Санкт–Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Шкредов Илья Дмитриевич

# КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт–Петербург 2009

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук,<br>профессор А.М. Вершик,<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор В.Г. Журавлев,<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор С.В. Конягин |
| **Ведущая организация:** | Хабаровское отделение Института<br>прикладной математики ДВО РАН |

Защита диссертации состоится "..." ............ 2009 г. в 16 часов на заседании совета Д.212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт–Петербургском государственном университете по адресу : 198504, Санкт–Петербург, ст. Петергоф, Университетский просп., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Санкт–Петербургского государственного университета по адресу : 199034, Санкт–Петербург, Университетская наб., 7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу : 191023, Санкт–Петербург, Наб. реки Фонтанки, 27, ауд. 311.

Автореферат разослан "..." ............ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.–мат. наук, профессор В. М. Нежинский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.**

В настоящей диссертации рассматривается несколько хорошо известных задач комбинаторной теории чисел. Тематика нашей работы связана с замечательным результатом комбинаторной теории чисел — теоремой Б.Л. Ван дер Вардена[1], доказанной им в 1927 году. Эта теорема утверждает, что при любой раскраске множества целых чисел в конечное число цветов найдется арифметическая прогрессия произвольной длины, все элементы которой раскрашены в один и тот же цвет. Теорему Б.Л. Ван дер Вардена А.Я. Хинчин[2] по праву назвал жемчужиной теории чисел. Несмотря на кажущуюся простоту и естественность теорема Ван дер Вардена сыграла значительную роль в развитии двух разделов математики — аддитивной комбинаторики и комбинаторной эргодической теории. Отметим, что обе указанные области математики связаны между собой теснейшим образом и находятся на стыке таких наук, как аддитивная и аналитическая теория чисел, теория графов и теория динамических систем. Сама по себе теорема Б.Л. Ван дер Вардена является одним из фундаментальных результатов теории Рамсея (см., например, книги[3]).

В 1953 году К.Ф. Рот[4] получил замечательное обобщение теоремы Ван дер Вардена. Используя классический метод теории чисел — метод Харди–Литлвуда, К.Ф. Рот доказал, что любое множество целых чисел положительной плотности обязательно содержит арифметическую прогрессию длины три. Более того, он получил количественную оценку на плотность подмножеств $\{1, 2, \ldots, N\}$ без прогрессий длины три. После работы К.Ф. Рота вопросы, связанные с приложением кругового метода к задачам о множествах без арифметических прогрессий длины три, рассматривались такими известными специалистами по теории чисел, как Д.Р. Хиф–Браун[5], Е. Семереди[6] и Ж. Бурген[7].

Теоремы К.Ф. Рота, Д.Р. Хиф–Брауна, Е. Семереди и Ж. Бургена относятся к оценке максимальной плотности подмножества $\{1, 2, \ldots, N\}$ без

[1] *Van der Waerden B. L.* Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk., 15, 1927, 212–216.

[2] *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел / М.: Едиториал УРСС, 2004.

[3] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея / М.: Мир, 1984.; *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J.* Ramsey Theory / Wiley Interscience, Series in Discrete Mathematics, 1980.

[4] *Roth K. F.* On certain sets of integers (I) // J. London Math. Soc., 28, 1953, 245–252; *Roth K. F.* On certain sets of integers (II) // J. London Math. Soc., 29, 1953, 20–26.

[5] *Heath–Brown D. R.* Integer sets containing no arithmetic progressions // J. London Math. Soc. (2), v. 35, N. 3, 1987, 385–394.

[6] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no arithmetic progressions // Acta Math. Hungar., v. 56, 1990, 155–158.

[7] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // GAFA, 9, 1999, 968–984.

прогрессий длины три. Только в 1975 году Е. Семереди[8] , отвечая на известный вопрос Эрдеша и Турана, и используя совершенно другой метод, доказал, что любое множество целых чисел положительной плотности содержит арифметические прогрессии *любой* длины. Эта сложная работа чрезвычайно сильно повлияла на развитие комбинаторной теории чисел, а также на смежные дисциплины. Так, основной инструмент в доказательстве Семереди, так называемая лемма регулярности, стала, на сегодняшний день, одним из важнейших методов теории графов (см. работы[9]). Кроме того, через несколько лет после Семереди, Г. Фюрстенберг[10] передоказал его теорему с помощью методов эргодической теории. Г. Фюрстенберг обнаружил связь между комбинаторными объектами и динамическими системами (так называемый принцип соответствия Фюрстенберга[11]) и основал новую науку — комбинаторную эргодическую теорию, которая занимается различными связями между комбинаторными свойствами множеств и соответствующими характеристиками динамических систем (см., например, работы[12]).

Основная задача настоящей диссертации состоит в получении количественных оценок для двумерной теоремы Семереди. Говоря кратко, она состоит в следующем: насколько большую мощность может иметь подмножество двумерной решетки без конфигураций вида $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$, где $d > 0$? Такие тройки называются *уголками* или *равнобедренными прямоугольными треугольниками*. Первый результат в этом направлении был доказан М. Атаи и Е. Семереди[13] в 1974 году с помощью комбинаторных

---

[8] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression // Acta Arith. Acad. Sci. Hungar., v. 20, 1969, 89–104 ; *Szemerédi E.* On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // Acta Arith., 27, 1975, 299–345.

[9] *Szemerédi E.* Regular partitions of graphs // Colloques Internationaux CNRS, 260 — Problèms Combinatories et Théorie des Graphes, Orsay, 1976, 399–401 ; *Kohayakawa Y.* Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs // Foundations of Computational Mathematics, Selected papers, IMPA conference, January 1997, Rio de Janeiro, Springer, 1997 ; *Kolmós J., Simonovits M.* Paul Erdös is 80 (под редакцией D. Miklós, V.T. Sós, T. Szönyi) / v. 2, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1996.

[10] *Furstenberg H.* Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions // J. d'Analyse Math., v. 31, 204–256, 1977.

[11] *Furstenberg H., Katznelson Y.,* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d'Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978. *Furstenberg H., Katznelson Y. and Ornstein D.* The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi's Theorem // Bull. Amer. Math. Soc., v. 7, N.3, 527–552, 1982.

[12] *Furstenberg H.* Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions // J. d'Analyse Math., v. 31, 204–256, 1977 ; *Furstenberg H.* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory / Princeton (N.J.), 1981 ; *Furstenberg H., Katznelson Y.,* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d'Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978 ; *Furstenberg H., Katznelson Y. and Ornstein D.* The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi's Theorem // Bull. Amer. Math. Soc., v. 7, N.3, 527–552, 1982; *Bergelson V., Leibman A.* Polynomial extentions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems // J. Amer. Math. Soc., v.9, N.3, 1996, 725–753 ; *Bergelson V., Leibman A.* Set–polynomials and polynomial extension of the Hales–Jewett theorem // Ann. of Math. (2), v.150, N.1, 1999, 33–75; *Furstenberg H., Katznelson Y.* A density version of the Hales–Jewett theorem // J. Analyse Math., 57, 1991, 64–119; *Leibman A.* Multiple recurrence theorem for measure preserving actions of a nilpotent group // Geom. func. anal., v.8, 1998, 853–931.

[13] *Ajtai M., Szemerédi E.* Sets of lattice points that form no squares // Stud. Sci. Math. Hungar., 9, 1974,

методов. Они показали, что любое подмножество двумерной решетки положительной плотности обязательно содержит уголок. В 1978 году результат о равнобедренных прямоугольных треугольниках был передоказан Г. Фюрстенбергом и Я. Кацнельсоном[14] с помощью методов эргодической теории. Доказательство М. Атаи и Е. Семереди дает очень слабые верхние оценки на плотность множества двумерной решетки без уголков. Доказательство Фюрстенберга и Кацнельсона является неэффективными в том смысле, что оно вообще не дает никаких верхних оценок на указанную плотность. В своей филдсовской работе[15] В.Т. Гауэрс использовал оригинальные модификации классических методов теории чисел, таких как круговой метод и метод тригонометрических сумм, и получил принципиально новые количественные оценки в задачах типа теоремы Е. Семереди. В той же работе[16] В.Т. Гауэрс еще раз привлек внимание к вопросу о получении эффективных оценок в задаче об уголках. В диссертационной работе удалось создать оригинальные и принципиально новые теоретико–числовые конструкции, позволяющие, в отличие от эргодического и комбинаторного подходов, получать хорошие количественные оценки в рассматриваемых многомерных задачах.

В настоящее время популярность тематики, связанной с описанными выше задачами, достаточно велика: в разные годы ими занимались замечательные специалисты в области теории чисел, комбинаторной теории чисел и комбинаторной эргодической теории, такие как филдсовские лауреаты К.Ф. Рот, Ж. Бурген, Т. Гауэрс, Т. Тао, а также П. Эрдеш, Е. Семереди, С. Шелах, Р. Радо, В. Редл, П. Франкл, Л. Ловас, И. Ружа, С.В. Конягин, Р.Л. Грэхем, П. Туран, Г. Фюрстенберг, Я. Кацнельсон, В. Бергельсон, А. Лейбман, Б. Ост, Б. Кра, Г.А. Фрейман, Д.Р. Хиф–Браун, В. Шош, А. Балог, А. Шаркоци, Г. Элекеш, М. Атаи, Н. Кац, Б. Грин, М.–Ч. Чанг, В. Ву и другие.

