САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАСЛОВА Юлия Валерьевна

ЗАЦЕПЛЕНИЯ ГРАФОВ В $\mathbb{R}^3$

01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре геометрии факультета математики Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Нежинский Владимир Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент Макеев Владимир Владимирович (Санкт-Петербургский государственный университет)

кандидат физико-математических наук, ст. научн. сотр. Малютин Андрей Валерьевич (ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН)

Ведущая организация: Челябинский государственный университет

Защита состоится "____" ____________ 2009 года в ____ часов на заседании Совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Адрес диссертационного совета: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. А. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "____" ____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория зацеплений является одним из старейших разделов геометрической топологии. Традиционно основными объектами этой теории являлись зацепления одной или нескольких попарно непересекающихся окружностей в трехмерном евклидовом пространстве. К концу прошлого века усилиями таких выдающихся топологов, как Г. Зайферт, Дж. Милнор, Р. Фокс и др., методы теории оказались хорошо разработанными, сама теория - далеко продвинутой; значительная часть классических задач, для решения которых теория создавалась, оказалась решенной.

С середины 80-х годов прошлого века, наряду с классическими узлами и зацеплениями, топологи начали активно изучать зацепления графов. Содержательные результаты, относящиеся к зацеплениям графов, были получены К. Гордоном, М. Гусаровым, Л. Кауфманом, К. Таниямой и др. В настоящее время оказалось, что значительная часть разработанных методов и полученных результатов относится к зацеплениям конкретных графов. Разработка методов и получение результатов, относящихся к зацеплениям произвольных графов, - актуальная задача этой ветви теории зацеплений. Именно этой задаче посвящена настоящая работа.

Цель работы. Цель этой работы - во-первых, для трехкомпонентных зацеплений графов построить аналог гомотопической теории Милнора-Левина классических зацеплений, во-вторых, задачу изотопической классификации зацеплений графов свести к стандартной задаче теории классических зацеплений.

Методы исследований. В работе применяются стандартные методы геометрической и алгебраической топологий.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. Они заключаются в следующем.
1). Для трехкомпонентных зацеплений графов построен аналог гомотопической теории Милнора-Левина классических зацеплений. В частности, гомотопическая классификация трехкомпонентных зацеплений конечных графов сведена к стандартной алгебраической задаче.
2). Выделен класс графов, изотопическая классификация заузливаний которых сведена к изотопической классификации струнных зацеплений. Найдено достаточное условие принадлежности графа этому классу.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории зацеплений.

Апробация работы. Полученные результаты докладывались на международных конференциях в Москве (2006 г.), в Харькове (Украина, 2004 г.), в Черкассах (Украина, 2003, 2005 гг.), в Абрау-Дюрсо (2004, 2006 гг.), на всероссийской конференции в Великом Новгороде (2004 г.), в семинаре по алгебраической и дифференциальной топологии имени В. А. Рохлина в ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН (2003-2008 гг.), в семинаре по теории зацеплений в РГПУ им. А. И. Герцена (2003-2008 гг.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1-10]. Работы [2] и [10] являются публикациями в изданиях из перечня ВАК.

В работах [2, 4, 8, 9, 10], написанных в соавторстве с Нежинским В. М., Нежинскому В. М. принадлежат постановки задач и общее руководство. Масловой Ю. В. принадлежат формулировки теорем и их доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех глав, добавления и списка литературы; главы разбиты на параграфы. Объем диссертации - 117 страницы, список литературы содержит 28 наименований.

Содержание диссертации

Под *графом* мы понимаем конечное связное одномерное или нульмерное клеточное пространство.

Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ - графы. *Сингулярным зацеплением графов* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ называется последовательность непрерывных отображений

$$(f_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3, \ldots, f_r : \Gamma_r \to \mathbb{R}^3)$$

с попарно непересекающимися образами. Сингулярные зацепления $(f_1, \ldots, f_r)$ и $(f'_1, \ldots, f'_r)$ графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ называются *гомотопными*, если существует последовательность непрерывных отображений

$$F_i : \Gamma_i \times I \to \mathbb{R}^3,\ i = 1, 2, \ldots, r,$$

таких что (для $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$):
(1) $F_i(x, 0) = f_i(x)$ и $F_i(x, 1) = f'_i(x)$ при $x \in \Gamma_i$;
(2) $F_i(\Gamma_i \times t) \cap F_j(\Gamma_j \times t) = \varnothing$ при $t \in I$.

