоторое однородное полиномиальное отображение степеней i и j по первому и второму аргументу соответственно.

В ***третьем разделе*** формулируется и доказывается первая основная теорема диссертации, утверждающая нормальность элементарной подгруппы изотропной редуктивной группы над коммутативным кольцом.

Пусть P — собственная параболическая подгруппа групповой схемы G. Определим *элементарную подгруппу* $\mathrm{E}_P(R)$, соответствующую P, как подгруппу в группе R-точек $G(R)$, порожденную R-точками унипотентных радикалов $\mathrm{U}_P(R)$ и $\mathrm{U}_{P^-}(R)$, где P^- — некоторая противоположная к $P = P^+$ параболическая подгруппа (нетрудно показать, что $\mathrm{E}_P(R)$ не зависит от выбора P^-).

Заметим, что локально в топологии Зариского $\mathrm{E}_P(R) = \langle X_A(V_A),\ A \in \Phi_P \rangle$.

Теорема 1 *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, G — редуктивная алгебраическая группа над R. Предположим, что для любого максимального идеала M кольца R каждый неразложимый полупростой сомножитель $G^{ad}_{R_M}$ содержит расщепимый тор ранга ≥ 2. Тогда группа $\mathrm{E}_P(R)$ не зависит от выбора строго собственной параболической подгруппы P в G. В частности, $\mathrm{E}(R) = \mathrm{E}_P(R)$ нормальна в $G(R)$.*

Ключевым моментом в доказательстве теоремы 1 является применение аналога леммы Квиллена—Суслина, которая, по существу, сводит задачу к случаю локального кольца R. Над локальным кольцом утверждение теоремы справедливо даже без ограничения на ранги расщепимых подторов, благодаря известной теореме о локальной сопряженности минимальных параболических подгрупп.

Вторая глава посвящена доказательству теоремы об эквивалентности категорий изотропных присоединенных полупростых групп и сепарабельных алгебраических йордановых систем, а также ее следствий.

В ***первом разделе*** дается определение йордановой системы и алгебраической йордановой системы, приводятся примеры.

Положим $\mathbf{n} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. Пусть $\mathcal{V} = (V_i,\ i \in \mathbf{n})$ — набор из $2n$ модулей над коммутативным кольцом R, снабженных следующими билинейными и трилинейными отображениями:

$$q_{ij} : V_i \times V_j \to V_{i+j} \ \text{ для любых } \ i, j \in \mathbf{n},\ i \neq -j;$$
$$d_{i,-i,j} : V_i \times V_{-i} \times V_j \to V_j \ \text{ для любых } \ i, j \in \mathbf{n}$$

(где $V_{i+j} = 0$ при $|i + j| > n$). Пусть $End\,(\mathcal{V}) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbf{n}} \mathrm{End}\,(V_i)$. Трилинейные отображения $d_{i,-i,j}$, $i, j \in \mathbf{n}$, естественным образом соответствуют билинейным отображениям $D_{i,-i} : V_i \times V_{-i} \to End\,(\mathcal{V})$. Положим

$$V_0 = \sum_{i \in \mathbf{n}} D_{i,-i}(V_i \times V_{-i}) \subseteq End\,(\mathcal{V}).$$

На R-модуле $\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbf{n} \cup \{0\}} V_i$ рассмотрим билинейную форму

$$[-,-] : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{V}) \to End\,(\mathcal{V}) \oplus \bigoplus_{i \in \mathbf{n}} V_i,$$

такую что для любых $u \in V_i, v \in V_j$, $i, j \in \mathbf{n} \cup \{0\}$, имеет место

$$[u, v] = \begin{cases} q_{i,j}(u, v), & \text{если } \ i \neq -j,\ i, j \neq 0; \\ -D_{i,-i}(u, v), & \text{если } \ i = -j,\ i \neq 0; \\ u(v), & \text{если } \ i = 0,\ j \neq 0; \\ -v(u), & \text{если } \ i \neq 0,\ j = 0; \\ uv - vu, & \text{если } \ i = j = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие наборы аксиом для $\mathcal{V}$:

$$[u, u] = 0 \ \text{ для любого } \ u \in \mathcal{L}(\mathcal{V}); \tag{JS1}$$

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0 \ \text{ для любых } \ u, v, w \in \mathcal{L}(\mathcal{V}). \tag{JS2}$$