**Научная новизна работы.**

В настоящей диссертации удалось создать оригинальные методы и применить принципиально новые модификации классических методов теории чисел, позволяющие, в отличие от использующихся ранее эргодического и комбинаторного подходов, получать хорошие количественные оценки в задаче об уголках. Основной результат о двумерном обобщении теоремы Е. Семереди является решением достаточно давно стоявшей задачи[17], впервые сформули-

9–11.

[14] *Furstenberg H., Katznelson Y.,* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d'Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978.

[15] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem // Geom. func. anal., v.11, 2001, 465–588. и *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four // Geom. func. anal., v.8, 1998, 529–551

[16] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem // Geom. func. anal., v.11, 2001, 465–588.

[17] *Ajtai M., Szemerédi E.* Sets of lattice points that form no squares // Stud. Sci. Math. Hungar., 9, 1974, 9–11;

рованой специалистами по эргодической комбинаторике, а затем упомянутой В.Т. Гауэрсом (см. работу[18]), в контексте появившихся оригинальных вариантов использования в подобных задачах классических теоретико–числовах методов. Доказанные результаты являются новыми, полученными автором самостоятельно. Кроме того, новыми являются не только сами результаты, но и методы их обоснования. Так, впервые метод тригонометрических сумм соединен с теоретико–графовым подходом, что привело к получению наилучшего на сегодняшний день результата о множествах, не содержащих уголков. Новыми являются конструкции построения динамических систем с медленной скоростью кратного возвращения, а также метод доказательства существования нетривиальных решений линейных уравнений с элементами из множества больших тригонометрических сумм. Подход, связанный с построением динамических систем с медленной скоростью однократного возвращения существенно видоизменен и нетривиально доработан.

Основные результаты диссертации состоят в следующем :

1. Любое множество $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ мощности $N^2/(\log\log\log N)^c$, где $c > 0$ — некоторая эффективная константа, содержит уголок.

2. Доказана структурная теорема о плотных подмножествах $\{1, 2, \ldots, N\}^2$.

3. Получен критерий $\alpha$–равномерности множества $A$ в терминах матрицы смежности графа $G_A$, ассоциированного с $A$, а также в терминах плотности $A$ в декартовых произведениях больших подграфов графа $G_A$.

4. Любое множество $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ мощности $N^2/(\log\log N)^C$, где $C > 0$ — некоторая эффективная константа, содержит уголок.

5. Всякое подмножество декартова квадрата $G \times G$ произвольной конечной абелевой группы $G$ мощности $|G|^2/(\log\log |G|)^{C_1}$, где $C_1 > 0$ — некоторая эффективная константа, содержит уголок.

6. Получены примеры динамических систем с медленной скоростью кратного возвращения.

7. Доказаны теоремы об оценке сверху для скорости многомерной возвращаемости.

---

*Furstenberg H., Katznelson Y.,* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d'Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978.

[18] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem // Geom. func. anal., v.11, 2001, 465–588.

8. Построены примеры динамических систем с заданной скоростью однократного возвращения.

9. Найдена наилучшая оценка снизу для числа решений уравнения $r_1 + \dots + r_k = r'_1 + \dots + r'_k$, где все $r_i, r'_i$ принадлежат множеству больших тригонометрических сумм, а также для системы линейных уравнений с переменными из множества больших тригонометрических сумм.

10. Получен результат, существенно улучшающий теорему Чанг о строении множества больших тригонометрических сумм.

Методы доказательства утверждений, сформулированных в пунктах 1 и 4 совершенно различные. Первый подход опирается на структурные результаты о плотных подмножествах двумерной решетки (пункт 2), а второй использует свойства множеств Бора. Оба метода дают существенное продвижение в известной и трудной задаче о уголках. Хотя в контексте данной задачи второй метод сильнее, тем не менее, он принципиально не позволяет получать, интересные сами по себе, утверждения о структуре плотных подмножеств $\{1, 2, \dots, N\}^2$. Кроме того, второй метод использует некоторые результаты, доказанные с применением первого, более слабого, подхода.

Необходимо отметить, что результаты, сформулированные в пунктах 1–4, а также в пунктах 8 и 9 касаются вопросов традиционно относящихся к эргодической, комбинаторной теории чисел и, так называемым, обратным задачам аддитивной теории чисел. Часть результатов, например, пункт 6, являются естественной переформулировкой основных числовых теорем на языке теории динамических систем.

**Методы исследования.**

В работе используется метод тригонометрических сумм и анализ Фурье, комбинаторные методы, методы теории графов, методы теории динамических систем, а также методы аддитивной комбинаторной теории чисел.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Диссертация носит теоретический характер. Методы, разработанные в ней, могут быть полезны при дальнейшем исследовании задач о двумерных и многомерных обобщениях теоремы Семереди, а также могут применяться при решении других проблем комбинаторной теории чисел и аддитивной комбинаторики. Ее результаты могут быть использованы в эргодической теории, метрической теории чисел и аддитивной теории чисел. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

**Апробация работы.**

Результаты настоящей диссертации неоднократно докладывались автором на многочисленных международных конференциях и семинарах. Перечислим сперва конференции: международная конференция “Современная теория динамических систем и ее приложения к небесной механике” (г. Москва, 2002 г.); пятая международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (г. Тула, 2003 г.); международная конференция “XXIII Арифметические дни” в Граце (Австрия, 2003 г.); международная конференция “Диофантовый анализ, равномерное распределение и их приложения” в Минске (Беларусь, 2003 г.); международная конференция “Новейшие достижения в аддитивной комбинаторике” в Пало Альто (США, 2004 г.); международная конференция “Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике” (Санкт–Петербург, 2005 г.); международная конференция “Геометрические методы в физике” в Беловеже (Польша, 2005 г.); международная конференция “Аддитивная комбинаторика” в Бристоле (Англия, 2005 г.); международная конференция “Вероятность и эргодическая теория” (США, 2006 г.); международная школа и конференция “Аддитивная комбинаторика” в Монреале (Канада, 2006 г.); “Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел и геометрии” (г. Москва, 2006 г.); “Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел” (г. Москва, 2007 г.); “Равномерное расспределение” в Марселе (Франция, 2008 г.); “Наводя мосты” в Будапеште (Венгрия, 2008 г.); “Феномен дискретной жесткости в аддитивной комбинаторике” в Беркли (США, 2008 г.); Ломоносовские чтения в Московском государственном университете в 2002, 2004, 2006–2008 гг.

Перечислим теперь семинары : кафедральный семинар кафедры теории чисел под руководством чл.–корр. РАН Ю. В. Нестеренко и д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина; кафедральный семинар кафедры динамических систем под руководством акад. РАН Д. В. Аносова, д.ф.–м.н. В. М. Закалюкина и к.ф.–м.н. А. А. Приходько; семинар “Аналитическая теория чисел” под руководством д.ф.–м.н. А. А. Карацубы; общеинститутский математический семинар ПОМИ РАН под руководством д.ф.–м.н. А. М. Вершика, акад. РАН И. А. Ибрагимова, чл.–корр. РАН С. В. Кислякова, акад. РАН Ю. В. Матиясевича; Санкт–Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам под руководством д.ф.–м.н. А. М. Вершика; Санкт–Петербургский алгебраический семинар им. Д.К. Фадеева под руководством д.ф.–м.н. А. В. Яковлева; семинар “Арифметика и геометрия” под руководством д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина и д.ф.–м.н. А. М. Райгородского; семинар “Гамильтоновы системы и статистическая механика” под руководством акад. РАН В. В. Козлова и чл.–корр. РАН Д. В. Трещева; семинар

"Динамические системы и эргодическая теория" под руководством акад. РАН Д. В. Аносова, д.ф.–м.н. А. М. Степина, д.ф.–м.н. Р. И. Григорчука; семинар "Тригонометрические суммы и их приложения" под руководством д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина и к.ф.–м.н. А. В. Устинова; семинар "Теория функций и ее приложения" под руководством д.ф.–м.н. С. В. Конягина, к.ф.–м.н. В. Б. Демидовича и к.ф.–м.н. А. С. Кочурова, семинар "Динамические системы" под руководством профессора В. Вича, семинар "Эргодическая теория" под руководством акад. РАН Я. Г. Синая, семинар "Эргодическая теория и аддитивная комбинаторика" под руководством профессора М. Виэрдла, профессора Э. Лезинь, профессора Б.Кра, "Научно–исследовательский семинар по теории функций" под руководством чл.–корр. РАН Б. С. Кашина , д.ф.–м.н. С. В. Конягина, д.ф.–м.н. Б.И. Голубова и д.ф.–м.н. М.И. Дьяченко, семинар "Теория функций" под руководством чл.–корр. РАН Б. С. Кашина и д.ф.–м.н. С. В. Конягина.

**Публикации.**

Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приводится в конце автореферата. Все работы опубликованы в журналах, входящих в действующий перечень ВАК.

