Санкт-Петербургский государственный университет

*На правах рукописи*

Малютин Андрей Валерьевич

# КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

01.01.04 — геометрия и топология
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН

| | |
|---|---|
| Научный консультант: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Нецветаев Никита Юрьевич |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Куликов Виктор Степанович<br>(Математический институт<br>им. В. А. Стеклова РАН) |
| | член-корреспондент РАН,<br>доктор физико-математических наук,<br>Панин Иван Александрович<br>(лаборатория алгебры и теории чисел<br>Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН) |
| | доктор физико-математических наук,<br>профессор Пилюгин Сергей Юрьевич<br>(Санкт-Петербургский государственный<br>университет) |
| Ведущая организация: | Московский государственный<br>университет им. М. В. Ломоносова |

Защита состоится «___» _____________ 2009 г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 191011, Университетская наб., 7/9.

Защита будет проходить в Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова РАН по адресу: Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, ауд. 311.

Автореферат разослан «___» _____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Нежинский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Исследования автоморфизмов и групп (классов) автоморфизмов многообразий малой размерности формируют обширную, бурно развивающуюся область современной математики, находящуюся на стыке топологии, алгебры и теории динамических систем. Эта область охватывает изучение групп гомеоморфизмов прямой и окружности[1], теорию автоморфизмов поверхностей и теорию групп классов отображений поверхностей, важнейшим частным случаем которых являются группы кос Артина[2], — в силу чего указанная область тесно связана практически со всеми разделами маломерной топологии (в первую очередь — с теорией узлов и зацеплений), с дифференциальной и гиперболической геометрией, теорией ламинаций и теорией Тайхмюллера, с комбинаторной и геометрической теорией групп, теорией упорядоченных групп, и даже с криптографией.

Автоморфизмам и группам автоморфизмов многообразий размерностей 1 и 2 посвящены фундаментальные работы Клейна, Фрике, Пуанкаре, Гурвица, Дена, Данжуа, Александера, Нильсена, Артина, Керекъярто, А. А. Маркова (мл.). Позже указанной проблематикой занимались В. Магнус, В. Бурау, Дж. Бирман, Х. Цишанг, В. И. Арнольд, Г. А. Маргулис, У. Тёрстон, О. Я. Виро, Ф. Гарсайд, В. Джонс, Э. Гиз и многие другие. В последние десятилетия в этой области получены такие замечательные результаты, как решение С. Керкхофом проблемы Нильсена о реализации, открытие порядка Деорнуа, доказательство линейности групп кос (Д. Краммер, С. Бигелоу) и др. Решение подобного рода проблем требует самой разнообразной техники, а новые достижения теории (групп) автоморфизмов применимы (и, как правило, имеют существенные следствия) в смежных областях.

Вопросы классификации в исследуемой области (как и во многих других разделах маломерной топологии, динамики, теории групп) являются ключевыми.

Для гомеоморфизмов одномерных и двумерных многообразий известны, соответственно, классификации Пуанкаре и Нильсена–Тёрстона, представляющие собой важные и полезные инструменты при решении самых различных задач. На основе классификации Нильсена–Тёрстона

[1] Отметим, что в группу гомеоморфизмов прямой входят все счетные односторонне-инвариантно упорядоченные группы, а группа гомеоморфизмов окружности содержит группу изометрий гиперболической плоскости — вместе со всеми фуксовыми группами.

[2] У групп кос, как и у всех групп классов отображений незамкнутых поверхностей, имеются естественные точные представления в группах гомеоморфизмов одномерных многообразий, что придает рассматриваемой области внутреннюю целостность.

Н. В. Иванов, Дж. Бирман, А. Любоцкий и Дж. Маккарти[3] получили серию классификационных теорем для подгрупп групп классов отображений поверхностей, дающую аналоги классических классификационных результатов теории линейных групп, в том числе аналог альтернативы Титса. Для групп, действующих на окружности, аналог альтернативы Титса, известный как альтернатива Гиза, был доказан в 2000 г. Г. А. Маргулисом[4]. Несомненно важным и актуальным представляется следующий шаг — построение эффективной классификации *групп гомеоморфизмов* маломерных многообразий (т. е. классификации маломерных топологических динамических систем или действий групп на многообразиях малой размерности).

К классификационным вопросам естественно примыкают теории всевозможных инвариантов. Одним из новейших направлений здесь является теория квази- и псевдохарактеров групп. Функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ на группе $G$ называется *квазихарактером* или *квазиморфизмом*, если множество

$$\{\varphi(ab) - \varphi(a) - \varphi(b) \ : \ a, b \in G\}$$

ограничено. Если, кроме того, для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $a \in G$ выполняется равенство $\varphi(a^k) = k\varphi(a)$, то $\varphi$ есть *псевдохарактер*[5].

Псевдохарактеры являются инвариантами сопряженности; они имеют непосредственное отношение к ограниченным когомологиям групп и широко применяются в геометрической теории групп. Хорошо известные примеры псевдо- и квазихарактеров, не являющихся гомоморфизмами, — число переноса Пуанкаре и функция Радемахера[6]. Теория псевдохарактеров активно развивается в течение последнего десятилетия. Псевдохарактеры групп кос и групп классов отображений поверхностей представляют особый интерес и применяются как в теории узлов, так и в маломерной динамике (Э. Гиз, Ж.-М. Гамбодо, К. Хонда, У. Казес, Г. Матис, С. Баадер и др.; см. также работы автора [1, 5, 9–12]). Как показывают представленные в диссертации результаты, теория псевдохарактеров тесно связана и с обсуждаемой ниже проблемой Маркова (как и с некоторыми родственными

[3] См. монографию Н. В. Иванова *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Transl. of Math. Monographs **115**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, и указанную там литературу.

[4] Альтернатива Гиза–Маргулиса утверждает следующее: если группа $G$ действует на окружности гомеоморфизмами, то либо на окружности существует $G$-инвариантная вероятностная борелевская мера, либо в $G$ найдется свободная неабелева подгруппа; см. G. A. Margulis, *Free subgroups of the homeomorphism group of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser I. Math. **331** (2000), 669–674; ср. Л. А. Бекларян, *Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты*, Успехи мат. наук **59**:4 (2004), 3–68.

[5] Также используется термин *однородный квазиморфизм*.

[6] Отметим, что число переноса определено на группе гомеоморфизмов вещественной прямой, коммутирующих с единичным сдвигом, а функция Радемахера — на группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, которая действует на окружности.

ей задачами), и с действиями групп кос и групп классов отображений поверхностей на окружностях и прямых, изучение которых является одним из центральных сюжетов работы.

Начиная с работ П. С. Новикова и А. А. Маркова, все возрастающее внимание в топологии малых размерностей привлекают также вопросы алгоритмической классификации. В теории автоморфизмов, групп классов отображений поверхностей и групп кос наряду с общими задачами алгоритмического характера (проблемы тождества и сопряженности в группе, их многочисленные обобщения и т. д.) рассматривается широкий круг специальных алгоритмических вопросов (таких как задачи распознавания типов автоморфизмов в классификации Нильсена–Тёрстона и распознавания сильной неприводимости автоморфизма, вычисление расстояний в комплексе кривых поверхности).

Среди имеющихся здесь сложных задач[7] особое место занимает *проблема Маркова о дестабилизируемости*, состоящая в том, чтобы построить алгоритм, определяющий, применимо ли к классу сопряженности заданной косы преобразование дестабилизации. Эта проблема относится к представлению классических узлов и зацеплений в $\mathbb{R}^3$ с помощью кос и восходит к знаменитой работе А. А. Маркова «Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe» 1936 года, в которой введены понятия стабилизации и дестабилизации кос и представлена теорема, утверждающая, что две косы $\beta_1$ и $\beta_2$ задают одно и то же зацепление в том и только в том случае, когда от $\beta_1$ можно перейти к $\beta_2$ с помощью конечной цепочки сопряжений, стабилизаций и дестабилизаций. Проблема о дестабилизируемости допускает переформулировки в терминах автоморфизмов поверхностей и действий групп классов отображений поверхностей на окружностях и прямых и имеет ряд родственных нерешенных задач как на алгебраическом, так и на топологическом уровне.

После того, как в 1968–1969 гг. Г. С. Маканин и Ф. Гарсайд решили для группы кос проблему сопряженности, проблема Маркова стала наиболее заметным препятствием к решению задачи алгоритмической классификации и эффективного распознавания узлов и зацеплений в $\mathbb{R}^3$ с помощью кос. Впервые алгоритм распознавания дестабилизируемости был предложен в 1980 г. Дж. Маккулом[8], однако, как указал впоследствии сам Маккул[9], его алгоритм опирался на ошибочное утверждение и оказался неве-

[7] См., например, R. Kirby (Ed.), *Problems in low-dimensional topology*, Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 2.2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 35–473, а также B. Farb (Ed.), *Problems on mapping class groups and related topics*, Proc. Symp. Pure Math. **74**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[8] J. McCool, *On reducible braids*, in S. Adian, W. Boone, G. Higman (Eds.), «Word Problems II» (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976), Amsterdam: North-Holland, Studies in Logic and Foundations of Math., vol. 95, 1980, pp. 261–295.

[9] J. McCool, *On reducible braids: Erratum*, Canad. J. Math. **34** (1982), 1398.

рен. В 2005 г. У. Менаско[10] предложил алгоритм поиска дестабилизации, основанный на технике прямоугольных диаграмм узлов, принадлежащей И. А. Дынникову. Однако результат настоящей диссертации о существовании классов сопряженности кос, дестабилизируемых бесконечным числом различных способов, косвенно свидетельствует о том, что алгоритм Менаско также неверен[11].

Еще одно современное направление в изучаемой области возникло на пересечении с теорией случайных блужданий на группах. В своих недавних работах случайные блуждания на группах (классов) автоморфизмов многообразий малой размерности исследовали А. М. Вершик, К. Сериес, В. А. Кайманович, Г. Мазур, Б. Фарб, С. К. Нечаев, Р. Вуатюрье, А. Ю. Гросберг, Р. Бикбов, В. А. Клепцын, М. Б. Нальский, Т. Кайзер и др. Эта деятельность по преимуществу ориентирована на решение (типично классификационной) задачи описания вероятностных границ группы и, в первую очередь, границы Пуассона. В. А. Кайманович и Г. Мазур[12] показали, что граница Пуассона группы классов отображений замкнутой поверхности реализуется в виде границы Тёрстона пространства Тайхмюллера этой поверхности. Аналогичное описание границы в виде пространства действия группы имеет место и для случая незамкнутых поверхностей и групп кос[13].

А. М. Вершиком и его школой были развиты мощные методы алгебраического описания (т. е. описания непосредственно в терминах самой группы — в терминах образующих и соотношений) границ с помощью стабильных нормальных форм. При этом для группы кос известно более десятка (типов) нормальных форм (формы Гарсайда[14], Маркова–Ивановского[15], Тёрстона[16], Бирман-Ко-Ли[17], Брессо[18] и др.[19]), однако проблема *алгебраиче-*

---

[10] W. W. Menasco, *Monotonic simplification and recognizing exchange reducibility*, eprint arXiv:math/0507124.

[11] Локализовать ошибку в препринте Менаско не представляется возможным, поскольку там содержится большое количество неточностей и неполных формулировок.

[12] V. A. Kaimanovich, H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Invent. Math. **125** (1996), 221–264.

[13] B. Farb, H. Masur, *Superrigidity and mapping class groups*, Topology **36** (1998), 1169–1176.

[14] F. A. Garside, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford **20** (1969), 235–254.

[15] А. А. Марков, *Основы алгебраической теории кос*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **16** (1945), 3–54.