Система R-модулей $\mathcal{V} = (V_i, i \in \mathbf{n})$ называется *йордановой системой степени* n над R, если для нее выполнены аксиомы (JS1) и (JS2), или, эквивалентно, если $[\mathcal{L}(\mathcal{V}), \mathcal{L}(\mathcal{V})] \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{V})$ и $(\mathcal{L}(\mathcal{V}), [-,-])$ является алгеброй Ли.

Иначе говоря, йорданова система — это набор подмодулей с ненулевым весом некоторой $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли, вместе с полилинейными отображениями, индуцированными скобкой Ли. Это частный случай йордановой системы в смысле Е. Зельманова.

Гомоморфизмы, автоморфизмы, подсистемы и идеалы йордановой системы определяются естественным образом. Йорданова система $\mathcal{V}$ называется *сепарабельной*, если для любого $s \in \operatorname{Spec} R$ йорданова система $\mathcal{V} \otimes_R \overline{k(s)}$ не содержит ненулевых идеалов, ограничения всех структурных отображений на которые тривиальны.

Предположим, что $(2n)! \in R^{\times}$. Йорданова система $\mathcal{V} = (V_i, i \in \mathbf{n})$ называется *алгебраической*, если все модули V_i, $i \in \mathbf{n}$, являются конечно-порожденными проективными модулями над R, и $\mathcal{V}$ удовлетворяет аксиоме

$$\begin{gathered}\exp(\mathrm{ad}_a)([b,c]) = [\exp(\mathrm{ad}_a)(b), \exp(\mathrm{ad}_a)(c)] \quad \text{в} \quad \mathcal{L}(\mathcal{V}) \\ \text{для любых} \quad a \in V_i,\ b \in V_j,\ c \in V_k,\ i,j,k \in \mathbf{n},\end{gathered} \tag{JS3}$$

где мы обозначаем

$$\exp(\mathrm{ad}_a) = \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{1}{k!}(\mathrm{ad}_a)^k \in \mathrm{End}\,(\mathcal{L}(\mathcal{V})).$$

Иначе говоря, мы требуем, чтобы эндоморфизм $\exp(\mathrm{ad}_a)$ для любого $a \in V_i$, $i \in \mathbf{n}$, являлся автоморфизмом $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ как алгебры Ли.

Заметим, что при $(3n)! \in R^{\times}$ аксиома (JS3) выполнена автоматически.

В частном случае $n = 1$ и $2 \in R^{\times}$ оказывается, что аксиомы (JS1)–(JS3) в точности совпадают с аксиомами йордановой пары О. Лооса. В частном случае $n = 2$ и $2, 3 \in R^{\times}$, йорданова система, построенная по тройной системе Фрейденталя, также удовлетворяет аксиоме (JS3).

Во ***втором разделе*** показывается, как построить по изотропной редуктивной группе сепарабельную алгебраическую йорданову систему.

Именно, пусть R — коммутативное кольцо с 1, такое что $(2n)! \in R$, и пусть G — изотропная редуктивная групповая схема над R. Пусть S — 1-мерный расщепимый тор над R, который действует на G автоморфизмами, т.е. $\psi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Aut}\,(G)$, $S = \psi(\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Пусть $L = \mathrm{Cent}_G(S)$, $P^{\pm} = L \cdot U^{\pm}$ — две противоположные параболические подгруппы и их общая подгруппа Леви, ассоциированные с этим действием.