Сформулируем сначала результаты диссертации, относящиеся к гомотопической классификации трехкомпонентных сингулярных зацеплений.

Мы ограничились изучением сингулярных зацеплений букетов окружностей. Общий случай сводится к этому простыми стандартными рассуждениями.

Для любого натурального числа i через $B(i)$ мы будем обозначать (стандартный) букет i окружностей.

Пусть q_1, q_2, q_3 - натуральные числа. Обозначим через $\mathcal{M}(q_1, q_2, q_3)$ множество классов гомотопных сингулярных зацеплений букетов $B(q_1), B(q_2)$ и $B(q_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Наша цель – вычислить это множество.

Для $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ обозначим через H_{ij} множество целочисленных матриц строения $q_i \times q_j$ и определим отображение

$$\lambda_{ij} : \mathcal{M}(q_1, q_2, q_3) \to H_{ij}$$

следующим образом. Пусть $x \in \mathcal{M}(q_1, q_2, q_3)$. Выберем какого-нибудь представителя (f_1, f_2, f_3) класса x и обозначим через f_{il} и f_{jm} сужения отображений f_i и f_j на l-ую и m-ую окружности букетов $B(q_i)$ и $B(q_j)$ соответственно. Мы полагаем

$$\lambda_{ij}(x) = (lk(f_{il}, f_{jm}))_{1 \leqslant l \leqslant q_i, 1 \leqslant m \leqslant q_j},$$

где lk - коэффициент зацепления.

Теорема А(1). *Отображение*

$$\lambda : \mathcal{M}(q_1, q_2, q_3) \to H_{12} \times H_{13} \times H_{23}, \qquad x \mapsto (\lambda_{12}(x), \lambda_{13}(x), \lambda_{23}(x))$$

является сюрьекцией.

Положим

$$pt_0 = (0, 0, 0) (\in \mathbb{R}^3),$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

и (для любого натурального числа i)

$$D_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 3i)^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}.$$

Назовем зацепление

$$(f_1 : B(q_1) \to \mathbb{R}^3, \ \ldots \ , f_r : B(q_r) \to \mathbb{R}^3)$$

специальным, если для любого натурального числа $i \leqslant r$:

(1) f_i - (топологическое) вложение, сужение которого на каждую окружность букета является гладким,

(2) $f_i(x, y) = (x + 3i, y, 0)$ при $(x, y) \in D \cap B(q_i)$,

(3) $f_i(B(q_i) \setminus D) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_r)$,

(4) $pt_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus f_i(B(q_i))$.

Ясно, что *любое сингулярное зацепление букетов окружностей в* $\mathbb{R}^3$ *гомотопно специальному зацеплению.*

Пусть $(f_1, \dots, f_r)$ - специальное зацепление букетов $B(q_1)$, ..., $B(q_r)$ в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$X(f_1, \dots, f_r) = \mathbb{R}^3 \setminus (Imf_1 \cup \dots \cup Imf_r \cup IntD_1 \cup \dots \cup IntD_r).$$

Пусть, сверх того, i - натуральное число, не превосходящее числа r. Положим $pt_i = (3i, 0, 1) \quad (\in \mathbb{R}^3)$ и выберем в пространстве $X(f_1, \dots, f_r)$ какой-нибудь путь с началом в точке pt_0 и концом в точке pt_i; обозначим этот путь через u_i. Далее, положим

$$S_{i+} = \partial D_i \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 3i\}$$

и

$$S_i^+ = \partial D_i \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

и для каждого натурального числа $j \leqslant q_i$ выберем в пространстве $X(f_1, \dots, f_r)$ два пути. Первый путь – простая петля, такая что:
- ее начало расположено в пространстве $S_{i+} \cap S_i^+$;
- ее образ содержится в пространстве S_{i+} и является (метрической) окружностью;
- коэффициент зацепления этой петли с отображением f_{ik} равен нулю при $k \neq j$ и равен $+1$ при $k = j$.
Обозначим этот путь через v_{ij}. Второй путь – путь, соединяющий точку pt_i с началом пути v_{ij} и такой, что его образ содержится в пространстве $S_{i+} \cap S_i^+$. Этот путь мы обозначим через v'_{ij}. Мы полагаем $w_{ij} = u_i v'_{ij} v_{ij} v'^{-1}_{ij} u_i^{-1}$; ясно, что w_{ij} – петля с началом в точке pt_0.