**Структура и объем работы.**

Диссертация изложена на 217 страницах и состоит из введения, общей характеристики работы, списка использованных обозначений и сокращений, пяти глав и списка использованных источников, включающего 135 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Диссертация делится на пять глав. В первой главе даются постановки основных проблем и излагается их история. Вторая глава посвящена получению количественных оценок в задаче о двумерном обобщении теоремы Семереди. В этой главе доказано несколько результатов о, так называемых, $\alpha$–равномерных множествах. Например, получен теоретико–графовый критерий $\alpha$–равномерности множества в терминах второго собственного значения соответствующей матрицы смежности. Кроме того, в этой главе доказан новый общий результат о строении плотных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}^2$, который вместе с полученными ранее теоремами об $\alpha$–равномерных множествах, применяется при доказательстве нашего основного результата о двумерных уголках. В третьей главе к задаче об уголках применяется метод Ж. Бургена, связанный с множествами Бора. Такой подход позволяет усилить верхние оценки на плотность подмножеств $\{1, 2, \ldots, N\}^2$ без равнобедренных прямоугольных треугольников. В четвертой главе получены примеры динамических систем с медленной скоростью кратного и однократного возвращения. Доказанные результаты еще раз указывают на тесную связь между задачами комбинаторной теории чисел и эргодической теорией. В пятой главе доказано несколько теорем о множествах больших тригонометрических сумм. Такие множества появляются во всех задачах комбинаторной теории чисел, при решении которых используется метод Фурье (например, они встречаются в задачах об арифметических прогрессиях и в задачах об уголках). Поэтому, как отмечает Гауэрс в своем обзоре [19], результаты о структуре множеств больших тригонометрических сумм чрезвычайно важны. Мы доказываем, что рассматриваемые множества имеют сильные аддитивные свойства. Кроме того, в пятой главе соискателем получено несколько приложений к задачам комбинаторной теории чисел.

**Содержание главы 2.**

Основным результатом настоящей главы является теорема о двумерном обобщении теоремы Е. Семереди (см. теорему 8 ниже). Мы начнем с обзора предшествующих результатов.

Пусть $N$ — натуральное число. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| \ : \ A \subseteq [1, N] \,,$$

$$A \text{ — не содержит арифметических прогрессий длины } k\} \,,$$

Используя круговой метод, К.Ф. Рот в 1953 году доказал теорему[20].

[19] *Gowers W. T.* Rough structure and classification // GAFA, Special Volume - GAFA2000 "Visions in Mathematics", Tel Aviv, (1999) Part I, 79–117.

[20] *Roth K. F.* On certain sets of integers (I) // J. London Math. Soc., 28, 1953, 245–252.

**Теорема 1 (Рот).** *Пусть $N$ — натуральное число, $N \geq 3$. Тогда*

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log\log N}\,.$$

Результат К.Ф. Рота был затем улучшен Д.Р. Хиф–Брауном в работе[21] и Е. Семереди в статье[22]. Независимо друг от друга оба этих автора получили следующую оценку для $a_3(N)$.

**Теорема 2 (Хиф–Браун, Семереди).** *Пусть $N$ — натуральное число, $N \geq 3$. Тогда*

$$a_3(N) \ll \frac{1}{(\log N)^c}\,,$$

*где константу $c$ можно взять равной* $1/20$.

Наилучший, на сегодняшний день, результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Ж. Бургену[23].

**Теорема 3. (Бурген)** *Пусть $N$ — натуральное число, $N \geq 3$. Тогда*

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\log\log N}{\log N}}\,. \tag{1}$$

А. Беренд в работе[24] получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$ (см. также работы[25]). Р. Ранкин в статье[26] обобщил результат А. Беренда на случай всех $k \geq 3$.

**Теорема 4 (А. Беренд, Р. Ранкин).** *Пусть $\varepsilon > 0$ — любое действительное число и $k \geq 3$ — натуральное. Тогда для всех достаточно больших $N$, выполнено*

$$a_k(N) \geq \exp(-(1+\varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)})\,,$$

*где $C_k$ некоторая положительная эффективная константа, зависящая только от $k$.*

---

[21] *Heath–Brown D. R.* Integer sets containing no arithmetic progressions // J. London Math. Soc. (2), v. 35, N. 3, 1987, 385–394.

[22] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no arithmetic progressions // Acta Math. Hungar., v. 56, 1990, 155–158.

[23] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // GAFA, 9, 1999, 968–984.

[24] *Behrend F. A.* On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression // Proc. Nat. Acad. Sci., 23, 1946, 331–332.

[25] emphSalem R., Spencer D. C. On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression // Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., 28, 1942, 561 – 563 ; *Salem R., Spencer D. C.* On sets which do not contain a given number of terms in arithmetical progression // Nieuw Arch. Wisk., 23, 1950, 561 – 563 ; *Moser L.* On non–averaging sets of integers // Canad. Math. J., 5, 1953, 245–252.

[26] *Rankin R. A.* Sets of Integers Containing not more than a Given Number of Terms in Arithmetic Progression // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 65, N.4, Sec. A, 1961, 332–344.

Теоремы К.Ф. Рота, Е. Семереди, Д.Р. Хиф–Брауна и Ж. Бургена относятся к оценке величины $a_3(N)$. Долгое время вопрос о поведении функций $a_k(N)$ при $k \geq 4$ оставался открытым. Лишь в 1975 году Е. Семереди доказал, что $a_k(N) \to 0$ при $N \to +\infty$ для всех $k \geq 4$ (см. статьи[27]).

Альтернативное доказательство теоремы Е. Семереди было предложено Г. Фюрстенбергом в работе[28] (более простое доказательство изложено в статье[29]). Его подход использует методы эргодической теории. Г. Фюрстенберг показал, что теорема Е. Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости для почти всех точек в произвольной динамической системе.

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 году В.Т. Гауэрс[30] получил первый эффективный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$.

**Теорема 5. (Гауэрс)** *Для всех натуральных $N \geq 3$ и $k \geq 4$ справедливо неравенство*

$$a_k(N) \ll 1/(\log\log N)^{c_k}\,,$$

*где константа $c_k = 2^{-2^{k+9}}$.*

Рассмотрим двумерную решетку $[N]^2$ с базисом $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ и $\mathbf{e}_2 = (0,-1)$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2}\max\{\ |A|\ :\ A \subseteq [1,N]^2 \text{ и}$$

$$A \text{ — не содержит троек вида } (k,m),\ (k+d,m),\ (k,m+d),\ d>0\}. \qquad (2)$$

Тройку из (2) мы будем называть *уголком.* В работе[31] М. Атаи и Е. Семереди доказали, что величина $L(N)$ стремится к 0, когда $N$ стремится к бесконечности. Говоря точнее, они получили даже более сильный результат.

**Теорема 6. (Атаи, Семереди)** *Пусть $0 < \delta \leq 1$ — действительное число, $N$ — натуральное число и $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ — единичный квадрат. Тогда любое множество $A \subseteq [N]^2$, $|A| \geq \delta N^2$ содержит аффинный образ $S$, то есть множество $aS+b$, где $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}^2$.*

---

[27] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression // Acta Arith. Acad. Sci. Hungar., v. 20, 1969, 89–104 ; *Szemerédi E.* On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // Acta Arith., 27, 1975, 299–345.

[28] *Furstenberg H.* Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions // J. d'Analyse Math., v. 31, 204–256, 1977.

[29] *Furstenberg H., Katznelson Y. and Ornstein D.* The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi's Theorem // Bull. Amer. Math. Soc., v. 7, N.3, 527–552, 1982.

[30] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four // Geom. func. anal., v.8, 1998, 529–551 ; *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem // Geom. func. anal., v.11, 2001, 465–588.

[31] *Ajtai M., Szemerédi E.* Sets of lattice points that form no squares // Stud. Sci. Math. Hungar., 9, 1974, 9–11.

Затем теорема 6 была передоказана Г. Фестенбергом в книге[32].

Ясно, что задача про уголки является двумерным обобщением задачи о множествах без арифметических прогрессий длины три в том смысле, что равенство $\lim_{N\to\infty} L(N) = 0$ влечет $\lim_{N\to\infty} a_3(N) = 0$.

В.Т. Гауэрс (см. статью[33]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к 0. В работе[34] В. Ву, развивая подход из статьи[35] предложил следующее решение этого вопроса. Пусть $\log_{[1]} = \log N$ и для $l \geq 2$ положим $\log_{[l]} N = \log(\log_{[l-1]} N)$. Таким образом $\log_{[l]} N$ есть результат взятия логарифма от числа $N$ $l$ раз подряд. Далее, пусть $k$ — наибольшее натуральное число, такое, что $\log_{[k]} N \geq 2$. Тогда положим $\log_* N = k$.

**Теорема 7. (Ву)**

$$L(N) \leq \frac{100}{\log_*^{1/4} N}\,.$$

В работах[36] был получен следующий результат.

**Теорема 8.** *Пусть $\delta > 0$, $N \gg \exp\exp\exp(\delta^{-C})$, $C > 0$ — некоторая эффективная константа и $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ — произвольное подмножество, мощности не меньше, чем $\delta N^2$. Тогда $A$ содержит тройку вида $(k, m), (k + d, m), (k, m + d)$, где $d > 0$.*

Таким образом получена оценка величины $L(N)$ сверху $L(N) \ll 1/(\log\log N)^{C_1}$, где $C_1 = 1/C$.