Как было отмечено выше, действие 1-мерного расщепимого тора задает $\mathbb{Z}$-градуировку на R-алгебре Ли $\mathrm{Lie}(G)$. Предположим, что $\mathrm{Lie}(G)_i = 0$, как только $|i| > n$. Тогда набор модулей

$$\mathcal{V}(G, \psi) = (\mathrm{Lie}(G)_i, i \in \mathbf{n})$$

естественным образом является йордановой системой. Мы называем ее йордановой системой, ассоциированной с редуктивной группой G. В диссертации доказано, что такая система всегда является сепарабельной и алгебраической.

В ***третьем разделе*** мы показываем, что любую алгебраическую йорданову систему $\mathcal{V}$ степени n можно вложить в йорданову систему $(\mathrm{End}\,(\mathcal{M})_j, j \in \mathbf{2n})$ степени $2n$, ассоциированную с редуктивной группой $\mathrm{GL}(\mathcal{M})$ автоморфизмов некоторого конечно-порожденного проективного $\mathbb{Z}$-градуированного R-модуля $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{V})$, такого что $\mathcal{M}_i = 0$, как только $|i| > n$.

В частности, это позволяет доказать, что в случае, когда $R = K$ является полем, любую сепарабельную алгебраическую йорданову систему можно представить как йорданову систему $(\mathrm{Lie}(G)_i, i \in \mathbf{n})$ для некоторой изотропной полупростой присоединенной групповой схемы G над R.

В ***четвертом разделе*** вводится понятие квази-обратимости для произвольной алгебраической йордановой системы $\mathcal{V}$ степени $n \geq 1$, которое обобщает понятия квази-обратимости в йордановых парах, введенное О. Лоосом (которое, в свою очередь, обобщает понятие квази-обратимости в йордановых алгебрах), и 2-обратимости в канторовых парах, введенное Дж. Фолкнером и Б. Эллисоном. В определении квази-обратимости используется наличие вложения $\mathcal{V}$ в “матричную” йорданову систему, полученное в предыдущем разделе.

Положим $V_{\pm} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_{\pm i}$. Для любой квази-обратимой пары $(x, y) \in V_+ \times V_-$ мы обозначаем через $(x^y, y^x) \in V_+ \times V_-$ соответствующую пару квази-обратных, и через $b(x, y)$ — задаваемый парой (x, y) внутренний автоморфизм йордановой системы $\mathcal{V}$.

В ***пятом разделе*** мы показываем, как по любой алгебраической системе $\mathcal{V}$ построить изотропную редуктивную (в действительности, полупростую присоединенную) группу G с действием 1-мерного расщепимого тора $\psi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Aut}\,(G)$, такую что $\mathcal{V}$ естественно изоморфна йордановой системе $\mathcal{V}(G, \psi)$. Эта конструкция является обобщением соответствующей конструкции для йордановых пар, полученной в работах О. Лооса.

Пусть $\mathcal{V} = (V_i, i \in \mathbf{n})$ — алгебраическая йорданова система степени n над коммутативным кольцом R, таким что $(2n)! \in R^{\times}$. Положим $V_{\pm} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_{\pm i}$. Мы задаем на схеме $X = W(V_+) \times W(V_-)$ некоторое fpqc-отношение эквивалентности $\mathrm{E} \subseteq X \times X$, определенное в терминах квази-обратимости, и рассматриваем фактор-пучок

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{V}) = X/\,\mathrm{E}\,.$$

В случае, если $\mathcal{V}$ — йорданова система, ассоциированная с изотропной редуктивной группой G с параболическими подгруппами $P^{\pm}$ (в смысле второго раздела), этот пучок $\mathfrak{X}$ является ничем иным как фактор-многообразием G/P^+. В общем случае мы показываем, построив явное вложение в проективное пространство, что пучок $\mathfrak{X}$ представим гладкой квазипроективной схемой над R. Если же $\mathcal{V}$ — сепарабельная йорданова система, схема $\mathfrak{X}$ оказывается, более того, проективной.