Рассмотрим теперь группу $\pi_1(X(f_1, \dots, f_r), pt_0)$. Для $i \leqslant r$ и $j \leqslant q_i$ обозначим через α_{ij} гомотопические классы петель w_{ij} и обозначим через $J(f_1, \dots, f_r)$ подгруппу группы $\pi_1(X(f_1, \dots, f_r), pt_0)$, нормально порожденную коммутаторами $[\alpha'_{ik}, \alpha''_{il}]$, где α'_{ik} и α''_{il} - сопряжения элементов α_{ik} и α_{il} соответственно. Мы полагаем

$$\mathcal{G}(f_1, \dots, f_r) = \pi_1(X(f_1, \dots, f_r), pt_0)/J(f_1, \dots, f_r).$$

(Это – аналог группы Милнора классического зацепления.) Ниже нам понадобятся лишь группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$. (Заметим, что, как нетрудно видеть, группа $\mathcal{G}(f_1)$ канонически изоморфна группе $H_1(X(f_1))$.)

Лемма. *Для любого элемента γ группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$ существуют целые числа ϵ_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $1 \leqslant j \leqslant q_i$, и e_{kl}, где $1 \leqslant k \leqslant q_1$ и $1 \leqslant l \leqslant q_2$, такие что*

$$\gamma = \widehat{\alpha}_{11}^{\epsilon_{11}} \dots \widehat{\alpha}_{1\,q_1}^{\epsilon_{1\,q_1}} \widehat{\alpha}_{21}^{\epsilon_{21}} \dots \widehat{\alpha}_{2\,q_2}^{\epsilon_{2\,q_2}} [\widehat{\alpha}_{21}, \widehat{\alpha}_{11}]^{e_{11}} \cdot [\widehat{\alpha}_{21}, \widehat{\alpha}_{12}]^{e_{21}} \dots [\widehat{\alpha}_{21}, \widehat{\alpha}_{1\,q_1}]^{e_{q_1 1}} \dots$$

$$\cdot [\widehat{\alpha}_{2\,q_2}, \widehat{\alpha}_{11}]^{e_{1\,q_2}} \cdot [\widehat{\alpha}_{2\,q_2}, \widehat{\alpha}_{12}]^{e_{1\,q_2}} \dots [\widehat{\alpha}_{2\,q_2}, \widehat{\alpha}_{1\,q_1}]^{e_{q_1\,q_2}} \,,$$

где $\widehat{\alpha}_{ij}$ - классы смежности элементов α_{ij} ($\in \pi_1(X(f_1, f_2), pt_0)$).

Возьмем какой-нибудь элемент $\varkappa$ множества $H_{12} \times H_{13} \times H_{23}$; пусть $\varkappa = (\alpha, \beta, \gamma)$, где $\alpha \in H_{12}$, $\beta \in H_{13}$ и $\gamma \in H_{23}$. Пусть G - группа (относительно сложения) целочисленных кубических матриц строения $q_1 \times q_2 \times q_3$. Зададим для $l \leqslant q_3$ отображение

$$in_{12}(l) : H_{12} \to G$$

формулой $(a_{ij}) \mapsto (a_{ijk})$, где $a_{ijl} = a_{ij}$ и $a_{ijk} = 0$ при $k \neq l$, для $m \leqslant q_2$ отображение

$$in_{13}(m) : H_{13} \to G$$

формулой $(b_{ij}) \mapsto (b_{ijk})$, где $b_{imk} = b_{ik}$ и $b_{ijk} = 0$ при $j \neq m$, и для $n \leqslant q_1$ отображение