Кроме того, в этом же параграфе мы получим простейшую оценку снизу для величины $L(N)$.

**Теорема 9.** *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что для всех натуральных $N \geq N_\varepsilon$, выполнено $L(N) \geq N^{-\frac{\log 2+\varepsilon}{\log\log N}}$.*

Доказательство теоремы 8 содержится в параграфах 2.2, 2.3 и 2.4.

Параграф 2.2 посвящен понятию $\alpha$–равномерности.

Пусть $N$ — натуральное число. Обозначим через $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ множество вычетов по модулю $N$. Пусть $A$ произвольное множество из $\mathbb{Z}_N$, $|A| = \delta N$. Будем обозначать той же буквой $A$ характеристическую функцию этого множества. Функция $f(s) = A(s) - \delta$ называется *балансовой* функцией множества

[32] *Furstenberg H.* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory / Princeton (N.J.), 1981.

[33] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four // Geom. func. anal., v.8, 1998, 529–551.

[34] *Vu V. H.* On a question of Gowers // Ann. of Combinatorics, 6, 2002, 229–233.

[35] *Solymosi J.* Note on a generalization of Roth's theorem // Discrete and computational geometry, 825–827, Algorithms Combin., 25, Springer, Berlin, 2003.

[36] *Шкредов И. Д.* Об одной задаче Гауэрса // ДАН, 400, N 2, 169–172, 2005 ; *Шкредов И. Д.* Об одной задаче Гауэрса // ИАН, 200, N 2, 176–217, 2006.

$A$. Обозначим через $\mathbb{D}$ замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в 0 и радиусом 1.

**Определение 1.** Функция $f$ из $\mathbb{Z}_N$ в $\mathbb{D}$ называется *$\alpha$–равномерной*, если

$$\sum_k |\sum_s f(s)\overline{f(s-k)}|^2 \le \alpha N^3. \tag{3}$$

Будем говорить, что множество $A$ является $\alpha$–равномерным, если его балансовая функция $\alpha$–равномерна.

Пусть $E_1 \times E_2$ некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$ и $f : \mathbb{Z}_N^2 \to \mathbb{D}$ — некоторая функция. Будем писать $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{D}$, если вне $E_1 \times E_2$ функция $f$ равна 0.

**Определение 2.** Пусть $\alpha$ любое действительное число, $\alpha \in [0,1]$. Пусть $E_1 \times E_2$ — некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$. Функция $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{D}$ называется *$\alpha$–равномерной, относительно базиса* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если

$$\sum_{\mathbf{s},u} \sum_r f(\mathbf{s})\overline{f(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_2)}\,\overline{f(\mathbf{s}+r\mathbf{e}_1)}f(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_2+r\mathbf{e}_1) \le \alpha |E_1|^2|E_2|^2. \tag{4}$$

Пусть множество $A$ принадлежит некоторому множеству $E_1 \times E_2$. Определим плотности $\delta_m = \delta_m^{\mathbf{e}_1}$ и $\gamma_k = \gamma_k^{\mathbf{e}_2}$ по формулам $\delta_m = 1/|E_1| \cdot \sum_{p=1}^N A(m\mathbf{e}_2 + p\mathbf{e}_1)$, $\gamma_k = 1/|E_2| \cdot \sum_{p=1}^N A(k\mathbf{e}_1 + p\mathbf{e}_2)$. Функцию $f(\mathbf{s}) = (A(\mathbf{s}) - \delta_m) \cdot (E_1 \times E_2)(\mathbf{s})$ назовем *балансовой* функцией множества $A$.

Будем говорить, что множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является $\alpha$–равномерным, относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если его балансовая функция $\alpha$–равномерна, относительно этого базиса.

Наше первое предложение относится к ситуации, когда множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является *$\alpha$–равномерным, относительно базиса* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, а сами множества $E_1$, $E_2$ являются *$\alpha$–равномерными в смысле определения 6.*

**Теорема 10.** *Пусть множество $A$ принадлежит $E_1 \times E_2$ и имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$ и множества $E_1, E_2$ являются $10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132}$ равномерными. Пусть также $A$ является $\alpha$–равномерным, относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\alpha = 10^{-108}\delta^{44}$, $N \ge 10^{10}(\delta^4\beta_1\beta_2)^{-1}$ и $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \le \alpha\beta_2 N$. Тогда $A$ содержит уголок.*

В параграфе 2.3 мы рассматриваем ситуацию когда множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ *не является $\alpha$–равномерным*, а $E_1$, $E_2$ *произвольны.* В этом случаем справедливо следующее предложение.

**Теорема 11.** *Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть $\alpha > 0$ действительное число и $A$ не $\alpha$–равномерно, относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Тогда существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$ для которых выполнено*

$$|A \bigcap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-500}\alpha^{70})|G_1||G_2| \text{ и} \tag{5}$$

$$|G_1|, |G_2| > 2^{-500}\alpha^{70} \min\{|E_1|, |E_2|\}. \tag{6}$$

Наконец, в последнем параграфе 2.4 мы доказываем структурную теорему о декартовых произведениях плотных подмножеств $[N]$.

Мы будем говорить, что двумерная арифметическая прогрессия $P$ есть *правильный квадрат*, если $P = P_1 \times P_2$, где $P_1$, $P_2$ одномерные прогрессии с одинаковыми разностями и равной мощности.

**Теорема 12.** *Пусть $0 < \varepsilon \le \delta$ — некоторые числа и пусть $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0, 1]$, $\rho \ge 4$. Пусть множество $W$ содержится в $\{1, \dots, N\}^2$, $|W| = \delta N^2$ и $N \ge (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$, а $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Тогда существуют правильные квадраты $P_1, \dots, P_M \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ и разбиение $W$ на множества $W \cap P_1, \dots, W \cap P_M$ и $B$, для которых выполнено*
*1) Для любого $i$ множество $W$ является $\alpha(\delta_{P_i}(W))$–равномерным в прогрессии $P_i$.*
*2) Для любого $i$ выполнено $|W \cap P_i| \ge \varepsilon|P_i|$ и $|P_i| \ge N^{c_2^{1/\alpha}}$.*
*3) $|B| < 4\varepsilon N^2$.*

Из этого утверждения вытекает следующая теорема.

**Теорема 13.** *Пусть $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – некоторые множества, $|W_1| = \beta_1 N$, $|W_2| = \beta_2 N$, $\zeta \in (0, 1)$ некоторое число, $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0, 1]$, $\rho \ge 4$ и $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. Предположим, что множество $A$ содержится в $W_1 \times W_2$, $|A| = \delta|W_1||W_2|$ и $N \ge (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$. Тогда существует такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \ge N^{c_2^{1/a}}$ и множества $R_1$,$R_2$, $R_1 \subseteq (W_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (W_2 \cap P_2)$, $|R_1 \times R_2| \ge \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следущими свойствами : $R_1$, $R_2$ являются $\alpha(\delta_{P_1}(R_1))^{1/2}$, $\alpha(\delta_{P_2}(R_2))^{1/2}$–равномерными , соответственно, в $P_1$ и $P_2$ и $\delta_{R_1 \times R_2}(A) \ge \delta - 4\zeta$.*

В последней части параграфа 2.4 мы объединяем теоремы 10, 11, 13 и с помощью итеративной процедуры доказываем основную теорему 8.

**Содержание главы 3.**

В главе 3 мы доказываем усиление теоремы 8 (см. работы[37]).

**Теорема 14.** *Пусть* $\delta > 0$, $N \gg \exp\exp(\delta^{-c})$, $c > 0$ — *некоторая эффективная константа и* $A \subseteq \{1, \ldots, N\}^2$ — *произвольное подмножество, мощности не меньше, чем* $\delta N^2$. *Тогда* $A$ *содержит тройку вида* $(k, m), (k + d, m), (k, m + d)$, *где* $d > 0$.

Таким образом получена оценка величины $L(N)$ сверху $L(N) \ll 1/(\log\log N)^{C_1}$, где $C_1 = 1/c$.

Доказательство теоремы 14 содержится в параграфах 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 и 3.6.

Параграф 3.2 посвящен свойствам множеств Бора[38].

Пусть $N$ и $d$ натуральные числа, $\varepsilon > 0$ — действительное число и $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \mathbf{T}^d$.

**Определение 3.** Множеством Бора $\Lambda = \Lambda_{\theta,\varepsilon,N}$ называется множество

$$\Lambda_{\theta,\varepsilon,N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq N,\ \|n\theta_j\| < \varepsilon \text{ для } j = 1, \ldots, d\}\,.$$

**Определение 4.** Пусть $0 < \kappa < 1$ — некоторое число. Множество Бора $\Lambda = \Lambda_{\theta,\varepsilon,N}$ называется *регулярным*, если для любых $\varepsilon'$, $N'$, таких что

$$|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\kappa}{100d}\varepsilon \quad \text{и} \quad |N - N'| < \frac{\kappa}{100d}N$$

выполнено

$$1 - \kappa < \frac{|\Lambda_{\theta,\varepsilon',N'}|}{|\Lambda_{\theta,\varepsilon,N}|} < 1 + \kappa\,.$$

В работе[39] была доказана лемма.