[16] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publ., Boston, MA, 1992.

[17] J. S. Birman, S. J. Lee, K. H. Ko, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. in Math. **139** (1998), 322–353.

[18] X. Bressaud, *A normal form for braid groups*, J. Knot Theory Ram. **17** (2008), 697–732.

[19] P. Dehornoy, *Alternating normal forms for braids and locally Garside monoids*, J. Pure Appl. Algebra, **212** (2008), 2413–2439.

*ского* описания границы Пуассона для групп классов отображений и групп кос до последнего времени оставалась открытой.

Заметим, что — кроме классификационной тематики — задачу о стабильных нормальных формах в группах классов отображений и группах кос связывают с прочими вышеупомянутыми вопросами общие методы, применяемые при их исследовании и решении; в частности, при поиске стабильных нормальных форм удобно использовать представления групп классов отображений и групп кос в виде групп гомеоморфизмов окружности.

**Цель работы.** В диссертации развивается теория автоморфизмов и групп (классов) автоморфизмов многообразий размерности 1 и 2 (групп кос, групп классов отображений поверхностей, групп гомеоморфизмов прямой и окружности). Целью работы является получение новых результатов по следующим направлениям:

- классификация действий групп на одномерных многообразиях;
- развитие теории псевдохарактеров групп кос и групп классов отображений поверхностей;
- исследование преобразований кос (сохраняющих тип представленного косой зацепления) и вопросов о применимости различных преобразований к косам;
- изучение границ случайных блужданий, поиск стабильных нормальных форм в группах кос и группах классов отображений.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы маломерной топологии, римановой геометрии, гиперболической геометрии, теории ламинаций, комбинаторной и геометрической теории групп, теории групп классов отображений поверхностей (в т. ч. классификация Нильсена–Тёрстона), теории групп кос, а также специально развиваемая техника, в основе которой лежит рассмотрение действий группы классов отображений поверхности с краем на ассоциированных с такой поверхностью пространствах.

**Научная новизна.** В работе получены следующие новые результаты.

1. Получена общая классификация действий групп на прямой и окружности. В частности, доказано, что всякое минимальное непрерывное действие группы на прямой (на окружности) либо сопряжено с действием изометриями, либо проксимально, либо накрывает некоторое проксимальное действие на окружности.

2. Введены новые типы левоинвариантных циклических порядков на свободных группах и изучены их свойства.

3. Описана структура пространства простых геодезических, выходящих из точки края метрически полной ориентированной гиперболической поверхности конечной площади с компактным геодезическим краем.

4. Определены и исследованы новые серии псевдохарактеров и инвариантов сопряженности на группах кос и на группах классов отображений поверхностей с краем.

5. Доказано, что любой узел в $\mathbb{R}^3$ представим косой, класс сопряженности которой дестабилизируем бесконечным числом различных способов.

6. В терминах псевдохарактеров групп кос найдены критерии простоты представленного косой зацепления, а также критерии неприменимости стандартных преобразований к классу сопряженности кос, из которых, в частности, следуют (в усиленном виде) гипотезы Менаско о применимости некоторых преобразований к косам.

7. Решена проблема Маркова о дестабилизируемости: построен алгоритм, определяющий, допускает ли класс сопряженности заданной косы дестабилизацию Маркова.

8. Доказано, что в группе кос Артина нормальная форма Маркова–Ивановского является стабильной (по отношению к случайному блужданию с любым допустимым распределением).

**Апробация работы.** Результаты диссертации многократно докладывались и обсуждались на семинарах и конференциях, в том числе — на международных конференциях «The Algebra and Geometry around Knots and Braids» (Санкт-Петербург, сентябрь 2007 г.), «Leonard Euler and modern combinatorics. Applications to logic, representation theory, mathematical physics» (Санкт-Петербург, июнь 2007 г.), на серии семинаров университета Warwick (Великобритания), на международной российско-французской конференции «Autour des tresses» (Москва, ноябрь 2002 г.), на Петербургском топологическом семинаре им. В. А. Рохлина, на Петербургском геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова, на Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева, на Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, на Московско-Петербургском семинаре по маломерной математике, на семинаре кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ «Некоммутативная геометрия и топология», а также были представлены на заседаниях Петербургского математического общества.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в различных областях топологии и динамики малых размерностей, теории узлов, гиперболической геометрии, геометрической теории групп, теории упорядоченных групп, теории псевдохарактеров, теории кос, при изучении групп классов отображений поверхностей и групп автоморфизмов одномерных многообразий, а также при изучении случайных блужданий на группах и их границ.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–12], список которых приведен в конце автореферата. Из них 7 публикаций [3, 5–10] — в журналах и изданиях, входящих в Перечень ВАК, и 3 [1, 2, 4] — в издании, входившем в предыдущий Перечень ВАК на момент публикации. В статье [3] соискателю принадлежат теорема 5.1 о применимости преобразований к косам, теорема 6.2 и следствие 6.3 о критериях простоты представленного косой зацепления; теорема 7.3 о минимальных косах принадлежит соавтору. В статье [8] соискателю принадлежат теорема 0.2 о поточечной сходимости и теорема 0.3 о стабильности нормальной формы; теорема 0.1 о границе Фюрстенберга принадлежит соавтору.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 8 глав и списка литературы, содержащего 105 наименований. Общий объем диссертации составляет 455 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко излагается содержание диссертации и описывается ее структура.

### Глава 1. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности

В главе 1 изучаются и классифицируются действия групп на одномерных многообразиях. Пусть $G$ — произвольная группа. *Действием* группы $G$ на топологическом пространстве $X$ называется гомоморфизм из $G$ в группу $\mathrm{Homeo}(X)$ всех гомеоморфизмов пространства $X$. Если задано действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$, образ $\phi_g(x)$, где $x \in X$, $g \in G$, $\phi_g := \phi(g)$, обозначается через $g(x)$. Действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ называется *минимальным*, если у каждой точки $x \in X$ *орбита* $G(x) := \{g(x) \mid g \in G\}$ плотна в $X$.

Действие группы $G$ на хаусдорфовом топологическом пространстве $X$ называется *проксимальным*, если для любой пары точек $x, y \in X$ найдется последовательность $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в $G$ такая, что последовательности $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{g_k(y)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходятся к одной и той же точке в $X$. (Если ни для какой пары несовпадающих точек из $X$ такой последовательности в $G$ не найдется, действие называется *дистальным*.)

Пусть имеются действия $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ и $\psi : G \to \mathrm{Homeo}(Y)$ группы $G$ на пространствах $X$ и $Y$. Отображение $f : X \to Y$ называют *эквивариантным* (по отношению к $\phi$ и $\psi$), если $g(f(x)) = f(g(x))$ для любых $x \in X$, $g \in G$. Действия $\phi$ и $\psi$ называют *сопряженными*, если существует эквивариантный по отношению к ним гомеоморфизм $f : X \to Y$. Говорят, что $\phi$ *полусопряжено* с $\psi$, если существует непрерывное сюръективное отображение $f : X \to Y$, эквивариантное по отношению к $\phi$ и $\psi$ ($f$ называется при этом *полусопрягающим отображением*).

Основным результатом главы 1 является следующая теорема.

**Теорема** (1.1.1). *Пусть $X$ есть либо вещественная прямая, либо окружность. Пусть группа $G$ действует на $X$ гомеоморфизмами*[20]*, т. е. задан гомоморфизм $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$. Пусть действие $\phi$ минимально. Тогда выполняется одно и только одно из следующих условий*:

(i) *действие $\phi$ сопряжено с действием изометриями*;

(ii) *действие $\phi$ проксимально*;

(iii) *действие $\phi$ полусопряжено посредством неоднолистного накрытия $X \to \mathbb{S}^1$ с минимальным и проксимальным действием на окружности.*

Для действий на окружности теорема 1.1.1 допускает слияние случаев (ii) и (iii) и принимает следующий вид:

**Теорема** (1.1.2). *Каждое минимальное действие группы на окружности гомеоморфизмами либо сопряжено с изометричным действием, либо полусопряжено посредством накрытия с проксимальным действием.*

Из теоремы 1.1.1 выводится следующая классификация:

**Следствие** (1.1.3). *Пусть группа $G$ действует на окружности гомеоморфизмами, т. е. задан гомоморфизм $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1)$. Тогда выполняется одно и только одно из следующих условий*:

(a) *у действия $\phi$ найдется конечная орбита*;

(b) *действие $\phi$ полусопряжено с минимальным и изометричным действием на окружности посредством монотонного непрерывного полусопрягающего отображения степени* 1;

[20] Не обязательно сохраняющими ориентацию.

(c) *действие $\phi$ полусопряжено с минимальным и проксимальным действием на окружности посредством монотонного непрерывного полусопрягающего отображения.*

Схожая классификация (но включающая большее количество классов) следует из теоремы 1.1.1 и для действий групп на прямой[21].

Полученная классификация в определенном смысле обобщает классификацию Пуанкаре (если рассматривать последнюю как классификацию действий на окружности бесконечной циклической группы) и дает ряд существенных следствий об одномерных динамических системах и о структуре групп, действующих на одномерных многообразиях. К примеру, из новой классификации следует, что любая одномерная динамическая система может быть получена из одноточечной системы в результате не более чем трех элементарных (изометричных и проксимальных) расширений[22].

Отметим, что для минимального действия на окружности условие проксимальности является очень сильным:

**Предложение** (1.7.1). *Пусть действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ группы $G$ на окружности минимально и проксимально. Тогда для любых собственного замкнутого подмножества $V \subset \mathbb{S}^1$ и непустого открытого подмножества $U \subset \mathbb{S}^1$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(V) \subset U$.*

Из предложения 1.7.1 нетрудно вывести, что группа, действующая на окружности минимально и проксимально, обладает свободной неабелевой подгруппой. Отсюда, в силу следствия 1.1.3, очевидно вытекает упоминавшаяся выше альтернатива Гиза–Маргулиса.

Из полученной классификации следуют и другие замечательные альтернативы. Так, если действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ удовлетворяет условию (a) или условию (b) следствия 1.1.3, то на $\mathbb{S}^1$ найдется $G$-инвариантная вероятностная борелевская мера; всякое же проксимальное действие группы на окружности *сильно проксимально* в смысле Фюрстенберга; таким образом, мы получаем следующую альтернативу (составляющие ее случаи не являются взаимоисключающими):

*Всякое действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ либо обладает инвариантной вероятностной борелевской мерой, либо полусопряжено с сильно проксимальным действием на окружности.*

[21] Поскольку, как хорошо известно, произвольное действие группы на прямой либо полусопряжено с минимальным действием на прямой (посредством монотонного непрерывного полусопрягающего отображения), либо имеет орбиту, не обладающую точками сгущения (либо конечную — состоящую не более чем из двух точек, либо бесконечную — переводящуюся гомеоморфизмом в множество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$).

[22] Здесь имеются в виду стандартные расширения динамических систем по Фюрстенбергу–Эллису.

Приведем еще одно связанное с теоремой 1.1.1 наблюдение. Пусть $X$ есть либо прямая, либо окружность, и пусть действие $\phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ минимально (как в условии теоремы 1.1.1). Пусть $\mathcal{Z}$ — централизатор подгруппы $\phi(G) \cap \mathrm{Homeo}_+(X)$ в группе $\mathrm{Homeo}(X)$. Условия (i), (ii) и (iii) теоремы 1.1.1 выражаются в терминах централизатора $\mathcal{Z}$ следующим образом:

- для $\phi$ выполняется условие (i) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Z}$ изоморфен абелевой группе $X$;
- для $\phi$ выполняется условие (ii) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Z}$ тривиален;
- для $\phi$ выполняется условие (iii) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Z}$ есть циклическая группа (бесконечная при $X = \mathbb{R}$ и конечная при $X = \mathbb{S}^1$).