$$in_{23}(n) : H_{23} \to G$$

формулой $(c_{ij}) \mapsto (c_{ijk})$, где $c_{njk} = c_{jk}$ и $c_{ijk} = 0$ при $i \neq n$. Определим группу $G(\varkappa)$ как факторгруппу группы G по подгруппе, порожденной элементами

$$in_{12}(1)(\alpha), \ldots, in_{12}(q_3)(\alpha), in_{13}(1)(\beta), \ldots, in_{13}(q_2)(\beta),$$

$$in_{23}(1)(\gamma), \ldots, in_{23}(q_1)(\gamma).$$

Определим отображение

$$\mu(\varkappa) : \ \lambda^{-1}(\varkappa) \to G(\varkappa)$$

следующим образом. Пусть $x \in \lambda^{-1}(\varkappa)$. Выберем такого представителя (f_1, f_2, f_3) класса x, что (f_1, f_2) - специальное зацепление и что $f_3(0, 0) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Далее, для каждого натурального числа $k \leqslant q_3$ рассмотрим отображение

$$C(k) \to \mathbb{R}^3 \setminus (Imf_1 \cup Imf_2 \cup IntD_1 \cup IntD_2),$$

являющееся сокращением отображения f_3, и обозначим через γ_k элемент группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$, являющийся классом этого сокращения. Пусть $\widehat{\alpha}_{ij}$, где $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $1 \leqslant j \leqslant q_i$, - какие-нибудь элементы группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$, определенные как в лемме. Согласно лемме, существуют целые числа

$$\epsilon_{ijk}, \qquad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant 2 \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant q_i,$$

и

$$e_{stk}, \qquad \text{где } 1 \leqslant s \leqslant q_1 \text{ и } 1 \leqslant t \leqslant q_2,$$

такие что

$$\gamma_k = \widehat{\alpha}_{11}^{\epsilon_{11k}} \dots \widehat{\alpha}_{1q_1}^{\epsilon_{1q_1k}} \widehat{\alpha}_{21}^{\epsilon_{21k}} \dots \widehat{\alpha}_{2q_2}^{\epsilon_{2q_2k}} [\widehat{\alpha}_{21}, \widehat{\alpha}_{11}]^{e_{11k}} \dots [\widehat{\alpha}_{21}, \widehat{\alpha}_{1q_1}]^{e_{q_11k}} \dots$$

$$\dots [\widehat{\alpha}_{2q_2}, \widehat{\alpha}_{11}]^{e_{1q_2k}} \dots [\widehat{\alpha}_{2q_2}, \widehat{\alpha}_{1q_1}]^{e_{q_1q_2k}}$$

(для $k = 1, \dots, q_3$). Мы полагаем $\mu(\varkappa)(x)$ равным классу кубической матрицы

$$(e_{ijk})_{1 \leqslant i \leqslant q_1, 1 \leqslant j \leqslant q_2, 1 \leqslant k \leqslant q_3}$$

в группе $G(\varkappa)$.

Теорема A(2). *Для любого элемента $\varkappa$ множества $H_{12} \times H_{13} \times H_{23}$ отображение $\mu(\varkappa)$ определено корректно и является биекцией.*

Перечислим далее результаты диссертации, относящиеся к теории графов.

Пусть Γ - граф. Обозначим через $E(\Gamma)$ множество ребер графа Γ, через $m(\Gamma)$ - число ребер графа Γ; отображение $\mathcal{N} : E(\Gamma) \to \{1, 2, \dots, m(\Gamma)\}$ мы будем называть *n-структурой* графа Γ, если оно биективно. Если граф снабжен n-структурой, то мы будем также говорить, что его ребра *занумерованы.* Максимальное дерево графа мы будем называть его *t-структурой.*

Предположим, что граф Γ снабжен t-структурой T. Цикл графа Γ называется *элементарным относительно t-структуры T*, если он является редуцированным и одно и только одно его ребро не содержится в дереве T; это ребро мы будем называть *индикатором* цикла. Оказывается, *любое ребро графа Γ, не содержащееся в дереве T, является индикатором какого-то элементарного относительно t-структуры T цикла*, и *этот цикл единственный.* (Заметим, что если ребро содержится в дереве T, то оно, вообще говоря, может не являться ребром никакого элементарного цикла, а если является, то таких циклов может быть больше одного.)