**Лемма 1.** *Пусть* $0 < \kappa < 1$ *некоторое число и* $\Lambda_{\theta,\varepsilon,N}$ *множество Бора. Тогда существует пара* $(\varepsilon_1, N_1)$ *со свойствами*

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_1 < \varepsilon \quad \textit{и} \quad \frac{N}{2} < N_1 < N$$

*такая, что множество Бора* $\Lambda_{\theta,\varepsilon_1,N_1}$ *является регулярным.*

[37] *Шкредов И. Д.* Об одном обобщении теоремы Семереди // ДАН, 405, N 3, 315–319, 2005 ; *Shkredov I. D.* On a Generalization of Szemerédi's Theorem // Proceedings London Math. Soc., 93, N 3, 723–760, 2006.

[38] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // GAFA, 9, 1999, 968–984.

[39] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // GAFA, 9, 1999, 968–984.

**Определение 5.** Пусть $\varepsilon \in (0,1]$ некоторое число и $\Lambda_{\theta,\varepsilon_0,N_0}$ — множество Бора, $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_d)$. Регулярное множество Бора $\Lambda' = \Lambda_{\theta',\varepsilon',N'}$ называется *$\varepsilon$–сопровождающим* множества $\Lambda$, если $\theta' = (\theta_1,\dots,\theta_d,\theta_{d+1},\dots,\theta_{d+k})$, $k \ge 0$, $\varepsilon\varepsilon_0/2 \le \varepsilon' \le \varepsilon\varepsilon_0$, $\varepsilon N_0/2 \le N' \le \varepsilon N_0$. Из леммы 1 вытекает существование такого множества.

В параграфе 3.3 мы даем определение $(\alpha,\varepsilon)$–равномерных подмножеств множеств Бора, а также множеств являющихся $(\alpha,\varepsilon)$–равномерными, относительно прямоугольной нормы.

Пусть $f$ — функция из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$ принимающая конечное число ненулевых значений. Обозначим через $\widehat{f}(x)$ коэффициент Фурье функции $f$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f(s)e(-sx),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$.

**Определение 6.** Пусть $\Lambda$ — множество Бора, $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta|\Lambda|$, $\alpha, \varepsilon$ — некоторые положительные числа и $\Lambda'$ есть $\varepsilon$–сопровождающее множества $\Lambda$. Рассмотрим множество

$$B = \{m \in \Lambda \mid \|(Q\cap(\Lambda'+m) - \delta(\Lambda'+m))\widehat{\ }\|_\infty \ge \alpha|\Lambda'|\}\,.$$

Множество $Q$ называется $(\alpha,\varepsilon)$–*равномерным*, если

$$|B| \le \alpha|\Lambda|\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{m\in\Lambda} |\delta_{\Lambda'+m}(Q) - \delta|^2 \le \alpha^2\,. \tag{8}$$

и

$$\|(Q\cap\Lambda - \delta\Lambda)\widehat{\ }\|_\infty \le \alpha|\Lambda|\,. \tag{9}$$

Пусть $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ — множества Бора, $\varepsilon > 0$ некоторое число и $\Lambda'$ есть $\varepsilon$–сопровождающее множества $\Lambda_1$. Пусть также $E_1$, $E_2$ — некоторые подмножества $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, соответственно, и $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $E_2 = \beta_2|\Lambda_2|$.

**Определение 7.** Функция $f : \Lambda_1\times\Lambda_2 \to \mathbb{D}$ называется *$(\alpha,\varepsilon)$–равномерной, относительно прямоугольной нормы*, если

$$\|f\|^4_{\Lambda_1\times\Lambda_2,\varepsilon} = \sum_{i\in\Lambda_1}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_{k}\sum_{m,u}\Lambda'(m-k-i)\Lambda'(u-k-i)\ \times$$

$$|\sum_r \Lambda'(k+r-j)f(r,m)f(r,u)|^2 \le \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^4|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|\,. \tag{10}$$

Обозначим множество $\Lambda'$ в формуле (10) через $\Lambda_1(\varepsilon)$.

**Определение 8.** Пусть $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|A| = \delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1||\Lambda_2|$, $\delta > 0$ и $f(\mathbf{s}) = A(\mathbf{s}) - \delta(E_1 \times E_2)(\mathbf{s})$. Пусть $f_l(\mathbf{s}) = f(s_1 + l, s_2)\Lambda'(s_1)$, $l \in \Lambda_1$. Рассмотрим множество

$$B = \{l \in \Lambda_1 \mid \|f_l\|^4_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon} > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'(\varepsilon)|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\} .$$

Множество $A$ называется $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$–*равномерным*, относительно прямоугольной нормы, если $|B| \le \alpha_1|\Lambda_1|$.

Первое предложение параграфа 3.3 относится к ситуации, когда множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$–*равномерным, относительно прямоугольной нормы*, а сами множества $E_1$, $E_2$ являются $(\alpha, \varepsilon)$–*равномерными* в смысле определения 6.

Пусть $\Lambda$ некоторое множество Бора, $\Lambda = \Lambda_{\theta, \varepsilon_1, N_1}$, $\theta \in \mathbf{T}^d$ и $E_1, E_2 \subseteq \Lambda$, $|E_1| = \beta_1|\Lambda|$, $|E_2| = \beta_2|\Lambda|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ декартово произведение $E_1 \times E_2$.

**Теорема 15.** *Пусть множество $A$ принадлежит $E_1 \times E_2$ и имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть множества $E_1, E_2$ являются $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$–равномерными, $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = (2^{-100}\alpha_0^2)/(100d)$. Пусть также $A$ является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$–равномерным, относительно прямоугольной нормы, $\alpha = 2^{-100}\delta^{12}$, $\alpha_1 = 2^{-7}\delta$ и*

$$\log N_1 \ge 2^{10} d \log \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon} . \tag{11}$$

*Тогда $A$ содержит тройку вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \ne 0$.*

Пусть $A \subseteq E_1 \times E_2$ не содержит троек вида $\{(k, m), (k+d, m), (k, m+d)\}$ с $d \ne 0$. В параграфе 3.4 мы доказываем следующий результат.

**Теорема 16.** *Пусть множество $A$ принадлежит $\mathcal{P}$, имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$ и не содержит троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \ne 0$. Пусть множества $E_1, E_2$ являются $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$–равномерными, $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = (2^{-100}\alpha_0^2)/(100d)$, $\varepsilon' = 2^{-10}\varepsilon^2$ и*

$$\log N \ge 2^{10} d \log \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} .$$

*Тогда существует множество Бора $\tilde{\Lambda}$ и такой вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$, что для множеств $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, выполнено*

$$|F_1| \ge 2^{-125}\delta^{12}\beta_1|\tilde{\Lambda}|, \quad |F_2| \ge 2^{-125}\delta^{12}\beta_2|\tilde{\Lambda}| \quad \text{и} \tag{12}$$

$$\delta_{F_1\times F_2}(A) \ge \delta + 2^{-500}\delta^{37}\,. \tag{13}$$

*При этом для* $\tilde\Lambda = \Lambda_{\tilde\theta,\tilde\varepsilon,\tilde N}$ *выполнено* $\tilde\theta = \theta$, $\tilde\varepsilon \ge 2^{-5}\varepsilon'\varepsilon_0$ *и* $\tilde N \ge 2^{-5}\varepsilon' N$.

В доказательстве последнего утверждения используется теорема 15.

Сформулирем основной результат параграфа 3.5.

**Теорема 17.** *Пусть* $\Lambda = \Lambda(\theta,\varepsilon_0,N)$ *некоторое множество Бора,* $\theta \in \mathbf{T}^d$ *и целый вектор* $\mathbf{s} = (s_1,s_2)$. *Пусть* $\varepsilon,\sigma,\tau,\delta \in (0,1)$ *— вещественные числа,* $E_1$, $E_2$ *некоторые множества,* $E_i = \beta_i|\Lambda|$, $i = 1,2$, $\mathbf{E} = E_1\times E_2$ *подмножество* $(\Lambda+s_1)\times(\Lambda+s_2)$, $A\subset \mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta+\tau$ *и* $\varepsilon \le \kappa/(100d)$, $\kappa = 2^{-100}(\tau\beta_1\beta_2)^5\sigma^3$. *Предположим также, что*

$$N \ge (2^{-100}\varepsilon_0\varepsilon)^{-2^{100}((\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3}+d)^2}\,. \tag{14}$$

*и* $\sigma \le 2^{-100}\tau\beta_1\beta_2$. *Тогда существует множество Бора* $\Lambda' = \Lambda(\theta',\varepsilon',N')$, $\theta' \in \mathbf{T}^D$, $D \le 2^{30}(\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3}+d$, $\varepsilon' \ge (2^{-10}\varepsilon)^D\varepsilon_0$, $N' \ge (2^{-10}\varepsilon)^D N$ *и целый вектор* $\mathbf{t} = (t_1,t_2)$, *так что для множеств* $E_1' = (E_1-t_1)\cap\Lambda'$, $E_2' = (E_2-t_2)\cap\Lambda'$, $\mathbf{E}' = E_1'\times E_2'$ *выполнено*
1) $|\mathbf{E}'| \ge \beta_1\beta_2\tau|\Lambda'|/16$;
2) $E_1', E_2'$ *являются* $(\sigma,\varepsilon)$ *— равномерными подмножествами* $\Lambda'$;
3) $\delta_{\mathbf{E}'}(A-\mathbf{t}) \ge \delta+\tau/16$.