Глава 1 имеет следующую структуру:

В §1.1 формулируются основные результаты главы и обсуждаются их следствия.

В §1.2 даны основные определения.

В §1.3 доказано, что дистальные действия групп на окружности и прямой сопряжены с изометричными действиями.

§1.4 содержит несколько лемм, которые используются в доказательстве предложения из §1.5.

В §1.5 доказывается предложение о свойствах минимального действия группы на прямой, не являющегося ни проксимальным, ни дистальным.

В §1.6 показано, что минимальное и не дистальное действие группы на окружности полусопряжено посредством накрытия с минимальным и проксимальным действием.

В §1.7 доказывается предложение о свойствах минимальных и проксимальных действий групп на окружности.

В §1.8 из доказанного в предыдущих параграфах выводятся теорема 1.1.1 и следствие 1.1.3.

В §1.9 даны определения инвариантов Пуанкаре — числа переноса и числа вращения — и приведены их свойства.

В §1.10 доказываются утверждения о гомеоморфизмах окружности, используемые в главе 7 работы.

### Глава 2. Поверхности и их автоморфизмы

Главы 2–4 работы посвящены поверхностям, их автоморфизмам и группам классов отображений. Главной целью в главах 2–4 является изучение действий группы классов отображений поверхности с непустым краем на некоторых ассоциированных с такой поверхностью пространствах. В первую очередь нас интересуют действия на пространствах, гомеоморфных окружностям и прямым. Исследование этих действий приводит нас к новым псевдохарактерам групп классов отображений и групп кос, а также к решению проблемы Маркова о дестабилизируемости (глава 7). Содержание глав 2–4 во многом ориентировано на изложение материала, требующегося в главе 7. Связанные с поверхностью пространства и структуры изучаются в главе 3, а действия группы классов отображений на этих пространствах — в главе 4. В главе 2 приводится ряд предварительных сведений из теории поверхностей, гиперболической геометрии, комбинаторной теории групп, теории гиперболических пространств и т. п.

*Поверхностями* мы называем двумерные многообразия (не обязательно компактные и, возможно, имеющие непустой край). Класс всех связных ориентируемых поверхностей, которые либо компактны, либо получены из компактных исключением конечного числа внутренних точек, обозначается через $\mathfrak{M}$. Из классификации поверхностей известно, что каждая поверхность класса $\mathfrak{M}$ представима в виде связной суммы сферы с не более чем конечным количеством торов, а также замкнутых и открытых дисков. Говорят, что поверхность $M_{g,d,p}$, являющаяся связной суммой сферы с $g$ торами, $d$ замкнутыми и $p$ открытыми дисками, есть поверхность *рода* $g$ с $p$ *проколами* (или *выколотыми точками*) и $d$ компонентами края. Эйлерова характеристика $\chi(M_{g,d,p})$ поверхности $M_{g,d,p}$ равна $2-(2g+d+p)$. Поверхности класса $\mathfrak{M}$, имеющие отрицательную эйлерову характеристику, мы называем *гиперболичными*. Класс гиперболичных поверхностей из $\mathfrak{M}$, имеющих непустой край, обозначается через $\mathfrak{M}_b$.

Поверхности, снабженные римановыми метриками постоянной гауссовой кривизны $-1$, как и сами такие метрики, принято называть *гиперболическими*. Те гиперболические метрики, которые превращают поверхность в метрически полное пространство конечного объема с геодезическим краем (как и сами гиперболические поверхности с такими метриками), мы называем *допустимыми*. Как хорошо известно[23], поверхность класса $\mathfrak{M}$ обладает допустимыми гиперболическими метриками тогда и только тогда, когда она гиперболична. Класс допустимых гиперболических поверхностей, гомеоморфных поверхностям из $\mathfrak{M}$ (соотв., $\mathfrak{M}_b$), обозначается в работе через $\mathfrak{M}^h$ (соотв., $\mathfrak{M}_b^h$).

Для поверхности $M$ с краем в диссертации рассматривается *группа классов отображений, тождественных на крае*:

$$\mathrm{MCG}(M,\partial M) := \mathrm{Homeo}(M,\partial M)/\,\mathrm{Homeo}_0(M,\partial M),$$

где $\mathrm{Homeo}(M,\partial M)$ есть группа всех тех гомеоморфизмов поверхности $M$, которые поточечно тождественны на $\partial M$, а $\mathrm{Homeo}_0(M,\partial M)$ — группа гомеоморфизмов, $\mathrm{rel}\,\partial M$ изотопных тождественному.

[23] См., например, Х. Цишанг, Э. Фогт, Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Наука, М., 1988.

Глава 2 имеет следующую структуру:

§2.1 состоит из нескольких разделов, в которых излагаются сведения из неевклидовой геометрии, из теории гиперболических пространств по Громову, из комбинаторной и геометрической теории групп.

В §2.2 изучаются универсальные накрывающие пространства гиперболических поверхностей и их компактификации.

В §2.3 доказывается ряд лемм о кривых и геодезических на гиперболических поверхностях.

В §2.4 излагаются основы теории геодезических ламинаций на гиперболических поверхностях.

В §2.5 определяется действие автоморфизмов гиперболической поверхности на множестве геодезических и пространстве геодезических ламинаций на этой поверхности и доказывается ряд утверждений, касающихся этого действия.

§2.6 посвящен классификации Нильсена–Тёрстона.

### Глава 3. Структуры на поверхностях с краем

В главе 3 рассматривается ряд конструкций для гиперболических поверхностей класса $\mathfrak{M}_b^h$. Взяв поверхность $M \in \mathfrak{M}_b^h$ и отметив точку $x_*$ на ее крае, мы изучаем следующую тройку объектов и связи между ними:

– фундаментальную группу $\mathrm{F}_{M_*} := \pi_1(M, x_*)$ и ее гиперболическую компактификацию $\overline{\mathrm{F}}_{M_*} := \mathrm{F}_{M_*} \cup \partial_\infty \mathrm{F}_{M_*}$, где $\partial_\infty \mathrm{F}_{M_*}$ — гиперболическая граница по Громову;

– семейство $\Gamma_{M_*}$ всех (конечных и бесконечных) выходящих из $x_*$ ориентированных геодезических на $M$ (пространство $\Gamma_{M_*}$ естественным образом наделено топологией вещественной прямой);

– *идеальную окружность* $\mathrm{S}_{M_*}$ над $M$, которая определяется следующим образом: заметим, что универсальное накрывающее $\mathrm{U}_M$ поверхности $M$ является гиперболическим по Громову пространством, его граница на бесконечности $\partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфна канторову множеству, гиперболическая компактификация $\overline{\mathrm{U}}_M := \mathrm{U}_M \cup \partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфна замкнутому двумерному диску, а край $\mathrm{S}_M := \partial \overline{\mathrm{U}}_M = \partial \mathrm{U}_M \cup \partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфен окружности; отметив на окружности $\mathrm{S}_M$ некоторую точку $\tilde{x}_*$ из прообраза точки $x_*$, мы полагаем $\mathrm{S}_{M_*} := (\mathrm{S}_M, \tilde{x}_*)$.

Между перечисленными пространствами имеются естественные согласованные отображения: сопоставляя геодезической из $\Gamma_{M_*}$ концевую точку выходящего из $\tilde{x}_*$ поднятия этой геодезической в $\mathrm{U}_M$, мы получаем вложение $\Gamma_{M_*} \to \mathrm{S}_{M_*}$; рассматривая концевые точки начинающихся в $\tilde{x}_*$

поднятий петель, представляющих элементы из $\mathrm{F}_{M_*}$, мы получаем вложение $h : \mathrm{F}_{M_*} \to \mathrm{S}_{M_*}$, которое продолжается до непрерывного отображения $\hbar : \overline{\mathrm{F}}_{M_*} \to \mathrm{S}_{M_*}$ (если $M$ компактна, то $\hbar$ также является вложением). Группа классов отображений $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ естественным образом действует на пространствах $\overline{\mathrm{F}}_{M_*}$, $\Gamma_{M_*}$ и $\mathrm{S}_{M_*}$, причем вышеописанные отображения эквивариантны по отношению к этим действиям. Пространства $\overline{\mathrm{F}}_{M_*}$, $\Gamma_{M_*}$, $\mathrm{S}_{M_*}$ и канонические отображения между ними детально описаны в §3.1.

Трехуровневое пространство $(\overline{\mathrm{F}}_{M_*}, \Gamma_{M_*}, \mathrm{S}_{M_*})$ обладает богатой структурой, которая и изучается в главе 3. Мы уделяем основное внимание тому, какую интерпретацию структуры и отношения между элементами того или иного пространства тройки $(\overline{\mathrm{F}}_{M_*}, \Gamma_{M_*}, \mathrm{S}_{M_*})$ (как то: естественный циклический порядок на множестве точек окружности, групповая структура в $\mathrm{F}_{M_*}$, отношения простоты и пересечения на геодезических) получают в других пространства тройки и как эти структуры взаимодействуют.

В §3.2 дается описание согласованных циклических и линейных порядков на пространствах $\overline{\mathrm{F}}_{M_*}$, $\Gamma_{M_*}$ и $\mathrm{S}_{M_*}$. Циклический порядок на $\mathrm{F}_{M_*}$, индуцируемый описанным выше вложением $h : \mathrm{F}_{M_*} \to \mathrm{S}_{M_*}$, называется *геометрическим*. Этот порядок инвариантен и по отношению к действию $\mathrm{F}_{M_*}$ на себе левыми сдвигами, и по отношению к естественному действию на $\mathrm{F}_{M_*}$ группы $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$. Мы также вводим на $\mathrm{F}_{M_*}$ геометрический линейный порядок, определяя его как тот из линейных порядков на $\mathrm{F}_{M_*}$, согласованных с геометрическим циклическим порядком, в котором тривиальный элемент группы минимален.

В §3.3 изучаются линейный и циклический геометрические порядки на группе $\mathrm{F}_{M_*}$. Мы доказываем ряд необходимых нам в дальнейшем свойств этих порядков.

В §3.4 на пространствах $\overline{\mathrm{F}}_{M_*}$, $\Gamma_{M_*}$ и $\mathrm{S}_{M_*}$ вводятся и изучаются согласованные операции спаривания $\pitchfork$. В каждом из трех указанных пространств операция $\pitchfork$ сопоставляет каждой упорядоченной паре элементов некоторое подмножество фундаментальной группы $\mathrm{F}_{M_*}$, которое мы называем *множеством типов пересечений*. Операция $\pitchfork$ имеет геометрическую природу и наиболее естественно определяется для пар геодезических из $\Gamma_{M_*}$. Родственная конструкция рассматривалась В. Г. Тураевым и О. Я. Виро[24].

В §3.6 речь идет о типах простых замкнутых кривых и петель на поверхности. Вводится ряд вспомогательных определений.

В §3.7 доказывается одна лемма о взаимном расположении двух бесконечных геодезических лучей на гиперболической поверхности.

[24] В. Г. Тураев, *Пересечения петель в двумерных многообразиях*, Матем. сб. **106(148)**:4(8) (1978), 566–588; В. Г. Тураев, О. Я. Виро, *Пересечения петель в двумерных многообразиях. II. Свободные петли*, Матем. сб. **121(163)**:3(7) (1983), 359–369.

Приведем подробнее содержание параграфа 3.5, где изучается структура подмножества простых геодезических в вышеописанном пространстве $\Gamma_{M_*}$.