В 1977 г. М. Демазюр ввел понятие схемы Бореля. Именно, *схемой Бореля* над схемой Y называется гладкая собственная схема X над Y, такая что для любой точки $s \in Y$ геометрический слой $X_{\overline{k(s)}}$ схемы X изоморфен многообразию вида G/P, где G — редуктивная алгебраическая группа над $\overline{k(s)}$, P — ее параболическая подгруппа. По теореме Демазюра для любой схемы Бореля X над схемой Y связная компонента $\mathrm{Aut}\,(X)^\circ$ групповой схемы $\mathrm{Aut}\,(X)$ автоморфизмов X как схемы над Y является присоединенной полупростой групповой схемой над Y. При этом исходная схема X изоморфна многообразию параболических подгрупп $\mathrm{Aut}\,(X)^\circ$, имеющих некоторый фиксированный тип.

Из результатов третьего раздела следует, что для любой сепарабельной алгебраической йордановой системы схема $\mathfrak{X}$ является схемой Бореля. Следовательно, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ$ является присоединенной полупростой групповой схемой. Мы показываем, что существует естественное вложение йордановой системы $\mathcal{V}$ в йорданову систему $\mathcal{V}(\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ, \psi)$, для некоторого действия 1-мерного расщепимого тора $\psi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ$.

Демазюром было также замечено, что присоединенная полупростая алгебраическая группа почти всегда изомоморфна группе автоморфизмов своего проективного однородного многообразия. Это позволяет показать, что в большинстве случаев $\mathcal{V}$ изоморфна $\mathcal{V}(\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ, \psi)$, а значит, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ$ является искомой редуктивной группой. В исключительных случаях мы вручную строим некоторую присоединенную полупростую групповую подсхему G в $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{X})^\circ$, такую что $\mathcal{V}$ изоморфно отображается на йорданову систему $\mathcal{V}(G, \psi|_G)$.

В ***шестом разделе*** формулируется и доказывается вторая основная теорема диссертации, утверждающая эквивалентность категорий изотропных присоединенных полупростых групп и сепарабельных алгебраических йордановых систем, а также ее следствия.

Пусть R — коммутативное кольцо с 1, такое что $(2k)! \in R^\times$. Пусть G — присоединенная полупростая групповая схема над R, и пусть $\psi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Aut}\,(G)$ — строго градуирующее действие 1-мерного расщепимого тора на G.

Для любого $1 \leq n \leq k$ определим категорию $\mathfrak{IsoGroups}_k$ следующим образом. Объектами $\mathfrak{IsoGroups}_n$ являются пары (G, ψ) описанного выше вида, удовлетворяющие $\mathrm{Lie}(G)_i = 0$ при $|i| > n$, где $\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(G)_i$ — градуировка, индуцированная ψ. Морфизмами $\mathfrak{IsoGroups}_n$ являются изоморфизмы групповых схем $f : G \to G'$, коммутирующие с действием $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, т.е. такие, что $f \circ \psi = \psi'$.

Также для любого $1 \leq n \leq k$ определим категорию $\mathfrak{JorSystems}_n$ следующим образом. Объектами $\mathfrak{JorSystems}_n$ являются сепарабельные алгебраические йордановы системы степени n над R. Морфизмами $\mathfrak{JorSystems}_n$ являются изоморфизмы йордановых систем степени n.

Теорема 2 *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, такое что $(2k)! \in R^{\times}$. Для любого $1 \leq n \leq k$ функтор*

$$F : \mathfrak{IsoGroups}_n \longrightarrow \mathfrak{JorSystems}_n,$$

такой что $F((G,\psi)) = (\mathrm{Lie}(G)_i, i \in \mathbf{n})$ — йорданова система, соответствующая $\mathbb{Z}$-градуированной алгебре Ли $\mathrm{Lie}(G)$, и $F(f) = (f_i, i \in \mathbf{n})$ — морфизм йордановых систем, индуцированный гомоморфизмом градуированных алгебр Ли, касательным к $f : (G,\psi) \to (G',\psi')$, является эквивалентностью категорий.