Предположим, что граф Γ снабжен еще n-структурой $\mathcal{N}$. Пусть $i_1, i_2, \dots, i_{m(\Gamma)-m(T)}$ - номера ребер графа Γ, не содержащихся в дереве T, $i_{m(\Gamma)-m(T)+1}, \dots, i_{m(\Gamma)}$ - номера ребер дерева T. Пусть

$$\varphi : \{i_{m(\Gamma)-m(T)+1}, \dots, i_{m(\Gamma)}\} \to \{(i_u, i_v) |\ 1 \leqslant u < v \leqslant m(\Gamma) - m(T)\}$$

- отображение, обладающее следующим свойством: если $\varphi(i_w) = (i_u, i_v)$, то ребро графа Γ с номером i_w содержится как в элементарном цикле, индикатором которого является ребро с номером i_u, так и в элементарном цикле, индикатором которого является ребро с номером i_v. Назовем это отображение *монотонным*, если из равенства $\varphi(i_w) = (i_u, i_v)$ следует, что элементарные циклы, индикаторами которых являются ребра графа Γ с номерами i_u и i_v, пересекаются друг с другом только по ребрам (дерева T), номера которых не превосходят числа i_w. Отображение φ называется $(\Gamma, \mathcal{N}, T)$-*характеристическим*, если оно монотонно и инъективно.

Далее, пусть, как и выше, Γ – граф. Выберем какой-нибудь набор замкнутых непересекающихся ориентированных двумерных дисков, по одному диску для каждой вершины графа Γ. Приклеим к графу Γ этот набор дисков так, чтобы каждая вершина графа Γ совпала с центром соответствующего диска из этого набора, а для каждого ребра графа Γ и любой его граничной точки замкнутая связная окрестность этой точки (в этом ребре) совпала с некоторым радиусом соответствующего диска; полученное топологическое пространство обозначим через Δ. Пару (Δ, Γ) мы будем называть *вершинно оснащенным графом*, приклеенные диски - *оснащенными вершинами.*

Пусть (Δ, Γ) – вершинно оснащенный граф. Обозначим через $D_1, \ldots, D_k$ все его оснащенные вершины. Выберем $m(\Gamma)$ ориентированных ленточек, по одной ленточке для каждого ребра графа Γ, и для каждого натурального числа i ($i \leqslant m(\Gamma)$) приклеим ленточку $[0,1] \times [0,2]$ к дискам $D_1, \ldots, D_k$ по вложению

$$h_i : [0,1] \times \partial([0,2]) \to (\partial D_1 \cup \cdots \cup \partial D_k) \setminus (Imh_1 \cup \cdots \cup Imh_{i-1})$$

так, чтобы ее ось содержалась в соответствующем ребре и поверхность $D_1 \cup \cdots \cup D_k \cup Imh_1 \cup \cdots \cup Imh_i$ была ориентирована, ориентация совпадала с заданными ориентациями дисков $D_1, \ldots, D_k$ и ленточек. Ясно, что краем поверхности является набор окружностей. Заклеим эти окружности дисками. Получим замкнутую поверхность, содержащую граф Γ. Дополнение графа Γ в поверхности есть набор подмножеств, каждое из которых гомеоморфно открытому двумерному диску; эти подмножества мы будем называть *гранями вершинно оснащенного графа* (Δ, Γ).

Предположим, что граф Γ снабжен t-структурой T. У каждой грани вершинно оснащенного графа (Δ, Γ) найдем границу. Выберем среди этих границ те, которые содержат хотя бы одно ребро дерева T. Назовем вершинно оснащенный граф (Δ, Γ) *почти допустимым относительно дерева* T, если каждая из выбранных границ является замкнутой кривой не более чем с конечным числом точек самопересечения, и любые две различные такие границы либо не пересекаются, либо пересекаются только по вершинам, либо пересекаются только по одному ребру и вершинам графа Γ. Назовем почти допустимый вершинно оснащенный граф (Δ, Γ) *допустимым*, если граф Γ либо тривиален (то есть состоит из одной точки), либо граф Γ есть петля, либо степень каждой вершины графа Γ больше двух.