В последнем параграфе главы 3 мы объединяем теоремы 16, 17 и с помощью итеративной процедуры доказываем основную теорему 14.

**Содержание главы 4.**

Пусть $X$ — некоторое множество с сигма–алгеброй его подмножеств $\mathcal{B}$. Пусть также $T$ — измеримое, сохраняющее меру $\mu$ отображение $X$ в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Четверка $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ называется *динамической системой с инвариантной мерой.* Хорошо известная теорема А. Пуанкаре о возвращении[40] утверждает, что для всякого измеримого множества $E \subseteq X$, $\mu E > 0$ существует натуральное $n > 0$ такое, что $\mu(E\cap T^{-n}E) > 0$.

Предположим, дополнительно, что $X$ — метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, а $\mathcal{B}$ — борелевская сигма–алгебра. В этом случае теорема Пуанкаре может быть переформулирована следующим образом.

**Теорема 18.** *Пусть* $X$ *— метрическое пространство с метрикой* $d(\cdot,\cdot)$ *и* $\mu$ *— борелевская мера на* $X$. *Пусть* $T$ *— отображение* $X$ *в себя, сохраняющее меру* $\mu$. *Тогда для почти всех точек* $x\in X$ *выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty}\, d(T^n x, x) = 0\,. \tag{15}$$

[40] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики / Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.

Как мы отмечали выше Г. Фюрстенберг[41] (см. также[42]) обобщил теорему Пуанкаре на случай нескольких степеней отображения $T$.

**Теорема 19.** *Пусть $X$ — пространство с сигма–алгеброй измеримых множеств $\mathcal{B}$ и $\mu$ — мера на $X$. Пусть $T$ — отображение $X$ в себя, сохраняющее меру $\mu$, и $k \geq 3$. Тогда для любого измеримого множества $E$ с $\mu E > 0$ существует натуральное $n > 0$ такое, что*

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0\,.$$

Если $X$ — метрическое пространство, то теорема 19 может быть переформулирована следующим образом.

**Теорема 20.** *Пусть $X$ — метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и $\mu$ — борелевская мера на $X$. Пусть $T$ — сохраняющее меру $\mu$ отображение $X$ в себя и $k \geq 3$. Тогда для почти всех $x \in X$*

$$\liminf_{n\to\infty}\ \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n}x, x), \ldots, d(T^{(k-1)n}x, x)\} = 0\,.$$

В работе[43] Г. Фюрстенберг и Я. Кацнельсон перенесли теорему 19 на случай нескольких *коммутирующих* отображений. Мы сформулируем их теорему в случае, когда $X$ является метрическим пространством.

**Теорема 21.** *Пусть $X$ — метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и $\mu$ — борелевская мера на $X$. Пусть $k \geq 2$ и $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — сохраняющие меру $\mu$ коммутирующие отображения $X$ в себя. Тогда для почти всех $x \in X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty}\ \max\{d(T_1^n x, x), d(T_2^n x, x), \ldots, d(T_k^n x, x)\} = 0\,.$$

[41] *Furstenberg H.* Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions // J. d'Analyse Math., v. 31, 204–256, 1977.

[42] *Furstenberg H.* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory / Princeton (N.J.), 1981 ; *Furstenberg H., Katznelson Y. and Ornstein D.* The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi's Theorem // Bull. Amer. Math. Soc., v. 7, N.3, 527–552, 1982.

[43] *Furstenberg H., Katznelson Y.,* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d'Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978.

Эквивалентность теоремы Е. Семереди теоремам 19 или 20 былы доказана Г. Фюрстенбергом[44], что указывает на тесную связь между эргодической теорией и комбинаторными задачами об арифметических прогрессиях.

Глава 4 посвящена *количественным* аспектам возвращаемости. В ней мы получим верхние и нижние оценки скорости кратного возвращения для метрических пространств с конечной хаусдорфовой мерой. В работе[45] М. Бошерницан доказал, что если в динамической системе $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ пространство $X$ обладает конечной хаусдорфовой мерой, то теорема Пуанкаре 18 может быть значительно усилена (ниже мы сформулируем теорему Бошерницана более строго). После этого результата возникает естественный вопрос о получении аналогичных усиленных вариантов теорем 20 и 21 для пространств с конечной хаусдорфовой мерой. В параграфе 4.2 мы получим такие варианты для теоремы 20 и частично теоремы 21 (случай $k = 2$). Наши результаты дают *верхние* оценки скорости кратного возвращения. В параграфе 4.3 мы получим *нижние* оценки для скорости кратного возвращения. В своем доказательстве мы применяем оценки А. Беренда и Р. Ранкина для величины $a_k(N)$ (см. теорему 4 выше).

Прежде чем сформулировать теорему Бошерницана и наш основной результат мы дадим несколько определений.

Рассмотрим меру $H_h(\cdot)$ на $X$, определенную следующим образом

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_h^{\delta}(E)\,, \tag{16}$$

где $h(t)$ — неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^{\delta}(E) = \inf\{\sum h(\delta_j)\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям $E$ открытыми множествами $\{B_j\}$, $\mathrm{diam}(B_j) = \delta_j < \delta$.
Если $h(t) = t^{\alpha}$, то получаем обычную меру Хаусдорфа, которую обозначим через $H_{\alpha}(\cdot)$.

Внешняя мера $H_h(\cdot)$ является сигма–аддитивной на сигма–алгебре множеств, измеримых по Каратеодори. Хорошо известно[46], что эта сигма–алгебра содержит все борелевские множества.

Будем говорить, что меры $\mu$ и $H_h$ *согласованы*, если любое $\mu$–измеримое множество является $H_h$–измеримым (в смысле измеримости по Каратеодори).

**Определение 9.** Пусть $x \in X$. Число

$$C(x) = C^h(x) := \liminf_{n \to \infty} \{n \cdot h(d(T^n x, x))\}$$

[44] *Furstenberg H.* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory / Princeton (N.J.), 1981.

[45] *Boshernitzan M.* Quantitative recurrence results // Inventiones mathematicae, 113, Fasc. 3, 1993, 617–631.

[46] *Богачев В. И.* Основы теориии меры / Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003.

называется *константой возвращения* точки $x$.

В статье[47] М. Бошерницан получил первый количественный аналог теоремы 18. Похожий результат независимо доказал Н.Г. Мощевитин в работе[48].

**Теорема 22.** *Пусть $X$ — метрическое пространство, имеющее $H_h(X) < \infty$, а $T$ — отображение $X$ в себя, сохраняющее меру $\mu$. Пусть также меры $\mu$ и $H_h$ согласованы. Тогда для почти всех, относительно меры $\mu$, точек $x$ из $X$ выполнено $C(x) < \infty$.*

В работе[49] М. Бошерницан получил ряд приложений теоремы 22 к различным динамическим системам. О приложении теоремы Бошерницана к теории цепных дробей см. статью[50].

В статье[51] был доказан результат, несколько усиливающий теорему 22.

**Теорема 23.** *Пусть $X$ — метрическое пространство, имеющее $H_h(X) < \infty$, а $T$ — отображение $X$ в себя, сохраняющее меру $\mu$. Предположим, что меры $\mu$ и $H_h$ согласованы. Тогда $C(x)$ интегрируемая (по мере $\mu$) функция и для любого $\mu$–измеримого $A$ выполнено*

$$\int_A C(x)d\mu \leq H_h(A)\,. \tag{17}$$

*Если же $H_h(A) = 0$, то $\int_A C(x)d\mu = 0$ без условия согласованности мер $\mu$ и $H_h$.*

Кроме того, в той же работе был получен результат о скорости возвращения для вполне ограниченных метрических пространств.

**Определение 10.** Пусть $G$ — вполне ограниченное подмножество в $X$. $\varepsilon$ - *энтропией* множества $G$ (следуя А.Н. Колмогорову[52]) называется величина $H_\varepsilon(G, X) = \log_2 N_\varepsilon(G, X)$ , где $N_\varepsilon(G, X)$ - наименьшее количество точек которое может быть в $\varepsilon$ - сети этого множества.

Обозначим через $N_\varepsilon(X)$ число $N_\varepsilon(X, X)$.

---

[47] *Boshernitzan M.* Quantitative recurrence results // Inventiones mathematicae, 113, Fasc. 3, 1993, 617–631.

[48] *Мощевитин Н. Г.* Об одной теореме Пуанкаре // УМН, 53, вып. 1, 1998, 219–220.

[49] *Boshernitzan M.* Quantitative recurrence results // Inventiones mathematicae, 113, Fasc. 3, 1993, 617–631.

[50] *Шкредов И. Д.* Повторяемость неполных частных у цепных дробей // УМН, т. 57, N. 4, 2002, с. 189–190.

[51] *Шкредов И. Д.* О возвращаемости в среднем // Мат. заметки, т. 72, вып. 4, 2002, 625–632.

[52] *Колмогоров А. Н.* О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // ДАН, том 108, 3, 1956.