Бесконечные простые геодезические из $\Gamma_{M_*}$ классифицируются по виду их предельных множеств. В главе 2 работы показано, что предельное множество $\mathrm{Lim}(\xi)$ у бесконечной простой геодезической $\xi \in \Gamma_{M_*}$ либо пусто, либо является простой замкнутой геодезической, либо представляет собой минимальную совершенную геодезическую ламинацию. Если $\mathrm{Lim}(\xi)$ пусто, то $\xi$ уходит в прокол; в этом случае мы говорим, что $\xi$ — простая уходящая в прокол геодезическая. Если $\mathrm{Lim}(\xi)$ — простая замкнутая геодезическая, то $\xi$ спиралевидно сходится к $\mathrm{Lim}(\xi)$; в этом случае мы называем $\xi$ *спиралевидной геодезической*. Если $\mathrm{Lim}(\xi)$ — совершенная ламинация, будем говорить, что $\xi$ — *совершенная геодезическая*.

Для петли $\gamma \in \Gamma_{M_*}$ и числа $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ мы обозначаем через $\gamma^k$ петлю из $\Gamma_{M_*}$, представляющую элемент $v^k$, где $v$ — элемент из $\pi_1(M, x_*)$, представленный петлей $\gamma$. В предыдущих параграфах работы показано, что для любой петли $\gamma \in \Gamma_{M_*}$ последовательность $\{\gamma^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке прямой $\Gamma_{M_*}$, т. е. к некоторой геодезической из $\Gamma_{M_*}$; эта геодезическая обозначается через $\gamma^{+\infty}$.

**Следствие** (3.5.2).

1. *Если простая петля $\gamma \in \Gamma_{M_*}$ не стягиваема к проколу, то геодезическая $\gamma^{+\infty} \in \Gamma_{M_*}$ проста и спиралевидна, а если стягиваема, то $\gamma^{+\infty}$ проста и уходит в прокол.*

2. *Если простая бесконечная геодезическая $\xi \in \Gamma_{M_*}$ спиралевидна, то имеется единственная простая петля $\gamma \in \Gamma_{M_*}$ такая, что $\xi = \gamma^{+\infty}$, а если $\xi$ уходит в прокол, то имеются ровно две простые петли $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{M_*}$ такие, что $\xi = \gamma_1^{+\infty} = \gamma_2^{+\infty}$; при этом $\gamma_1 = \gamma_2^{-1}$.*

Для петли $\gamma \in \Gamma_{M_*}$ мы обозначаем через $I_\gamma$ открытый интервал[25] прямой $\Gamma_{M_*}$, ограниченный «точками» $\gamma$ и $\gamma^{+\infty}$.

**Предложение** (3.5.5). *На прямой $\Gamma_{M_*}$ интервалы семейства*

$$\{I_\gamma \mid \gamma \text{ — простая петля из } \Gamma_{M_*}\}$$

*попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством всех не являющихся простыми геодезических из $\Gamma_{M_*}$.*

Предложение 3.5.5 показывает, что множество всех не являющихся простыми геодезических в $\Gamma_{M_*}$ открыто (будучи объединением открытых интервалов), а множество всех простых геодезических в $\Gamma_{M_*}$, соответственно, замкнуто. Этот факт имеет ясную геометрическую интерпретацию.

[25] Напомним, что пространство $\Gamma_{M_*}$ снабжено топологией прямой; соответствующие подмножества этой прямой мы называем *интервалами*.

**Теорема** (3.5.7). *Пусть* $M_* = (M, x_*)$ — *ориентированная гиперболическая поверхность класса* $\mathfrak{M}_b^h$ *с отмеченной точкой* $x_* \in \partial M$, $\Gamma_{M_*}$ — *пространство всех ориентированных геодезических на* $M_*$ *с началом в* $x_*$, $\Sigma_{M_*}^{\clubsuit}$ — *множество всех простых совершенных геодезических из* $\Gamma_{M_*}$, *а* $\Sigma_{M_*}^{\dagger}$ — *множество всех тех простых спиралевидных геодезических из* $\Gamma_{M_*}$, *которые не сходятся к* $\partial M$. *Предположим, что внутренность* $\mathrm{int}(M)$ *не гомеоморфна сфере с тремя проколами. Тогда*:

1. *Дополнение* $\Gamma_{M_*} \setminus \Sigma_{M_*}^{\clubsuit}$ *всюду плотно в* $\Gamma_{M_*}$, *а его компоненты связности являются компактными невырожденными интервалами.*

2. *Множество* $\Sigma_{M_*}^{\dagger}$ *совпадает с множеством концевых точек компонент из* $\Gamma_{M_*} \setminus \Sigma_{M_*}^{\clubsuit}$.

3. *Множество* $\Sigma_{M_*}^{\clubsuit} \cup \Sigma_{M_*}^{\dagger}$ *замкнуто и нигде не плотно в* $\Gamma_{M_*}$, *не имеет изолированных точек и не ограничено ни с одной из сторон.*

4. *Во внутренности произвольной компоненты дополнения* $\Gamma_{M_*} \setminus \Sigma_{M_*}^{\clubsuit}$ *содержится либо ровно две, либо ровно четыре простых петли и не более двух бесконечных простых геодезических.*

## Глава 4. Действия группы классов отображений поверхности

Приведем одну из ключевых конструкций главы 4, дающую некоторые из рассматриваемых в работе действий группы классов отображений поверхности с краем на прямой и окружности.

Пусть $M$ — гиперболическая поверхность класса $\mathfrak{M}_b^h$, $O_*$ — одна из компонент края $\partial M$. Тогда универсальное накрывающее $\mathrm{U}_M$ поверхности $M$ является гиперболическим по Громову пространством, его гиперболическая граница $\partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфна канторову множеству, гиперболическая компактификация $\overline{\mathrm{U}}_M := \mathrm{U}_M \cup \partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфна замкнутому двумерному диску, а край $\mathrm{S}_M := \partial \overline{\mathrm{U}}_M = \partial \mathrm{U}_M \cup \partial_\infty \mathrm{U}_M$ гомеоморфен окружности[26].

Пусть $\mathrm{I}_*$ — одна из компонент края $\partial \mathrm{U}_M$, накрывающая компоненту $O_*$. Тогда у произвольного гомеоморфизма $\phi \in \mathrm{Homeo}(M, \partial M)$ имеется единственное поднятие $\tilde{\phi} := \tilde{\phi}_{\mathrm{I}_*}$ в $\mathrm{U}_M$, тождественное на $\mathrm{I}_*$; это поднятие единственным образом продолжается до гомеоморфизма $\overline{\phi} : \overline{\mathrm{U}}_M \to \overline{\mathrm{U}}_M$, а ограничение $\overline{\phi}|_{\mathrm{S}_M}$ полностью определяется классом $[\phi] \in \mathrm{MCG}(M, \partial M)$ и от

[26] У этой конструкции имеется наглядная реализация: заметим, что $\mathrm{U}_M$ изометрично вкладывается в гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2$; отождествим $\mathrm{U}_M$ с подмножеством в $\mathbb{H}^2$; при этом край $\partial \mathrm{U}_M$ превращается в счетный набор попарно непересекающихся геодезических в $\mathbb{H}^2$, дополнение $\mathbb{H}^2 \setminus \mathrm{U}_M$ является объединением попарно непересекающихся открытых гиперболических полуплоскостей, а граница $\partial_\infty \mathrm{U}_M$ переходит в множеством предельных точек подмножества $\mathrm{U}_M \subset \mathbb{H}^2$ на абсолюте.

выбора представителя $\phi \in [\phi]$ не зависит. Это дает нам действие на окружности

$$\mathrm{A}^{\mathrm{S}} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{S}_{M}) \quad ([\phi] \mapsto \overline{\phi}|_{\mathrm{S}_{M}}).$$

Действие $\mathrm{A}^{\mathrm{S}}$ тождественно на дуге $\mathrm{I}_{*}$ (и на ее замыкании $\mathrm{clos}(\mathrm{I}_{*})$), что дает нам действие

$$\mathrm{A}^{\mathrm{R}} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{R}_{M}) \quad ([\phi] \mapsto \overline{\phi}|_{\mathrm{R}_{M}})$$

на гомеоморфной прямой дуге $\mathrm{R}_{M} := \mathrm{S}_{M} \setminus \mathrm{clos}(\mathrm{I}_{*})$ окружности $\mathrm{S}_{M}$.

Действия $\mathrm{A}^{\mathrm{S}}$ и $\mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ точны.

Оказывается, действие $\mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ накрывает еще одно действие группы $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ на окружности: рассмотрим те скольжения универсального накрывающего $\mathrm{U}_{M}$, которые переводят $\mathrm{I}_{*}$ в $\mathrm{I}_{*}$; эти скольжения образуют бесконечную циклическую группу и индуцируют на $\mathrm{R}_{M}$ некоторый набор гомеоморфизмов, которые мы называем *целыми сдвигами* на $\mathrm{R}_{M}$; факторизация дуги $\mathrm{R}_{M}$ по этим целым сдвигам дает гомеоморфное окружности пространство $\mathrm{s}_{M}$, а действие $\mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ коммутирует с целыми сдвигами и индуцирует тем самым действие

$$\mathrm{A}^{\mathrm{s}} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{s}_{M}).$$

Приведенная конструкция позволяет также построить мономорфизм группы $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ в группу[27] $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1})$. Действительно: произвольный гомеоморфизм $\iota$ между окружностями $\mathrm{s}_{M}$ и $\mathbf{S}^{1} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ поднимается до гомеоморфизма $\tilde{\iota}$ между их универсальными накрывающими $\mathrm{R}_{M}$ и $\mathbb{R}$. При этом гомеоморфизме целые сдвиги прямой $\mathrm{R}_{M}$ соответствуют целым сдвигам прямой $\mathbb{R}$. Гомеоморфизм $\tilde{\iota}$ переносит действие $\mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ на прямую $\mathbb{R}$, превращая его в действие $\tilde{\iota}_{*} \circ \mathrm{A}^{\mathrm{R}} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathrm{Homeo}_{+}(\mathbb{R})$. Поскольку $\mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ коммутирует с целыми сдвигами на $\mathrm{R}_{M}$, действие $\tilde{\iota}_{*} \circ \mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ коммутирует с целыми сдвигами на $\mathbb{R}$. Таким образом, $\tilde{\iota}_{*} \circ \mathrm{A}^{\mathrm{R}}$ есть гомоморфизм из $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ в $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1})$.

Построенный гомоморфизм $\mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1})$ позволяет определить на группе $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ инвариант $\omega := \omega_{M, O_{*}}$, называемый *закрученностью* вдоль компоненты $O_{*}$. Закрученность определяется как композиция

$$\omega := \tau \circ \tilde{\iota}_{*} \circ \mathrm{A}^{\mathrm{R}} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathbb{R},$$

где $\tau : \widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1}) \to \mathbb{R}$ — число переноса Пуанкаре[28].

[27] Группа $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1})$ по определению состоит из гомеоморфизмов прямой, коммутирующих с единичным сдвигом.

[28] Напомним, что для элемента $\tilde{f} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_{+}(\mathbf{S}^{1})$ число переноса $\tau(\tilde{f})$ определяется как предел

$$\tau(\tilde{f}) := \lim_{k \to \infty} \frac{\tilde{f}^{k}(r) - r}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\tilde{f}^{k}(r)}{k},$$

где $r \in \mathbb{R}$ — произвольное (от выбора $r$ число переноса не зависит).

## Глава 5. Косы

Глава 5 посвящена косам, группам кос и преобразованиям кос.