Теорема B. *Пусть* Γ *-* *граф, снабженный* t*-структурой* T*. Если вершины графа* Γ *можно оснастить так, чтобы вершинно оснащенный граф* (Δ, Γ) *являлся допустимым относительно дерева* T*, то для некоторой* n*-структуры* $\mathcal{N}'$ *графа* Γ *существует* $(\Gamma, \mathcal{N}', T)$ *- характеристическое отображение.*

Заметим, что в диссертации мы доказываем большее: мы предъявляем алгоритм, который по любой n-структуре графа Γ строит n-структуру $\mathcal{N}'$ графа Γ и $(\Gamma, \mathcal{N}', T)$-характеристическое отображение, n-структура $\mathcal{N}'$ и характеристическое отображение определяются n-структурой графа Γ однозначно.

Перечислим, наконец, результаты диссертации, относящиеся к изотопической классификации зацеплений вершинно оснащенных графов.

Пусть $D^3 = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}, \quad I = [0, 1]$ и n - натуральное число. *Струнным зацеплением с* n *нитями* называется гладкое вложение

$$l:\ (I \times \{1\}) \cup \cdots \cup (I \times \{n\})\ \to D^3$$

такое, что (для любого натурального числа $s \leqslant n$):
(1) $l(t, s) = ((1-t)\cos\frac{2\pi s}{2n+1}, (1-t)\sin\frac{2\pi s}{2n+1}, 0)$, при $t \in [0, \frac{1}{3}]$;
(2) $l(t, s) = (t\cos\frac{2\pi(2n+1-s)}{2n+1}, t\sin\frac{2\pi(2n+1-s)}{2n+1}, 0)$, при $t \in [\frac{2}{3}, 1]$.
Сужение вложения l на $I \times \{i\}$ называется *i-ой струной* струнного зацепления l. Два струнных зацепления l_0 и l_1 с n нитями называются *изотопными*, если существует гладкая изотопия $f_t : D^3 \to D^3$ (где $0 \leqslant t \leqslant 1$), такая что $f_t(x) = x$ для любого $x \in \partial N$, $f_0 = id$ и $f_1 \circ l_0 = l_1$. Обозначим через $Str(n)$ множество изотопических классов струнных зацеплений с n струнами.

Для любого целого неотрицательного числа $t \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ и любой последовательности натуральных чисел $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_t, q_t$ с $p_k < q_k \leqslant n$ и $(p_k, q_k) \neq (p_s, q_s)$ для $k \neq s$ через $Str(n, t; (p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_t, q_t))$ мы будем обозначать подмножество множества $Str(n)$, состоящее из классов струнных зацеплений, для которых коэффициенты зацепления p_k-ой и q_k-ой струн равны нулю ($k = 1, 2, \ldots, t$).

Пусть r - натуральное число и (Δ_1, Γ_1), $\ldots$, (Δ_r, Γ_r) - вершинно оснащенные графы. Через $\mathcal{L}((\Delta_1, \Gamma_1), \ldots, (\Delta_r, \Gamma_r))$ мы будем обозначать множество *изотопических* классов зацеплений вершинно оснащенных графов (Δ_1, Γ_1), $\ldots$, (Δ_r, Γ_r) в $\mathbb{R}^3$.

Пусть, как и выше, r - натуральное число и (Δ_1, Γ_1), $\ldots$, (Δ_r, Γ_r) - вершинно оснащенные графы. Предположим, что для каждого натурального числа $i \leqslant r$, граф Γ_i снабжен n-структурой $\mathcal{N}_i$ и t-структурой