**Определение 11.** Возьмем произвольное натуральное $N$ и пусть $x \in X$. Число
$$C_N(x) = \min\{ \ d(T^n x, x) \mid 1 \le n \le N \ \}$$
назовем $N$ – константой возвращаемости для точки $x$.

**Теорема 24.** *Пусть $X$ — вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\mathrm{diam}(X) = 1$ и $T$ — отображение $X$ в себя, сохраняющее меру $\mu$.*
*Пусть $A \subseteq X$ — любое $\mu$–измеримое множество и $g(x)$ действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0,1]$, такая что для любого $t \in (0,1]$ существует интеграл Стилтьеса $\int_t^1 N_A(z)dg(z)$,*
*где $N_A(z) = \min(\mu(A), N_z(A,X)/N)$. Тогда выполнено следующее неравенство*
$$\int_A g(C_N(x))d\mu \le \inf_t \{ \ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z)\, dg(z) \ \}\,.$$

Вернемся к теоремам 19 и 21. В параграфе 4.2 мы доказываем некоторые их количественные варианты.

Пусть $S$ и $R$ два *коммутирующих* отображения пространства $X$, сохраняющие меру $\mu$.

**Определение 12.** Пусть $x \in X$. Число
$$C_{S,R}(x) = C^h_{S,R}(x) := \liminf_{n\to\infty} \ \{L^{-1}(n) \cdot \max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\}\}\,,$$
где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$, называется *константой одновременного (или кратного) возвращения* точки $x$.

**Теорема 25.** *Пусть $X$ — метрическое пространство, имеющее $H_h(X) < \infty$ , а $S, R$ - коммутирующие отображения $X$ в себя, сохраняющие меру $\mu$. Предположим, что меры $\mu$ и $H_h$ согласованы. Тогда $C_{S,R}(x)$ интегрируемая (по мере $\mu$) функция и для любого $\mu$–измеримого $A$ выполнено*
$$\int_A C_{S,R}(x)d\mu \le H_h(A)\,. \tag{18}$$
*Если же $H_h(A) = 0$, то $\int_A C_{S,R}(x)d\mu = 0$ без условия согласованности мер $\mu$ и $H_h$.*

По аналогии с определением 11 мы дадим определение константы возвращаемости точки под действием двух коммутирующих операторов.

**Определение 13.** Возьмем произвольное натуральное $N$ и пусть $x \in X$. Число

$$C_N^{S,R}(x) = \min\{\ \max\{d(S^n x, x), d(R^n x, x)\} \mid 1 \le n \le N\ \}$$

назовем $N$ — константой одновременной возвращаемости для точки $x$.

**Теорема 26.** *Пусть $X$ — вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\mathrm{diam}(X) = 1$ и $S, R$ — отображения $X$ в себя, сохраняющие меру $\mu$.*
*Пусть $A \subseteq X$ — любое $\mu$–измеримое множество и $g(x)$ действительная не убывающая функция, ограниченная на $[0,1]$, такая что для любого $t \in (0,1]$ существует интеграл Стилтьеса $\int_t^1 N_A(z)dg(z)$,*
*где $N_A(z) = \min(\mu(A), N_z(A,X)L(N))$. Тогда для всех натуральных $N$ выполнено неравенство*

$$\int_A g(C_N^{S,R}(x))d\mu \le \inf_t\{\ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z)\,dg(z)\ \}\,.$$

Итак, в теоремах 22, 23, 24, 25, 26 получены верхние оценки для интегралов от функций $C(x)$ и $C_{S,R}(x)$. В параграфе 4.3 получим *нижние* оценки для функции кратного возвращения в случае когда на пространстве $X$ действует несколько степеней отображения $T$. Так как степени отображения $T$ коммутируют, то мы автоматически получаем нижнюю оценку функции кратного возвращения и в ситуации когда на $X$ действует несколько коммутирующих отображений.

Сформулируем основной результат параграфа 4.3.

Пусть $k$ — фиксированное натуральное число, $k \ge 3$. Пусть для всякого натурального $N$ задано непустое множество $A^{(N)} \subseteq \mathbb{Z}_N$, не содержащее арифметических прогрессий длины $k$. Обозначим плотность множества $A^{(N)}$ в $\mathbb{Z}_N$ через $\rho(N)$, $\rho(N) = |A^{(N)}|/N$. Тогда $\rho(1) = 1$. По теореме Е. Семереди имеем $\rho(N) \to 0$, при $N \to \infty$.

**Теорема 27.** *Пусть $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ — произвольная монотонно возрастающая функция, $X = [0,1]$, $\mu$ — мера Лебега на $X$ и $\{A^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ — построенная выше последовательность множеств. Тогда существует динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ такая, что $\mu$ и хаусдорфова мера $H_1$ согласованы, $H_1(X) = 0$, и для почти всех, относительно меры $\mu$, точек $x$ из $X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty}\ \left\{\frac{\psi(n)}{\rho(n)}\max\{d(T^n x, x), d(T^{2n}x, x), \dots, d(T^{(k-1)n}x, x)\}\right\} \ge 1\,. \qquad (19)$$

Напоминаем, что через $H_1$ мы обозначаем хаусдорфову меру с функцией $h(t) = t$.

**Следствие 1.** *Пусть $k$ — натуральное число, $k \geq 3$ и $\varepsilon > 0$ — любое действительное число. Тогда найдется динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$, $X = [0,1]$, $\mu$ — мера Лебега, $\mu$ и хаусдорфова мера $H_1$ согласованы, $H_1(X) = 0$ и положительная эффективная константа $C_k$, зависящая только от $k$ такая, что для почти всех точек $x \in X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\rho(n)} \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \ldots, d(T^{(k-1)n} x, x)\} \right\} \geq 1\,, \qquad (20)$$

*где $\rho(n) = \exp(-(1+\varepsilon) C_k (\log n)^{1/(k-1)})$.*

Метод, развитый для доказательства основной теоремы 27, может быть приложен к изучению функции обычной (не кратной) возвращаемости $C(x)$. В параграфе 4.4 мы доказываем следующий результат.

**Теорема 28.** *Пусть $f \geq 1$ — любое действительное число, $X = [0,1]$ и $\mu$ — мера Лебега на $X$. Тогда существует динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ такая, что $\mu$ и хаусдорфова мера $H_1$ согласованы, $H_1(X) = 1$ и для почти всех, относительно меры Лебега, точек $x$ из $X$ выполнено*

$$C_f(x) := \liminf_{n\to\infty} \{ n \cdot f \cdot d(T^n x, x) \} = 1\,. \qquad (21)$$

**Содержание главы 5.**

Пусть $N$ — натуральное число. Пусть $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ — произвольная функция. Преобразование Фурье функции $f$ задается формулой

$$\widehat{f}(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} f(n) e(-nr)\,, \qquad (22)$$

где $e(x) = e^{-2\pi i x/N}$. Для коэффициентов Фурье функции $f$ справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}_N} |\widehat{f}(r)|^2 = N \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |f(n)|^2\,. \qquad (23)$$

Пусть $\delta, \alpha$ — действительные числа, $0 < \alpha \leq \delta \leq 1$ и пусть $A$ — некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N$ мощности $\delta N$. Рассмотрим *множество $\mathcal{R}_\alpha$ больших тригонометрических сумм $A$*

$$\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_\alpha(A) = \{\ r \in \mathbb{Z}_N \ :\ |\widehat{A}(r)| \geq \alpha N\ \}\,. \qquad (24)$$

Задачу о изучении структуры множеств $\mathcal{R}_\alpha(A)$ поставил В.Т. Гауэрс в обзоре[53].

В 2002 году М.– Ч. Чанг доказала следующий результат[54].

**Теорема 29.** *Пусть $\delta, \alpha$ — действительные числа, $0 < \alpha \le \delta \le 1$, $A$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$ мощности $\delta N$ и множество $\mathcal{R}_\alpha$ определено равенством (24). Тогда найдется множество $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{|\Lambda|}\} \subseteq \mathbb{Z}_N$, $|\Lambda| \le 2(\delta/\alpha)^2 \log(1/\delta)$ такое, что всякий элемент $r$ множества $\mathcal{R}_\alpha$ представляется в виде*

$$r = \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \varepsilon_i \lambda_i \pmod N, \tag{25}$$

*где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.*

Развивая подход из[55] (см. также[56]) Чанг приложила свой результат к доказательству теоремы Фреймана[57] о множествах с маленькой суммой. Другие приложения теоремы 29 получил Б. Грин в статье[58]. Вопрос о структуре множества $\mathcal{R}_\alpha$, когда параметр $\alpha$ близок к $\delta$, изучался в работах[59] [60] [61], см. также обзор[62]. В другой работе[63] Б. Грин показал, что в некотором смысле теорема М.–Ч. Чанг является точной.

Мы видим, что результаты о строении множества $\mathcal{R}_\alpha$ являются важными для комбинаторной теории чисел. В §5.2 пятой главы настоящей диссерации мы доказываем следующую теорему (которая затем обобщается в §5.3).