§5.1 содержит классические определения и факты из теории групп кос. Приведем некоторые из них, фигурирующие далее в формулировках результатов. *Группа кос Артина* ранга $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ определяется копредставлением

$$B_n := \big\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\big|\; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geqslant 2;\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \big\rangle.$$

Группа $B_1$ тривиальна. Элементы групп $B_1$, $B_2$, $B_3$, … называются *косами*, а образующие $\sigma_i$ — *артиновскими образующими*. Косы из $B_n$, $n \in \mathbb{N}$, называют косами *индекса* (или *ранга*) $n$. Класс сопряженности косы $\beta \in B_n$ обозначается через $\widehat{\beta}$. Для произвольных $m \leqslant n \in \mathbb{N}$ вложение $B_m \to B_n$, отправляющее $\sigma_i \in B_m$ в $\sigma_i \in B_n$ ($i \in \{1, \ldots, m-1\}$), называется *каноническим*. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ подгруппа в $B_n$, порожденная образующими $\{\sigma_i \mid r \leqslant i \leqslant s-1\}$, где $r, s \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant s \leqslant n$, обозначается через $B_{[r:s]}$ ($B_{[r:s]} \cong B_{s-r+1}$). Подгруппа $B_{[1:s]}$ обозначается через $B_{[s]}$. Через $\Sigma$ обозначается эпиморфизм из $B_n$ в симметрическую группу $S_n$, переводящий $\sigma_i$ в перестановку $(i, i{+}1)$. Гомоморфизм $\Sigma : B_n \to S_n \subset S_\infty$ дает действие группы $B_n$ на множестве натуральных чисел. Для косы $\beta$ образ числа $i \in \mathbb{N}$ под действием перестановки $\Sigma(\beta)$ обозначается через $\beta(i)$. Ядром эпиморфизма $\Sigma : B_n \to S_n$, $n \in \mathbb{N}$, является *группа крашеных кос* $P_n$. Для чисел $i < j \in \mathbb{N}$ полагаем

$$a_{ij} := \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}^2\sigma_{j-2}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}.$$

Набор $\{a_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ порождает $P_n$. Мы называем элементы $a_{ij}$ *образующими Маркова*. Коса

$$\Delta_n := (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-2})\ldots(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1) \in B_n$$

называется *фундаментальной*. При $n \geqslant 3$ коса $\Delta_n^2 \in B_n$ порождает центр группы $B_n$. Гомоморфизм $B_n \to \mathbb{Z}$, отправляющий все артиновские образующие в 1, обозначается через $\exp$ и называется *экспоненциальной суммой*. Класс сопряженности $\widehat{\beta}$ косы $\beta$ индекса $n$ называется *расщепимым*, если для некоторого $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ в $\widehat{\beta}$ найдется коса из множества $B_{[r]}B_{[r+1:n]}$.

В §5.2 рассматривается стандартная геометрическая интерпретация кос и связанный с ней классический способ представления (изотопических типов) ориентированных узлов и зацеплений в $\mathbb{R}^3$ с помощью кос. Сопряженные косы представляют один и тот же класс зацеплений. Согласно теореме Александера, для любого ориентированного зацепления найдется представляющая его коса. В §5.2 также приводятся некоторые сведения из теории узлов и зацеплений.

§5.3 посвящен преобразованиям кос. Под *преобразованиями кос* понимаются частично определенные многозначные отображения на множестве $\widehat{\mathcal{B}}$ классов сопряженности групп кос всевозможных рангов. Преобразование называется *допустимым*, если связанные им классы представляют одно и то же зацепление. Если преобразование $\mathfrak{F} : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ определено на классе $\widehat{\beta}$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ *применимо* к $\widehat{\beta}$ или что $\widehat{\beta}$ *допускает* преобразование $\mathfrak{F}$ (в определенных случаях для краткости мы говорим также, что $\beta$ допускает $\mathfrak{F}$); если $\widehat{\alpha} \in \mathfrak{F}(\widehat{\beta})$, то говорят, что $\widehat{\alpha}$ *получается из* $\widehat{\beta}$ преобразованием $\mathfrak{F}$.

Наиболее известными преобразованиями кос являются введенные А. А. Марковым стабилизация и дестабилизация. *Положительной стабилизацией* называется преобразование, применимое к любому классу сопряженности и переводящее класс $\widehat{\beta}$ индекса $n \in \mathbb{N}$ в класс $\widehat{\alpha}$ индекса $n+1$ в том случае, если в $\widehat{\beta}$ найдется коса $\gamma$ такая, что $\gamma'\sigma_n \in \widehat{\alpha}$, где $\gamma'$ есть образ косы $\gamma$ при каноническом вложении $B_n \to B_{n+1}$. Преобразование, переводящее класс сопряженности косы $\gamma$ ($\gamma \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$) в класс сопряженности косы $\gamma'\sigma_n^{-1} \in B_{n+1}$, называется *отрицательной стабилизацией*. Преобразования, обратные положительной и отрицательной стабилизациям, называются, соответственно, *положительной* и *отрицательной дестабилизациями*. *(Де)стабилизацией* называется объединение[29] положительной и отрицательной (де)стабилизаций.

**Теорема** (Марков). *Два класса сопряженности кос представляют одно и то же зацепление в том и только в том случае, когда они связаны цепочкой стабилизаций и дестабилизаций.*

В числе прочих мы рассматриваем введенные Бирман и Менаско преобразования рокировки[30] и переворота. Пусть $\alpha$, $\beta$ — две косы индекса $n \geqslant 2$. Говорят, что класс $\widehat{\alpha}$ получается из $\widehat{\beta}$ *рокировкой*, если найдутся $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{[n-1]}$ такие, что $\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1} \in \widehat{\beta}$ и $\gamma_1\sigma_{n-1}^{-1}\gamma_2\sigma_{n-1} \in \widehat{\alpha}$. Говорят, что класс $\widehat{\beta}$ косы $\beta \in B_n$, $n \geqslant 2$, *допускает переворот*, если $\widehat{\beta}$ содержит косу из множества

$$B_{[n-1]}\sigma_{n-1}B_{[n-1]}\sigma_{n-1}^{\pm 1}B_{[n-1]}\sigma_{n-1}^{-1}.$$

В работе также вводятся преобразования 2-стабилизации и 2-дестабилизации. Приведем понятие допустимости 2-дестабилизации. Класс $\widehat{\beta}$ косы $\beta \in B_n$, $n \geqslant 4$, *допускает 2-дестабилизацию*, если $\widehat{\beta}$ содержит косу из множества

$$B_{[n-2]}\sigma_{n-2}^{\delta}\sigma_{n-1}^{\delta}\sigma_{n-3}^{\delta}\sigma_{n-2}^{\delta} \quad (\delta \in \{+1, -1\}).$$

Кроме того, в §5.3 вводится понятие *трафаретных преобразований* кос.

---

[29] Здесь имеется в виду естественная операция объединения на множестве частично определенных многозначных отображений.

[30] Русский термин «рокировка» предложен И. А. Дынниковым.

В §5.4 вводится серия целочисленных инвариантов сопряженности в группе кос $B_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Определим на группе кос $B_n$ семейство отображений

$$X_{i,j} : B_n \to \mathbb{Z}, \qquad \text{где } i, j \in \mathbb{N},$$

положив

$$X_{i,j}(\sigma_k^p) := \begin{cases} p & \text{если } \{i,j\} = \{k, k+1\}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и

$$X_{i,j}(\alpha\beta) = X_{\beta(i),\beta(j)}(\alpha) + X_{i,j}(\beta).$$

Для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ определим отображение

$$\mathcal{X}_k : B_n \to \mathbb{Z},$$

положив[31]

$$\mathcal{X}_k(\beta) := \sum_{\{(i,j) \ | \ \beta^k(i)=j\}} X_{i,j}(\beta). \tag{1}$$

**Предложение** (5.4.4). *Для любого $k \in \mathbb{Z}$ отображение $\mathcal{X}_k : B_n \to \mathbb{Z}$ является инвариантом сопряженности в группе кос.*

Инварианты $\mathcal{X}_k$ используются в §5.5 в доказательствах.

В §5.5 исследуется вопрос о мощности, а точнее — о конечности либо бесконечности множеств $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ и $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ для косы $\beta \in B_n$, где $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ (соотв., $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$) — множество всех тех классов сопряженности кос индексов $(n+1)$ (соотв., $(n-1)$), которые получаются из класса $\widehat{\beta}$ стабилизацией (соотв., дестабилизацией). Доказываются следующие теоремы:

**Теорема** (5.5.3). *Пусть коса $\beta$ индекса $\geqslant 3$ представляет узел*[32] *(т. е. однокомпонентное зацепление). Тогда множество $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ бесконечно*[33].

**Теорема** (5.5.6). *Пусть коса $\beta$ представляет узел и имеет нечетный индекс, а класс $\widehat{\beta}$ допускает 2-дестабилизацию. Тогда множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ бесконечно.*

---

[31] Если для косы $\beta$, числа $k$ и индексов $i$ и $j$ выполняются и равенство $\beta^k(i) = j$, и равенство $\beta^k(j) = i$, то в сумму (1) в качестве слагаемых входят и $X_{i,j}(\beta)$, и совпадающий с ним $X_{j,i}(\beta)$.

[32] Данное требование равносильно тому, что перестановка $\Sigma(\beta)$ является циклом длины $n$, где $n$ — индекс косы $\beta$.

[33] Из теоремы 5.5.3 следует, в частности, что для произвольного узла $K$, представленного косой индекса $k \geqslant 3$, в группе $B_n$, $n > k$, найдется бесконечно много попарно несопряженных кос, представляющих $K$.

Отметим, что существование кос с бесконечным множеством $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ при первичном рассмотрении представляется неожиданным, поскольку дестабилизация, уменьшая индекс, должна, казалось бы, косу «упрощать». Теорема 5.5.6 позволяет для любого узла $K$ строить примеры представляющих $K$ кос с бесконечным множеством $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$. Действительно, возьмем произвольную представляющую $K$ косу $\beta$ нечетного индекса $n \geqslant 3$; тогда коса $\beta_{+2} := \beta\sigma_{n-1}^{-2}\sigma_n\sigma_{n+1}\sigma_{n-1}\sigma_n$ из $B_{n+2}$ также представляет $K$, имеет нечетный индекс и 2-дестабилизируема, так что множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta}_{+2})$ бесконечно. Одним из наиболее простых примеров кос, класс сопряженности которых дестабилизируется бесконечным числом различных способов, является представляющая тривиальный узел коса $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3$ из $B_5$.

В §5.6 изучается представление группы кос $B_n$ ($n \geqslant 2$) в виде группы классов (тождественных на крае) отображений диска с $n$ проколами. Взяв ориентированный снабженный гиперболической метрикой класса $\mathfrak{M}_b^h$ диск $D_n$ с $n$ проколами и отмеченной точкой $x_* \in \partial D_n$ и зафиксировав изоморфизм между группой кос $B_n$ и группой классов отображений $\mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$, мы отождествляем $B_n$ с $\mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$ и получаем тем самым возможность применить полученные в главах 2–4 результаты к группе кос. В частности, мы получаем набор связанных эквивариантными отображениями действий группы кос на отвечающих поверхности $D_n$ одномерных многообразиях, на пространстве геодезических на $D_n$, а также на фундаментальной группе $\mathrm{F}_{D_n} := \pi_1(M, x_*)$ (которая изоморфна свободной группе ранга $n$). В $\mathrm{F}_{D_n}$ мы выбираем свободную систему образующих $(u_1, \ldots, u_n)$, с которой действие $B_n$ на $\mathrm{F}_{D_n}$ превращается в представление Артина. Напомним, что представление Артина точно и задается следующими соотношениями:

$$\sigma_j(u_i) = \begin{cases} u_i, & \text{если } i \neq j, j+1; \\ u_{i+1}, & \text{если } i = j; \\ u_i^{-1}u_{i-1}u_i, & \text{если } i = j+1. \end{cases}$$

В §5.7 рассматривается перенос классификации Нильсена–Тёрстона с группы $\mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$ на группу кос и изучаются свойства кос, относящихся к различным типам. В классификации Нильсена–Тёрстона каждый гомеоморфизм поверхности относится к периодическому, приводимому либо псевдоаносовскому типу. Тип косы из $B_n$ определяется как тип соответствующих ей гомеоморфизмов диска $D_n$.