Из теоремы 2 вытекают следующие результаты, описывающие строение изотропной редуктивной группы в терминах соответствующей йордановой системы.

Следствие 1 *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, такое что $(2n)! \in R^{\times}$. Пусть G — присоединенная полупростая группа над R с действием 1-мерного строго градуирующего тора $\psi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to G$, таким что $\mathrm{Lie}(G)_i = 0$ при $|i| > n$. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G,\psi) = (\mathrm{Lie}(G)_i, i \in \mathbf{n})$ — соответствующая йорданова система над R. Пусть $P^{\pm}$ — ассоциированные параболические подгруппы, L — их общая подгруппа Леви, $U^{\pm} = \mathrm{U}_{P^{\pm}}$ — их унипотентные радикалы.*

(1) *Имеет место изоморфизм групповых схем $L \cong \mathrm{Aut}\,(\mathcal{V})^{\circ}$.*

(2) *Положим $\mathrm{Lie}(G)_{\pm} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Lie}(G)_{\pm i}$. Пусть $\Omega = U^{-}LU^{+}$ — большая клетка в G, соответствующая параболическим подгруппам $P^{\pm}$. Тогда существуют L-эквивариантные изоморфизмы схем*

$$\exp : W(\mathrm{Lie}(G)_{\pm}) \to U^{\pm},$$

такие что для любых $x \in \mathrm{Lie}(G)_+$, $y \in \mathrm{Lie}(G)_-$ имеем $\exp(x)\exp(y) \in \Omega(R)$ тогда и только тогда, когда пара (x,y) квази-обратима в йордановой системе $\mathcal{V}$, и в этом случае

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(y^x) \cdot b(x,y) \cdot \exp(x^y)$$

— *каноническое разложение* $\exp(x)\exp(y)$ *как элемента* $\Omega(R)$.

Это следствие позволяет выразить произведение любых элементов большой клетки изотропной группы в терминах структурных операций в соответствующей йордановой системе. В частности, в случаях $n = 1$ и $n = 2$, когда известны явные формулы для квази-обратных (приложение B диссертации), произведение элементов большой клетки также вычисляется явным образом.

Следствие 2 (Образующие и соотношения) *В условиях Следствия 1, пусть* G' — *произвольный групповой пучок над* R, *и пусть* $f_0 : L \to G'$, $f_\pm : U^\pm \to G'$ — *гомоморфизмы групповых пучков. Гомоморфизм групповых пучков* $f : G \to G'$, *продолжающий* f_0 *и* $f_\pm$, *существует тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$f_0(h)f_\pm(u)f_0(h)^{-1} = f_\pm(huh^{-1})$$

для любых $h \in L,\ u \in \mathrm{Lie}(G)_\pm$;

$$f_+(\exp(x))f_-(\exp(y)) = f_-(\exp(y^x))f_0(b(x,y))f_+(\exp(x^y))$$

для любой квази-обратимой пары $(x, y) \in \mathrm{Lie}(G)_- \times \mathrm{Lie}(G)_+$.

В **приложении A** доказываются три технические леммы, сформулированные в четвертом разделе второй главы.

В **приложении B** при помощи лемм из приложения A выводятся явные формулы для квази-обратных в йордановых системах степени 1 и 2.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] Казакевич В. Г., Ставрова А. К. Подгруппы, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 319. С. 199–215.

[2] Петров В. А., Ставрова А. К. Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. № 4. С. 160–188.

Другие публикации:

[3] Вавилов Н. А., Ставрова А. К. Основные редукции в задаче описания нормальных подгрупп // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 349. С. 30–52.

[4] Stavrova A. Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over rings // Препринт ПОМИ. 2007. № 10. С. 1–19.