**Теорема 30.** *Пусть $\delta, \alpha$ — действительные числа, $0 < \alpha \le \delta$, $A$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$ мощности $\delta N$, $k \ge 2$ — четное и множество*

[53] Rough structure and classification // Geom. Funct. Anal., Special Volume - GAFA2000 "Visions in Mathematics", Tel Aviv, (1999) Part I, 79–117.

[54] *Chang M.– C.,* A polynomial bound in Freiman's theorem // Duke Math. J. **113** (2002) no. 3, 399–419.

[55] *Ruzsa I.* Generalized arithmetic progressions and sumsets // Acta Math. Hungar., **65** (1994), 379–388.

[56] *Bilu Y.* Structure of sets with small sumset // Structure Theory of Sets Addition, Astérisque, Soc. Math. France, Montrouge, **258** (1999), 77–108.

[57] *Фрейман Г. А.* Основания структурной теории сложения множеств / Казанский гос. пед. инст., Казань, 1966.

[58] *Green B.* Arithmetic Progressions in Sumsets // Geom. Funct. Anal., **12** (2002) no. 3, 584–597.

[59] *Юдин А. А.* // Теория чисел (под ред. Г.А. Фреймана, А.М. Рубинова, Е.В. Новоселова), Калининский гос. унив., Москва (1973), 163–174.

[60] *Besser A.* Sets of integers with large trigonometric sums // Astérisque **258** (1999), 35–76.

[61] *Lev V. F.* Linear Equations over $\mathbb{F}_p$ and Moments of Exponential Sums // Duke Mathematical Journal **107** (2001), 239–263.

[62] *Konyagin S. V., Lev V. F.* On the distribution of exponential sums // Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **0** # A01, (2000).

[63] *Green B.* Some constructions in the inverse spectral theory of cyclic groups // Comb. Prob. Comp. **12** (2003) no. 2, 127–138.

*$\mathcal{R}_\alpha$ определено равенством (24). Пусть также $B \subseteq \mathcal{R}_\alpha \setminus \{0\}$ — произвольное множество. Тогда величина*

$$T_k(B) := |\{\ (r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_k) \in B^{2k}\ :\ r_1 + \cdots + r_k = r'_1 + \cdots + r'_k\ \}| \quad (26)$$

*не меньше, чем*

$$\frac{\delta\alpha^{2k}}{2^{4k}\delta^{2k}}|B|^{2k}\,. \quad (27)$$

Таким образом, теорема 30 показывает, что множество $\mathcal{R}_\alpha$ обладает сильной аддитивной структурой. Как показывают результаты параграфов 5.6–5.7 последняя теорема является точной.

Применяя технику норм В.Т. Гауэрса (см. статью[64]), в следующем параграфе §5.3 мы получаем обобщение теоремы 30 на системы линейных уравнений.

Пусть $k$ — натуральное число, $d \geq 0$ — целое. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица $(2^{d+1}k \times (d+1))$, где элементы $(a_{ij})$ матрицы $A$ определяются по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в двоичном разложении } (j-1) \text{ на } (i-1)\text{-ом месте стоит } 1 \\ & \text{и } 1 \leq j \leq 2^d k\,, \\ -1, & \text{если в двоичном разложении } (j-1) \text{ на } (i-1)\text{-ом месте стоит } 1 \\ & \text{и } 2^d k < j \leq 2^{d+1}k\,, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напоминаем, что двоичное разложение натурального числа $n$ определяется по правилу $n = \sum n_l \cdot 2^{l-1}$, где $l \geq 1$ и $n_l \in \{0, 1\}$.

**Теорема 31.** *Пусть $\delta, \alpha$ — действительные числа, $0 < \alpha \leq \delta$, $A$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$ мощности $\delta N$, $k$ — натуральное число, $d \geq 0$ — целое и множество $\mathcal{R}_\alpha$ определено равенством (24). Пусть также $B \subseteq \mathcal{R}_\alpha \setminus \{0\}$ — произвольное множество. Рассмотрим систему уравнений*

$$\sum_{j=1}^{2^{d+1}k} a_{ij} r_j = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, d+1\,, \quad (28)$$

*где элементы $(a_{ij})$ матрицы $A = (a_{ij})$, определены формулой выше и все $r_j \in B$. Тогда число решений системы (28) не меньше, чем*

$$\left( \frac{\delta\alpha^{2k}}{2^{4k}\delta^{2k}}|B|^{2k} \right)^{2^d}\,. \quad (29)$$

[64] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi's theorem // Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 465–588.

В параграфе 5.4 мы получаем несколько приложений теоремы 30 к задачам комбинаторной теории чисел. Мы выводим из теоремы 30 и неравенства В. Рудина[65] теорему М.– Ч. Чанг. Более того, мы доказываем результат, усиливающий теорему 29.

**Теорема 32.** *Пусть $N$ — натуральное число, $(N,2)=1$, $\delta,\alpha$ — действительные числа, $0<\alpha\le\delta\le 1/16$, $A$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$ мощности $\delta N$ и множество $\mathcal{R}_\alpha$ определено равенством (24). Тогда существует множество $\Lambda^*\subseteq\mathbb{Z}_N$,*

$$|\Lambda^*|\le\max(\,2^{12}(\delta/\alpha)^2\log(1/\delta),\,2^6\log^2(1/\delta)\,) \tag{30}$$

*такое, что для любого вычета $r\in\mathcal{R}_\alpha$ существует набор $\lambda_1^*,\dots,\lambda_M^*$ из не более, чем $8\log(1/\delta)$ элементов $\Lambda^*$ такой, что*

$$r=\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i\lambda_i^*\pmod N\,, \tag{31}$$

*где $\varepsilon_i\in\{-1,0,1\}$.*

*Кроме того, если число $N$ — простое, то найдется множество $\tilde\Lambda\subseteq\mathbb{Z}_N$,*

$$|\tilde\Lambda|\le 2^{12}(\delta/\alpha)^2\log(1/\delta)\log\log(1/\delta) \tag{32}$$

*такое, что для любого вычета $r\in\mathcal{R}_\alpha$ существует набор $\tilde\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_M$ из не более, чем $8\log(1/\delta)$ элементов $\tilde\Lambda$ такой, что*

$$r=\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i\tilde\lambda_i\pmod N\,, \tag{33}$$

*где $\varepsilon_i\in\{-1,0,1\}$.*

В том же параграфе мы получаем приложение теоремы 30 к уже упомянавшейся теореме Фреймана.

Пусть $K$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$ и $\varepsilon\in(0,1)$ — любое действительное число. *Множеством Бора $B(K,\varepsilon)$ в $\mathbb{Z}_N$* называется множество

$$B(K,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{Z}_N\ :\ \left\|\frac{rx}{N}\right\|<\varepsilon\,,\ \text{для всех } r\in K\}\,,$$

где $\|\cdot\|$ — означает целую часть действительного числа. О свойствах множеств Бора см. статью[66].

[65] *Rudin W.* Fourier analysis on groups / Wiley 1990 (репринт издания 1962 года).

[66] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 968–984.

**Теорема 33.** *Пусть $N$ — натуральное число, $(N,2)=1$, $0<\delta\le 2^{-256}$ — действительное число и $A$ — произвольное подмножество $\mathbb{Z}_N$, $|A|=\delta N$. Тогда $2A-2A$ содержит множество Бора $B(K,\varepsilon)$, где $|K|\le 2^{15}\delta^{-1}\log(1/\delta)$ и $\varepsilon=1/(2^8\log(1/\delta))$.*

Соискатель считает своим приятным долгом в первую очередь поблагодарить доктора физико–математических наук, профессора Н. Г. Мощевитина за постоянный интерес и внимание к работе. Кроме того, соискатель благодарит академика РАН, профессора Д. В. Аносова, чл.–корр. РАН, профессора Ю. В. Нестеренко, доктора физико–математических наук, профессора С. В. Конягина за неоднократную помощь и поддержку, а также доктора физико–математических наук, профессора В. В. Рыжикова за ряд ценных замечаний.

## РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. О возвращаемости в среднем // Математические заметки, т. 72, вып. 4, 625–632, 2002.
2. Повторяемость неполных частных у цепных дробей // Успехи мат. наук, 57, N 4, 189–190, 2002.
3. Об одной задаче Гауэрса // Доклады Академии наук, 400, N 2, 169–172, 2005.
4. Об одной задаче Гауэрса // Известия Академии наук, 70, N 2, 176–217, 2006.
5. Об одном обобщении теоремы Семереди // Доклады Академии наук, 405, N 3, 315–319, 2005.
6. On a Generalization of Szemerédi's Theorem // Proceedings London Math. Soc., 93, N 3, 723–760, 2006.
7. О динамических системах с медленной скоростью возвращения // Математический сборник, 197, N 11, 143–158, 2006.
8. Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях // Успехи мат. наук, т. 61, вып. 6, 111–178, 2006.

9. О множествах больших тригонометрических сумм // Доклады Академии наук, 411, N 4, 455–459, 2006.

10. О множествах больших тригонометрических сумм// Известия Академии наук, 72, N 1, 1–22, 2008.

11. Некоторые примеры множеств больших тригонометрических сумм // Математический Сборник, 198, N 12, 105–140, 2007.

12. О двумерном аналоге теоремы Семереди в абелевых группах // Известия Академии наук, 73, N 5, 179–222, 2008.