**Предложение.** *В группе кос $B_n$ множество кос периодического типа совпадает с объединением классов сопряженности всевозможных степеней элементов $\delta_n := \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}$ и $\delta_{*n} := \sigma_1\delta_n$.*

В §5.7 также вводятся понятия сателлитов и компаньонов для кос приводимого типа. Пусть $\beta \in B_n$ — приводимая коса, $C \subset D_n$ — некоторая геодезическая приводящая система для $\beta$ (т. е. для отвечающих косе $\beta$ гомеоморфизмов диска $D_n$), $M$ — компонента поверхности $D_n \setminus C$, содержащая край $\partial D_n$. Ясно, что $M$ гомеоморфна диску с $m \leqslant n$ проколами, а гомеоморфизмы соответствующего косе $\beta$ класса в $\mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$ индуцируют некоторый класс $g$ в группе $\mathrm{MCG}(M, \partial M) \cong \mathrm{MCG}(D_m, \partial D_m)$. Пусть $\widehat{\alpha}$ — класс сопряженности в группе кос $B_m$, отвечающий элементу $g$. Будем говорить, что класс $\widehat{\alpha}$ является *компаньоном* для класса $\widehat{\beta}$ (отвечающим приводящей системе $C$), а $\widehat{\beta}$ является *сателлитом* для $\widehat{\alpha}$. Если коса $\beta$ относится к приводимому непериодическому типу, то у нее имеется каноническая приводящая система; отвечающий этой системе компаньон мы называем *главным компаньоном* для $\widehat{\beta}$.

В классе кос приводимого типа мы выделяем класс сложносоставных кос — в алгоритме распознавания дестабилизируемости кос (глава 7) этот класс рассматривается отдельно. Пусть $\beta \in B_n$ — приводимая коса, $C \subset D_n$ — компонента геодезической приводящей системы $\mathcal{C}$ косы $\beta$. Компонента $C$ называется *крашеной*, если $\beta(C) = C$. Косу мы называем *сложносоставной*, если она относится к приводимому непериодическому типу, нерасщепима, а в ее канонической приводящей системе есть крашеные компоненты.

## Глава 6. Псевдохарактеры групп кос

В главе 6 изучаются псевдохарактеры групп кос. В §6.1 приводятся общие сведения из теории псевдохарактеров групп. Пусть $G$ — произвольная группа. Функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ называется *квазихарактером* (или *квазиморфизмом*) с *дефектом* $C$, если выполняется следующее условие:

$$\sup_{g_1, g_2 \in G} |\varphi(g_1 g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)| = C < \infty.$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\forall\ z \in \mathbb{Z},\ g \in G : \quad \varphi(g^z) = z\varphi(g),$$

то $\varphi$ называют *псевдохарактером* (или *псевдоморфизмом*). Как хорошо известно, *каждый псевдохарактер является инвариантом сопряженности*. Псевдохарактеры группы $G$ образуют вещественное линейное пространство; это пространство обозначается через $\mathcal{PX}(G)$. Поскольку каждый гомоморфизм из $G$ в $\mathbb{R}$ является псевдохарактером с дефектом 0, пространство $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ вещественнозначных гомоморфизмов группы $G$ является подпространством в $\mathcal{PX}(G)$.

В §6.2 вводится понятие ядерных псевдохарактеров групп кос, в терминах ядерных псевдохарактеров формулируются и доказываются признаки допустимости преобразований на классах кос и признаки простоты представленных косами зацеплений. При $n \geqslant 3$ пространство псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_n)$ имеет бесконечную размерность. Пространство $\mathrm{Hom}(B_n, \mathbb{R})$ при $n \geqslant 2$ имеет размерность 1. Поскольку $B_2 \simeq \mathbb{Z}$, пространство $\mathcal{PX}(B_2)$ совпадает с $\mathrm{Hom}(B_2, \mathbb{R})$. Единственным (с точностью до умножения на константу) вещественнозначным гомоморфизмом (т. е. псевдохарактером с нулевым дефектом) для группы кос является экспоненциальная сумма. Другие описанные в литературе псевдохарактеры для $B_n$ — закрученность (определение приведено ниже) и псевдохарактеры, соответствующие сигнатурам представленных косами зацеплений (сами сигнатуры являются квазихарактерами[34]).

**Определение.** Псевдохарактер $\varphi : B_n \to \mathbb{R}$ группы кос $B_n$ называется *ядерным*, если $\varphi$ принимает нулевое значение на всех косах подгруппы $B_{[n-1]}$ (которая, напомним, порождается артиновскими образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ и изоморфна группе кос $B_{n-1}$).

**Лемма** (6.2.6). *Псевдохарактер группы кос является ядерным тогда и только тогда, когда он принимает нулевое значение на каждой расщепимой косе.*

**Теорема** (6.2.7, 6.2.9). *Пусть $n \geqslant 3$, пусть $\varphi : B_n \to \mathbb{R}$ — ядерный псевдохарактер с дефектом $C_\varphi$. Пусть $\beta \in B_n$ и пусть $|\varphi(\beta)| > C_\varphi$. Тогда класс сопряженности $\widehat{\beta}$ не допускает ни дестабилизации, ни рокировки. Если $|\varphi(\beta)| > 2C_\varphi$, то $\widehat{\beta}$ не допускает переворота.*

**Теорема** (6.2.8). *Пусть $n \geqslant 3$ и пусть $\varphi : B_n \to \mathbb{R}$ — ядерный псевдохарактер с дефектом $C_\varphi$. Пусть $\beta \in B_n$ и пусть $|\varphi(\beta)| > C_\varphi$. Тогда коса $\beta$ представляет простое (т. е. нетривиальное, несоставное и нерасщепимое) зацепление*[35].

В §6.2 также представлена комбинаторная формула, задающая проекцию пространства псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_n)$ на подпространство ядерных псевдохарактеров. Формула использует специальную систему эндоморфизмов «высвобождения нитей» в группе крашеных кос $P_n$. Мы обозначаем эти эндоморфизмы $\mathtt{REL}_J : P_n \to P_n$, $J \subset \{1, \ldots, n\}$. (Система включает

[34] См. J.-M. Gambaudo, É. Ghys, *Braids and signatures*, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), no. 4, 541–579.

[35] Зацепление $L \subset S^3$ называется *тривиальным*, если найдется сфера $S^2 \subset S^3$ такая, что $L \subset S^2$. Зацепление $L \subset S^3$ называется *расщепимым*, если найдется сфера $S^2 \subset S^3 \setminus L$, не ограничивающая шар (в $S^3 \setminus L$). Зацепление $L \subset S^3$ называется *составным*, если найдется сфера $S^2 \subset S^3$, которая пересекается с зацеплением $L$ в двух точках, разбивая его на два зацепления («тэнгла»), ни одно из которых не является незаузленной дугой. Зацепление называют *простым*, если оно не является ни составным, ни расщепимым, ни тривиальным.

$2^n$ эндоморфизмов, — по числу подмножеств множества $\{1,\ldots,n\}$.) Определение гомоморфизмов $\mathtt{REL}_J$ дается в форме следующего утверждения о существовании.

**Предложение** (6.2.11). *В группе крашеных кос $P_n$ с системой образующих Маркова $\{a_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ для произвольного подмножества $J \subset \{1,\ldots,n\}$ существует единственный гомоморфизм $\mathtt{REL}_J : P_n \to P_n$, удовлетворяющий следующему условию*:

*для любых $i < j \in \{1,\ldots,n\}$*:

$$\mathtt{REL}_J(a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in J \text{ или } j \in J; \\ a_{ij}, & \text{если } \{i,j\} \cap J = \varnothing. \end{cases}$$

**Определение.** Для псевдохарактера $\phi : B_n \to \mathbb{R}$ определим функционал $\mathbb{T}_\phi : B_n \to \mathbb{R}$, положив для $\beta \in B_n$

$$\mathbb{T}_\phi(\beta) := \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{(-1)^{|J|} \cdot \phi(\mathtt{REL}_J(\beta^{n!}))}{n!}. \qquad (*)$$

(Здесь сумма берется по всем подмножествам множества $\{1,\ldots,n\}$; коса $\mathtt{REL}_J(\beta^{n!})$ определена, поскольку коса $\beta^{n!}$ является крашеной.)

**Теорема** (6.2.13). 1. *Для произвольного псевдохарактера $\phi \in \mathcal{PX}(B_n)$ функционал $\mathbb{T}_\phi$ является ядерным псевдохарактером.*

2. *Если псевдохарактер $\psi \in \mathcal{PX}(B_n)$ — ядерный, то $\mathbb{T}_\psi = \psi$.*

В §6.5 определяется вещественнозначный инвариант для кос, который мы называем *закрученностью*, и доказывается ряд его ключевых свойств. Инвариант эффективно вычислим и имеет прозрачный геометрический смысл. На группе кос фиксированного индекса закрученность является ядерным псевдохарактером. Этот инвариант тесно связан с порядком Деорнуа (и порядками терстоновского типа вообще). В терминах закрученности устанавливаются ограничения на возможность проведения дестабилизации Маркова и преобразований Бирман–Менаско на классах сопряженности кос, составляющие содержание четырех гипотез Менаско из сборника проблем Кирби[36], выводятся достаточные условия простоты представленного косой зацепления.

[36] R. Kirby (Ed.), *Problems in low-dimensional topology*, Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 2.2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 35–473.

**Определение.** В §5.6 для произвольного натурального $n \geqslant 2$ описан изоморфизм $\mathcal{I} : B_n \to \mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$ между группой кос $B_n$ и группой классов тождественных на крае отображений ориентированного диска $D_n$ с $n$ проколами. В §4.5 для группы классов отображений $\mathrm{MCG}(M, \partial M)$ ориентированной гиперболичной поверхности $M$ и компоненты ее края $O_* \subset \partial M$ описан инвариант $\omega_{M,O_*} : \mathrm{MCG}(M, \partial M) \to \mathbb{R}$ (закрученность вдоль компоненты $O_*$). *Закрученность* $\omega := \omega_n$ *на группе кос* $B_n$ определяется как композиция

$$\omega := \omega_{D_n,\partial D_n} \circ \mathcal{I} : B_n \to \mathbb{R}.$$

**Теорема** (6.5.2). *На группе кос $B_n$, $n \geqslant 3$, закрученность является ядерным псевдохарактером с дефектом* 1.

**Следствие** (6.5.3). *Пусть $n \geqslant 3$, $\beta \in B_n$. Тогда*:

1. *Если $|\omega(\beta)| > 1$, то класс $\widehat{\beta}$ не допускает ни дестабилизации, ни рокировки.*
2. *Если $|\omega(\beta)| > 2$, то класс $\widehat{\beta}$ не допускает переворота.*

Из следствия 6.5.3 вытекает справедливость четырех гипотез Менаско из сборника проблем Кирби, причем некоторых из них — в усиленном виде (за исключением гипотезы о периодических косах в части, касающейся переворота, — как показано в [1], эта часть гипотезы ошибочна).