T_i, вершинно оснащенный граф (Δ_i, Γ_i) снабжен точкой x_{0i}. Положим $t_i = m(T_i)$ и $n_i = m(\Gamma_i) - m(T_i)$. Пусть: $j_1, \dots, j_{n_i}$ - номера ребер графа Γ_i, не содержащихся в дереве T_i; $j_{n_i+1}, \dots, j_{n_i+t_i}$ - номера ребер дерева T_i. Предположим, сверх того, что для каждого натурального числа $i \leqslant r$ существует $(\Gamma_i, \mathcal{N}_i, T_i)$-характеристическое отображение, выберем такое отображение и обозначим его через φ_i. Выберем какое-нибудь биективное отображение $\omega_i : \{1, 2, \dots, n_i + t_i\} \to \{1, 2, \dots, n_i + t_i\}$, обладающее следующими свойствами: если $k \leqslant n_i$, то $\omega_i(j_k) \leqslant n_i$; если $k \leqslant n_i$, $l \leqslant n_i$ и $j_k < j_l$, то $\omega_i(j_k) < \omega_i(j_l)$. Наконец, рассмотрим все пары чисел (p, q), такие что $(\omega_i^{-1}(p), \omega_i^{-1}(q)) \in Im\, \varphi_i$, и обозначим их через $(p_{i1}, q_{i1}), \dots, (p_{it_i}, q_{it_i})$. (Ясно, что таких пар t_i штук.)

Теорема C. *Существуют стандартные сюръективное при $r > 1$ и биективное при $r = 1$ отображения*

$$Str(n_1 + \dots + n_r, t_1 + \dots + t_r; (p_{11}, q_{11}), \dots, (p_{1t_1}, q_{1t_1}),$$

$$(p_{21} + n_1, q_{21} + n_1), \dots, (p_{2t_2} + n_1, q_{2t_2} + n_1), \dots,$$

$$(p_{r1} + n_1 + \dots + n_{r-1}, q_{r1} + n_1 + \dots + n_{r-1}), \dots,$$

$$(p_{rt_r} + n_1 + \dots + n_{r-1}, q_{rt_r} + n_1 + \dots + n_{r-1})) \longrightarrow$$

$$\mathcal{L}((\Delta_1, \Gamma_1), \dots, (\Delta_r, \Gamma_r)).$$

Работы автора по теме диссертации

1. Петрова Ю. В., Зацепления графов в трехмерной сфере. Седьмая Санкт-Петербургская Ассамблея молодых ученых и специалистов. Аннотации работ по грантам Санкт-Петербургского конкурса 2002 г. для студентов, аспирантов и молодых специалистов, 2002, с. 19.

2. Нежинский В. М., Петрова Ю. В., Сингулярные зацепления двух окружностей и букета окружностей в трехмерной сфере. Записки научных семинаров ПОМИ, том 299, 2003, с. 295-299.

3. Petrova Yu. V., Singular links of three wedges of circles. Тезисы докладов 5-й международной конференции по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова (1919-2002), Черкассы, 2003, с. 120-121.

4. Nezhinskij V. M., Petrova Yu. V., The classification of singular links of three wedges of circles up to link-homotopy. First Karazin scientific readings. Mathematical Symposium: Book of abstracts. - Kharkiv, 2004, p. 26 - 27.

5. Петрова Ю. В., Трехкомпонентные зацепления графов. В кн.: Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Ростов-на-Дону, 2004, с. 52.

6. Петрова Ю. В., Стандартные трехкомпонентные зацепления букетов окружностей в $\mathbb{R}^3$.- В кн.: Геометрия "в целом". Преподавание геометрии в вузе и школе: Материалы Всероссийской научно - методической конференции, В. Новгород, 2004, с. 52 - 56.

7. Петрова Ю. В., Заузливание плоских графов $\mathbb{R}^3$. Тезисы докладов 6-ой Международной конференции по геометрии и топологии, Черкассы, 2005, с. 35.

8. Nezhinskij V. M., Petrova Yu. V., Link of fatgraphs in $\mathbb{S}^3$. В кн.: Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Ростов-на-Дону, 2006, с. 100-101.

9. Nezhinskij V. M., Petrova Yu. V., Links of graphs with framed vertices. Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: Тезисы докладов. - М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008, стр. 450.

10. Нежинский В. М., Маслова Ю. В., Гомотопическая классификация трехкомпонентных сингулярных зацеплений графов. Успехи Математических Наук, том 63, вып. 5, 2008, с. 195-196.