**Следствие** (6.5.4). *Пусть $n \geqslant 3$, $\beta \in B_n$. Если $|\omega(\beta)| > 1$, то $\beta$ представляет простое* (*т. е. нетривиальное, несоставное и нерасщепимое*) *зацепление.*

**Лемма** (6.5.7). *Закрученность всякой расщепимой косы равна нулю.*

**Лемма** (6.5.9). *Для любых $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ и произвольной артиновской образующей $\sigma_i \in B_n$ $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$ выполняется неравенство*

$$\omega(\beta_1\beta_2) \ \leqslant \ \omega(\beta_1\sigma_i\beta_2).$$

**Теорема** (6.5.11). *Если класс сопряженности кос $\widehat{\beta}$ является сателлитом класса $\widehat{\alpha}$, то $\omega(\beta) = \omega(\alpha)$.*

**Теорема** (6.5.12). *Закрученность любой косы есть рациональное число. Причем*

$$\omega(B_n) = \mathbb{Q}_{[n]}, \quad \textit{где} \quad \mathbb{Q}_{[n]} := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ n \geqslant q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Косу $\beta \in B_n$ называют *положительной по Деорнуа*, если для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ она может быть записана словом в образующих $\{\sigma_i^{+1}, \sigma_{i+1}^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ с обязательным участием $\sigma_i^{+1}$. Для $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ пишем $\beta_1 \prec \beta_2$, если коса $\beta_1^{-1}\beta_2$ положительна по Деорнуа. Отношение $\prec$ является линейным левоинвариантным порядком на группе кос[37] ($\forall \beta_1, \beta_2, \alpha \in B_n$: $\beta_1 \prec \beta_2 \iff \alpha\beta_1 \prec \alpha\beta_2$) и носит название *порядок Деорнуа.* Как известно (см. [3]), для произвольной косы $\beta \in B_n$ найдется (очевидно, единственное) $z \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\Delta_n^{2z} \preccurlyeq \beta \prec \Delta_n^{2(z+1)}.$$

Обозначим такое $z$ (для данной $\beta$) через $\lfloor \beta \rfloor_D$.

**Теорема** (6.5.18). *Для любой косы $\beta$ верно*:

$$\lfloor \beta \rfloor_D \leqslant \omega(\beta) \leqslant \lfloor \beta \rfloor_D + 1.$$

$$\omega(\beta) = \lim_{k \to \infty} \frac{\lfloor \beta^k \rfloor_D}{k}.$$

**Теорема** (6.5.20).
1. *На группе кос $B_n$ ($n > 1$) закрученность является единственным (с точностью до умножения на положительную константу) нетривиальным псевдохарактером, принимающим неотрицательные значения на всех косах, положительных по Деорнуа.*

2. *На группе кос $B_n$ ($n > 1$) закрученность является единственным (с точностью до умножения на положительную константу) нетривиальным ядерным псевдохарактером, для которого выполняется свойство из леммы* 6.5.9.

На практике закрученность косы может быть вычислена, например, с помощью известных алгоритмов сравнения кос в порядке Деорнуа: указанные алгоритмы позволяют вычислять в группе кос вышеописанный функционал $\lfloor \cdot \rfloor_D$, а как видно из следующего предложения, этого достаточно для нахождения закрученности.

**Предложение** (6.5.22). *Пусть $\beta \in B_n$. Тогда*

$$\{\omega(\beta)\} \;=\; \left[\frac{\lfloor \beta^N \rfloor_D}{N},\ \frac{\lfloor \beta^N \rfloor_D + 1}{N}\right] \cap \mathbb{Q}_{[n]},$$

*где $N = n^2 - n + 1$, а $[\cdot,\cdot] \subset \mathbb{R}$ — отрезок вещественной прямой.*

[37] См. P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, *Why are braids orderable?*, Panor. Synthèses, vol. 14, Soc. Math. France, Paris, 2002.

**Глава 7. Алгоритм распознавания дестабилизируемости**

В главе 7 описывается алгоритм, определяющий, допускает ли класс сопряженности $\widehat{\beta}$ заданной косы $\beta$ дестабилизацию. Точнее, мы описываем более информативный алгоритм, распознающий положительную дестабилизируемость. Чтобы выяснить, допускает ли $\widehat{\beta}$ отрицательную дестабилизацию, достаточно применить алгоритм к обратной косе $\beta^{-1}$, поскольку, как следует непосредственно из определения дестабилизации, класс $\widehat{\beta}$ допускает отрицательную дестабилизацию в том и только в том случае, когда $\widehat{\beta}^{-1}$ допускает дестабилизацию положительную.

Алгоритм строится на основе описанного в главе 5 представления группы кос $B_n$ в виде группы классов отображений $\mathrm{MCG}(D_n, \partial D_n)$ проколотого диска $D_n$ и возникающих отсюда согласованных действий группы кос на различных связанных с поверхностью $D_n$ пространствах; эти пространства изучаются — в общем случае произвольной гиперболической поверхности класса $\mathfrak{M}_b^h$ — в главе 3 работы, а действия на них группы классов отображений — в главе 4. Непосредственно в работе алгоритма участвуют лишь элементы свободной фундаментальной группы $\mathrm{F}_{D_n} := \pi_1(D_n, x_*)$, $x_* \in \partial D_n$, и действие группы кос на $\mathrm{F}_{D_n}$ (действие Артина), остальные же пространства и действия на них нужны для сопутствующих доказательств.

В §7.1 вводится понятие *решений* для косы, в терминах которых формулируется и доказывается критерий положительной дестабилизируемости класса сопряженности кос. Элемент $v \in \mathrm{F}_{D_n}$ называется *решением*[38] для косы $\beta \in B_n$, если $v \neq \beta(v)$, а на $D_n$ найдутся представляющие элементы $v$ и $\beta(v)$ и пересекающиеся только в точке $x_*$ петли вида $\gamma : [0,1] \to D_n$ ($\gamma(0) = \gamma(1) = x_*$) с $\gamma^{-1}(x_*) = \{0,1\}$. Решение $v$ для косы $\beta$ назовем *положительным*, если $v \prec \beta(v)$ в геометрическом порядке[39] $\preccurlyeq$ на $\mathrm{F}_{D_n}$. Если решение $v$ является простым элементом (т. е. если $v$ представим простой петлей на $D_n$), мы говорим, что $v$ — *простое* решение.

**Теорема** (7.1.10). *Пусть $\beta \in B_n$. Тогда следующие условия равносильны:*

i) *класс $\widehat{\beta}$ допускает положительную дестабилизацию;*

ii) *у $\beta$ найдется положительное решение;*

iii) *у $\beta$ найдется положительное простое решение.*

[38] Для этого определения важно, что $x_*$ лежит на крае $\partial D_n$ и что рассматриваются петли с $\gamma^{-1}(x_*) = \{0,1\}$, — пренебрежение любым из этих условий изменило бы смысл определения.

[39] Геометрический порядок $\preccurlyeq$ на фундаментальной группе ориентированной поверхности с краем вводится в §3.2; порядок $\preccurlyeq$ зависит от ориентации поверхности, которая в данном случае выбирается таким образом, чтобы для произвольного $v \in \mathrm{F}_{D_n}$ выполнялось неравенство $v \preccurlyeq \sigma_i(v)$.

**Предложение** (7.1.9). *У произвольной косы $\beta \in B_n$ и множество положительных, и множество простых решений для $\beta$ инвариантны под действием элементов централизатора косы $\beta$. В частности, указанные множества инвариантны под действием входящих в этот централизатор кос $\beta$ и $\Delta_n^2$.*

**Лемма** (7.1.6). *Существует алгоритм, который по заданным косе $\beta \in B_n$ и элементу $v \in \mathrm{F}_{D_n}$ определяет, является ли $v$ положительным решением для $\beta$.*

В §7.2 изучается вопрос о дестабилизируемости классов кос периодического типа. Критерий дестабилизируемости из §7.1 и признаки недестабилизируемости из §6.5 дают следующую теорему.

**Теорема** (7.2.1). *Пусть коса $\beta \in B_n$ относится к периодическому типу. Тогда класс $\widehat{\beta}$ допускает положительную дестабилизацию в том и только в том случае, когда*

$$0 < \exp(\beta) < n^2 - n.$$

В §§7.3–7.5 доказывается ряд вспомогательных технических утверждений, вытекающих из результатов, полученных в предыдущих главах, и необходимых для построения алгоритмической процедуры из §7.6 и доказательства ее свойств.

В §7.6 конструируется алгоритмическая процедура (*фундаментальный алгоритм*), позволяющая для заданной косы $\beta \in B_n$ за конечное число шагов проверять имеющие определенный (зависящий от $\beta$) вид бесконечные подмножества элементов группы $\mathrm{F}_{D_n}$ на наличие решений для $\beta$. Указанные подмножества выпуклы по отношению к геометрическому порядку $\preccurlyeq$ на $\mathrm{F}_{D_n}$ и называются *$\beta$-допустимыми интервалами*.

В §7.7 изучается вопрос о дестабилизируемости классов кос псевдоаносовского типа. Здесь доказывается, что для произвольной псевдоаносовской косы $\beta \in B_n$ в $\mathrm{F}_{D_n}$ найдется конечный набор $\Xi_\beta$ $\beta$-допустимых интервалов, обладающий тем свойством, что в случае, когда к $\widehat{\beta}$ применима положительная дестабилизация (что в силу критерия из §7.1 равносильно существованию в $\mathrm{F}_{D_n}$ простых положительных решений для $\beta$), некоторые из простых положительных решений для $\beta$ содержатся в интервалах набора $\Xi_\beta$. В §7.7 приводится алгоритм, вычисляющий по заданной псевдоаносовской косе $\beta$ конечный набор $\beta$-допустимых интервалов, обладающий указанным свойством. В комбинации с процедурой из §7.6 это дает алгоритм, распознающий положительную дестабилизируемость класса сопряженности псевдоаносовской косы.

В §7.8 проводятся вспомогательные построения, необходимые для распознавания положительной дестабилизируемости приводимых сложносоставных классов кос.

В §7.9 изучается вопрос о дестабилизируемости классов кос приводимого типа. В частности, доказываются следующие теоремы.

**Теорема** (7.9.1). *Пусть $\beta$ — приводимая коса. Предположим, что у класса $\widehat{\beta}$ имеется компаньон $\widehat{\alpha}$, допускающий положительную дестабилизацию. Тогда и $\widehat{\beta}$ допускает положительную дестабилизацию.*

**Следствие** (7.9.3). *Класс сопряженности несложносоставной и нерасщепимой косы приводимого непериодического типа допускает положительную дестабилизацию тогда и только тогда, когда его главный компаньон допускает положительную дестабилизацию.*

В §7.9 также выводится критерий положительной дестабилизируемости для сложносоставных кос (теорема 7.9.4). Отметим, что вопрос о дестабилизируемости расщепимого класса сопряженности очевидно сводится к вопросу о дестабилизируемости его «частей» и что критерий из следствия 7.9.3 охватывает наиболее важный случай приводимых кос, представляющих узлы (а не многокомпонентные зацепления), поскольку узел не может быть представлен ни сложносоставной, ни расщепимой косой.

В §7.10 приводится подробная схема алгоритма, определяющего, допускает ли класс сопряженности $\widehat{\beta}$ заданной косы $\beta$ положительную дестабилизацию. На начальном этапе своей работы этот алгоритм распознает тип заданной косы в классификации Нильсена–Тёрстона, затем переходит к соответствующему подалгоритму — для периодического, псевдоаносовского либо приводимого (непериодического) случая, — в каждом из этих случаев распознавая положительную дестабилизируемость с помощью процедур, описанных в предыдущих параграфах главы 7.

Отметим, что развитая в работе техника применима те только к распознаванию дестабилизируемости, но и к распознаванию некоторых других преобразований кос, а также к задаче определения сильной неприводимости автоморфизмов сферы с проколами[40].

[40] Автоморфизм поверхности называется *сильно неприводимым*, если каждая существенная простая замкнутая кривая переводится этим автоморфизмом в кривую, пересекающую — даже после произвольной изотопии — свой прообраз. Насколько известно автору, проблема распознавания сильной неприводимости не решена ни для одной неэлементарной поверхности.

## Глава 8. Случайные блуждания в группе кос

Глава 8 посвящена изучению границ случайных блужданий на группах из широкого класса, содержащего группы кос Артина и группы классов отображений поверхностей определенного типа.

Пусть $G$ — счетная группа, $\mu$ — вероятностная мера на $G$ (мера $\mu$ называется *допустимой*, если ее носитель порождает $G$ как полугруппу). *Правым случайным блужданием на группе $G$ с распределением $\mu$* (или, короче, *$\mu$-блужданием*) называется марковский процесс с пространством состояний $G$, переходной вероятностью $P(g,h)=\mu(g^{-1}h)$ и начальным состоянием в единице группы. Реализации этого процесса называются *траекториями* блуждания. Соответствующая процессу марковская мера на пространстве траекторий $G^{\mathbb{Z}_+}$ обозначается через $P_\mu$.

*Граница Пуассона* (или *граница-выход*) $\mu$-блуждания в группе $G$ определяется как факторпространство пространства траекторий $(G^{\mathbb{Z}_+}, P_\mu)$ по хвостовому отношению эквивалентности (эквивалентными считаются траектории, имеющие одинаковые «хвосты», т. е. с некоторых моментов времени совпадающие), что не дает прямого способа описания этой границы. Один из подходов к алгебраическому описанию границы Пуассона состоит в том, чтобы строить границу как предельное пространство для нормальных форм случайных элементов группы, состоящее из бесконечных слов или конфигураций более общего вида[41].

Пусть $S$ — некоторое множество элементов группы $G$, порождающее $G$ как полугруппу, $S^*$ — множество всех конечных слов в алфавите, символами которого являются элементы множества $S$. *Нормальной формой* в группе $G$ называют отображение $\mathfrak{N}: G\to S^*$ такое, что $\mathrm{pr}\circ\mathfrak{N}=\mathrm{id}_G$, где $\mathrm{pr}$ — отображение естественной проекции из $S^*$ в $G$, переводящее слово $w_1w_2\dots w_k\in S^*$ в элемент $w_1\cdot w_2\cdots w_k\in G$. Говорят, что последовательность $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ слов из $S^*$ *сходится на бесконечности*, если для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что для каждого $j>N$ длина слова $V_j$ превышает $k$ и начальные подслова длины $k$ у слов $V_j$ и $V_N$ совпадают. Говорят, что нормальная форма $\mathfrak{N}: G\to S^*$ *стабильна по отношению к $\mu$-блужданию* (или *$\mu$-стабильна*), если для $P_\mu$-п. в. траектории $\tau=\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ последовательность слов $\{\mathfrak{N}(\tau_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ сходится на бесконечности. Нормальная форма называется *стабильной*, если она $\mu$-стабильна для каждой допустимой меры $\mu$.

Одним из главных результатов главы 8 является теорема о стабильности нормальной формы Маркова–Ивановского в группе кос. Эта нормальная форма представлена в работе А. А. Маркова [Mark][42]. Она основана на

[41] См. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры*, Успехи мат. наук **55**:4 (2000), 59–128.

[42] А. А. Марков, *Основы алгебраической теории кос*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **16** (1945), 3–54.

нормальном ряде[43] группы крашеных кос, последовательные факторы в котором есть свободные группы убывающих рангов, и описывается следующим образом. Рассмотрим в группе кос

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geqslant 2;\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \right\rangle$$

семейство элементов $\{s_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, где

$$s_{ji} := \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

При $m \in \{2, \ldots n\}$ элементы набора $\{s_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$ порождают в $B_n$ подгруппу *крашеных кос* $P_m$. Множество $\{s_{mi}, 1 \leqslant i < m\}$ порождает подгруппу $F_{m-1}$, изоморфную свободной группе ранга $m-1$, которая является нормальной подгруппой в $P_m$. Подгруппа $P_2 = F_1$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Для каждого $k \in \{3, \ldots n\}$ подгруппа $P_k$ является полупрямым произведением подгрупп $F_{k-1}$ и $P_{k-1}$:

$$P_k = F_{k-1} \rtimes P_{k-1}.$$

Таким образом,

$$P_n = F_{n-1} \rtimes (F_{n-2} \rtimes (F_{n-3} \rtimes (F_{n-4} \rtimes \cdots \rtimes F_1)))$$

и произвольный элемент $\gamma \in P_n$ единственным способом записывается в виде

$$\gamma = \gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1, \quad \text{где} \quad \gamma_i \in F_i.$$

*Нормальной формой Маркова–Ивановского в группе крашеных кос* $P_n$ мы называем отображение

$$\mathfrak{I}_P : \gamma \mapsto V_{n-1}\cdots V_1,$$

где $V_i$ — приведенная запись элемента $\gamma_i \in F_i$ в образующих $\{s_{i+1\ j}, 1 \leqslant j < i+1\}$ и обратных к ним. Группа $P_n$ является в $B_n$ нормальной подгруппой индекса $n!$. Пусть $\Pi_n \subset B_n$ — произвольный набор представителей классов смежности нормальной подгруппы $P_n$ в $B_n$. Тогда произвольный элемент $\beta \in B_n$ единственным способом записывается в виде $\gamma_\beta\pi_\beta$, где $\gamma_\beta \in P_n$ и $\pi_\beta \in \Pi_n$. *Нормальной формой Маркова–Ивановского в группе кос* $B_n$ мы

[43] Теорему о нормальном ряде, как и теорему о нормальной форме, А. А. Марков снабжает в скобках ссылкой на А. Ивановского (А. Ивановский — аспирант А. А. Маркова, погибший во время Великой Отечественной войны). Этот нормальный ряд фигурирует в последующих работах по группам кос и у других авторов, но, по-видимому, впервые он появился в указанной работе, и мы поэтому используем термин «нормальная форма Маркова–Ивановского».

называем отображение[44]

$$\mathfrak{I}_B : \beta \mapsto \mathfrak{I}_P(\gamma_\beta)\pi_\beta.$$

**Теорема** (8.1.3). *В группе кос Артина нормальная форма Маркова–Ивановского является стабильной (по отношению к случайному блужданию с любым допустимым распределением).*

Из теоремы 8.1.3 вытекает, что гиперболическая граница $\partial F_{n-1}$ свободной подгруппы $F_{n-1} \subset B_n$ является факторпространством границы Пуассона группы кос $B_n$. Довольно сложное комбинирование (которое в работе не приводится) этого результата с результатами В. А. Каймановича и Г. Мазура[45] показывает, что в случае блуждания по допустимой мере с конечным первым моментом граница $\partial F_{n-1}$ дает всю границу Пуассона.

Теорема 8.1.3 выводится из следующей теоремы, применимой не только к группам кос, но и к группам классов отображений некоторых поверхностей.

**Теорема** (8.1.2). *Пусть счетная группа $H$ с нормальной свободной неабелевой подгруппой $F$ представима в виде полупрямого произведения подгруппы $F$ и некоторой подгруппы $A$ (т. е. $H = F \rtimes A$). Пусть, кроме того, в $F$ найдется нетривиальный элемент, неподвижный по отношению к действию подгруппы $A$. Тогда для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+} = \{x_i\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ (где $x_i \in F$ и $\alpha_i \in A$) правого случайного блуждания с произвольным допустимым распределением $\mu$ последовательность $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ элементов из $F$ сходится в гиперболической компактификации $F \cup \partial F$ к некоторой точке $w(\tau)$ гиперболической границы $\partial F$.*

---

[44] В вышеуказанной работе [Mark] при определении нормальной формы А. А. Марков фиксирует некоторый специальный набор представителей классов смежности подгруппы $P_n$ в $B_n$. В нашем случае выбор представителей классов смежности значения не имеет. Кроме того, в [Mark] используется отличный от принятого выше порядок для «компонент» нормальной формы: рассматривается запись косы $\beta \in B_n$ в виде

$$\mathfrak{I}'_B(\beta) = \beta'_1\beta'_2\cdots\beta'_{n-2}\beta'_{n-1}\pi'_\beta, \qquad \beta'_i \in F_i, \qquad \pi'_\beta \in \Pi'_n.$$

Выбор порядка следования компонент в нормальной форме Маркова–Ивановского во многих вопросах, очевидно, не имеет сколь-нибудь существенного значения, в [Mark] порядок устанавливается, по-видимому, из соображений удобства записи, а, скажем, в статье В. В. Вершинина *Braids, their properties and generalizations* (Handbook of algebra, vol. 4. North-Holland, Amsterdam, 2006, pp. 427–465) форма Маркова–Ивановского описывается с использованием именно выбранного нами порядка. В контексте стабильности выбор порядка имеет значение: нормальная форма $\mathfrak{I}_B$ является стабильной при правом блуждании; нормальная форма $\mathfrak{I}'_B$ стабильной не является (ни при правом, ни при левом блуждании).

[45] V. A. Kaimanovich, H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Invent. Math. **125** (1996), 221–264.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:**


[1] А. В. Малютин, *Упорядочения на группах кос, операции над замкнутыми косами и подтверждение гипотез Менаско*, Геометрия и топология. 5, Зап. научн. сем. ПОМИ **267** (2000), 163–169.

[2] А. В. Малютин, *Быстрые алгоритмы распознавания и сравнения кос*, Геометрия и топология. 6, Зап. научн. сем. ПОМИ **279** (2001), 197–217.

[3] А. В. Малютин, Н. Ю. Нецветаев, *Порядок Деорнуа на группе кос и преобразования замкнутых кос*, Алгебра и анализ **15**:3 (2003), 170–187.

[4] А. В. Малютин, *Граница Пуассона-Фюрстенерга локально-свободной группы*, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. IX, Зап. научн. сем. ПОМИ **301** (2003), 195–211.

[5] А. В. Малютин, *Закрученность (замкнутых) кос*, Алгебра и анализ **16**:5 (2004), 59–91.

[6] А. В. Малютин, *О количестве замкнутых кос, получаемых в результате однократных стабилизаций и дестабилизаций замкнутой косы*, Алгебра и анализ **18**:6 (2006), 205–218.

[7] А. В. Малютин, *Классификация действий групп на прямой и окружности*, Алгебра и анализ **19**:2 (2007), 156–182.

[8] А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Граница группы кос и нормальная форма Маркова–Ивановского*, Изв. РАН. Сер. матем. **72**:6 (2008), 105–132.

[9] А. В. Малютин, *Псевдохарактеры групп кос и простота зацеплений*, Алгебра и анализ **21**:2 (2009), 113–135.

[10] А. В. Малютин, *Операторы пространств псевдохарактеров групп кос*, Алгебра и анализ **21**:2 (2009), 136–165.


**Другие публикации:**


[11] A. V. Malyutin, *Destabilization of closed braids*, in «Surveys in Contemporary Mathematics», London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 347, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 82–131.

[12] А. В. Малютин, *Признаки простоты зацеплений в терминах псевдохарактеров*, Геометрия и топология. 10, Зап. научн. сем. ПОМИ **353** (2008), 150–161.